目　　录

第一章　集论与集代数……………………………………(1)

§1. 集代数……………………………………………(1)

§2. 关系与函数……………………………………(10)

§3. 选择公理及某些等价命题…………………………(17)

§4. 基数与序数……………………………………(26)

§5. 实数域和复数域的构造…………………………(44)

第二章　拓扑学与连续函数……………………………(73)

§6. 拓扑学基础……………………………………(74)

§7. 连续函数空间…………………………………(110)

第三章　Lebesgue 积分……………………………………(141)

§8. Riemann-Stieltjes 积分………………………(143)

§9. 开拓若干泛函……………………………………(156)

§10. 测度与可测集…………………………………(174)

§11. 可测函数………………………………………(207)

§12. 抽象Lebesgue积分……………………………(229)

第四章　函数空间与Banach 空间………………………(264)

§13. 空间$\mathfrak{L}_p$ ($1 \leqslant p < \infty$)……………………………(264)

§14. 抽象Banach空间……………………………(296)

§15. $\mathfrak{L}_p$ ($1 < p < \infty$) 的共轭空间………………(315)

§16. 抽象Hilbert空间……………………………(332)

第五章　微分………………………………………………(366)

§17. 可微函数与不可微函数………………………(366)

§18. 绝对连续函数…………………………………(390)

§19. 复测度与 Lebesgue-Radon-Nikodým 定理(436)

§20. Lebesgue-Radon-Nikodym定理的应用……(493)
第六章 乘积空间上的积分……(546)
§21. 两个测度空间的乘积……(546)
§22. 无穷多个测度空间的乘积……(621)
记号索引……(670)
人名与术语索引……(675)

第一章　集论与集代数

根据逻辑学家的观点，数学乃是集论及其逻辑结果．就分析学家而言，集以及直接由集所定义的概念是基本工具，经常熟练地使用这些工具是绝对必要的．因此，我们先讲述关于集与函数的两节，基本上述而不证，主要想规定记号和术语，读者如需要可用作复习．关于选择公理和无穷算术的§3、§4更为重要：这两节的定理大都有详细证明；不熟悉这些内容的读者仔细学习这两节是可取的．

显然，如果不弄清实数域和复数域的结构，人们就无法认真研究实值函数和复值函数．因之，§5给出这些对象的简明而完整的构造．读这一节时可复习有关知识；要不然就采取接受的态度．

就集论公理的程序意义上来说，本书并不严格．我们承认集、承认有理数就是了．除此之外，对所论及的都要设法予以证明．

§1　集代数

(1.1)　集的概念　如上所述，我们把集的概念看作是已知的。粗略地说，一个集（集体、集合物、聚集体、类、族）①指的是任意一个可识别的某种事物的全体．我们用指出集的元（元素、点）的方法来识别集．人们已基于“是…的一个元”或“属于”概念公理化地表述了集论．从这些公理可以建立完善的集论，但这一过程是太冗长、繁难了，并且与经典分析相去甚远，而经典分析却是本书的主要课题．因此，我们不去费力地严格讨论集的概念，而始终

①皆为“集”的同义语．——译者注

求助于直观与初等逻辑. 集论的严谨论述见于P.Halmos[1]及P.Suppes[2].

(1.2) **记号** 按照习惯的用法，我们采用下列约定记号. 集的元素用斜体小写字母$a,b,c,\cdots$，x,y,z；$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示. 集用斜体大写字母$A,B,C,\cdots$表示. 集族用草体大写字母$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\cdots$表示. 在特殊场合下，我们须考虑集族的总类，这些总类用大写Cyrillic字母[3]Ж,Ч,…表示.

一个集往往用它的元素所具有的某一性质来定义. 我们用$\{x: P(x)\}$〔其中$P(x)$是某个与x有关的命题〕表示所有合于$P(x)$的x所成的集. 在此我们并没有使集的定义更明确，因为“性质”和“集”从某种观点看来是同义词.

事物x是集的一个元素时，记作$x\in A$；而$x\notin A$的意思是x不在A中.

空集记为$\varnothing$，它没有元[4]. 这样，$\varnothing=\{x:x$是实数，$x^2<0\}=\{x:x$是Bronx动物园中的独角兽$\}$[5]，等等.

设x是任意一个事物，$\{x\}$表示仅有一个元的集. 同样，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示它的元恰好是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的集.

全书采用以下记号：N表示全体正整数的集$\{1,2,3,\cdots\}$；Z表示全体整数的集；Q表示全体有理数的集；R表示全体实数的集；K表示全体复数的集. 我们假定读者已知集N,Z,Q，而§5则要构造R和K.

(1.3) **定义** 设A和B是两个集，而且合于条件：对于一切

---

①P.Halmos, *Naive set Theory*, Princeton, N.J.: D.Van Nostrand Co.1960.

②P.Suppes, *Axiomatic set Theory*, Princeton, N.J.: D.Van Nostrand Co.1960.

③西里尔（Cyrillic）字母是现代俄语字母的本源. ——译者注

④原文中void〔emply, vacuous〕set都是空集的同义语. ——译者注

⑤Bronx是纽约市的一区名，独角兽是身体似马的一种传说动物. 其实不妨称为“独角马”. ——译者注

x，由$x\in A$可推出$x\in B$，则A叫做B的**子集**，记为$A\subset B$或$B\supset A$．如果$A\subset B$，且$B\subset A$，则记为$A=B$；$A\neq B$便否定$A=B$．如果$A\subset B$，而$A\neq B$，则称A是B的**真子集**，记为$A\subsetneqq B$．我们指出，在集相等的意义下，空集是唯一的．因为如果$\varnothing_1$与$\varnothing_2$是任意两个空集，则有$\varnothing_1\subset\varnothing_2$，且$\varnothing_2\subset\varnothing_1$．

（1.4）**定义** 如果A和B是两个集，则定义$A\cup B$为集$\{x: x\in A$或$x\in B\}$，称$A\cup B$为**A与B的并**．命$\mathscr{A}$是一个集族，则定义$\cup\mathscr{A}=\{x:$对于某个$A\in\mathscr{A}$，$x\in A\}$．同样，如果$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是以I为指标集的一个集族，则记$\bigcup\limits_{\iota\in I}A_\iota=\{x:$对于某个$\iota\in I$，$x\in A_\iota\}$．如果$I=N$（全体正整数），通常把$\bigcup\limits_{n\in N}A_n$写成$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$．诸如$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{8}A_n$的其他记号的意义是不言自明的．

已知集A和B，定义$A\cap B$为集$\{x: x\in A$且$x\in B\}$，称$A\cap B$为**A与B的交**．如果$\mathscr{A}$是任意一个集族，定义$\cap\mathscr{A}=\{x:$对于一切$A\in\mathscr{A}$，$x\in A\}$；如果$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是以I为指标集的一个集族，则记$\bigcap\limits_{\iota\in I}A_\iota=\{x:$对于一切$\iota\in I, x\in A_\iota\}$．记号$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$（以及类似记号）的意义是显而易见的．

例 设$A_n=\{x: x$为实数，$|x|<\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$．

设A是一个集，A的子集全体作成的族是完全确定的一个集族，它叫做**A的幂集**，记为$\mathscr{P}(A)$．例如，若$A=\{1,2\}$，则$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$．

（1.5）**定理** 设A,B,C是任意集，则有

（i） $A\cup B=B\cup A$；	（i′） $A\cap B=B\cap A$；
（ii） $A\cup A=A$；	（ii′） $A\cap A=A$；
（iii） $A\cup\varnothing=A$；	（iii′） $A\cap\varnothing=\varnothing$；
（iv） $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；	（iv′） $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；
（v） $A\subset A\cup B$；	（v′） $A\cap B\subset A$；

(vi) $A\subset B$的充要条件是 $A\cup B=B$;

(vi′) $A\subset B$的充要条件是 $A\cap B=A$.

本定理的证明很简单，留给读者.

(1.6) 定理

(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证 这些恒等式以及其他类似的恒等式都可以借助于图解予以验证[①]，(i)的验证见图 1. 可用类似的图解法来验证(ii). 不过，我们可利用(i)和定理(1.5)证明如下：

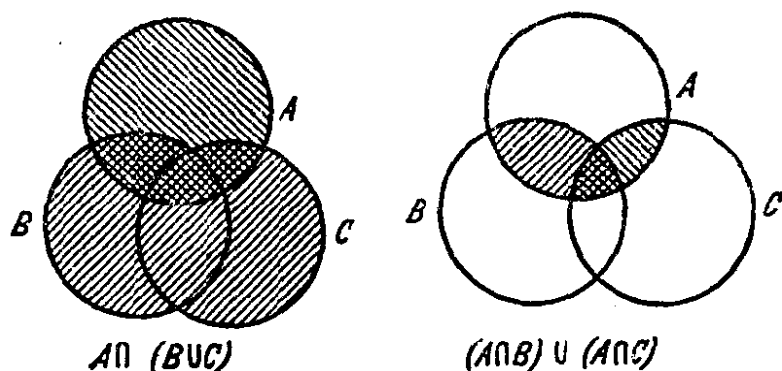


图 1

$$
\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A\cup C)&=((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C)\\
&=(A\cap A)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\\
&=A\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)\\
&=A\cup(B\cap C);
\end{aligned}
$$

末尾等式成立，因为$B\cap A\subset A$，且$A\cap C\subset A$. □[②]

①读者应注意，图解法有助于记忆定理内容，并能启发证明思路，但不能代替严格的分析论证. ——译者注.

②全书用符号“□”表示证毕.

(1.7) **定义** 当$A\cap B=\varnothing$时，就说A和B**不相交**. 如果$\mathscr{A}$是其每一对互异元都不相交的一个集族，就说$\mathscr{A}$**两两不相交**. 于是，一个指标族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$，如果只要$\iota\neq\eta$，就有$A_\iota\cap A_\eta=\varnothing$，它便是两两不相交的.

(1.8) **定义** 在以后的大多数论述中，所考虑的一切集都是某个确定的"通用"集X的子集. 这样，如果$A\subset X$，便定义A(相对于X)**的余集**为集$\{x: x\in X, x\notin A\}$. 余集用A'表示. 当哪个集是通用集可能不明确时，就把A'写成$X\cap A'$. A'的其他常用记号有$X-A$，$X\setminus A$，$X\sim A$，CA，A^c；我们只用记号A'.

(1.9) **定理**(De Morgan律)

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$；

(ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$；

(iii) $$\left(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\right)'=\bigcap_{\iota\in I}A'_\iota;$$

(iV) $$\left(\bigcap_{\iota\in I}A_\iota\right)'=\bigcap_{\iota\in I}A'_\iota$$

这些恒等式的证明都很容易，留给读者.

(1.10) **定义** 设A和B是两个集，**A和B的对称差**指的是集$\{x: x\in A$或$x\in B$, 且$x\notin A\cap B\}$，记作$A\triangle B$. 注意$A\triangle B$是由属于A或B，而不同时属于二者的点所成的集，也可定义为$A\triangle B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$. 对称差如图2所示.

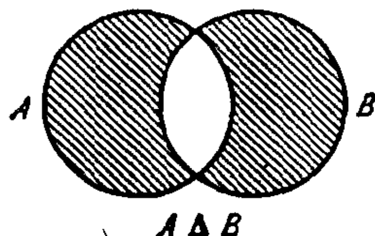


图 2

(1.11) **定义** 设X是一个集，$\mathscr{R}$是X的一些子集所成的非空集族，如果满足下列条件：

(i) $A,B\in\mathscr{R}$蕴涵$A\cup B\in\mathscr{R}$；

(ii) $A,B\in\mathscr{R}$蕴涵$A\cap B'\in\mathscr{R}$，则称$\mathscr{R}$为**集环**（或称$\mathscr{R}$为**集所成的环**）.对于求余运算是封闭的集环(即$A\in\mathscr{R}$蕴涵$A'\in\mathscr{R}$)称为**集代数**（或称为**集所成的代数**）.

(1.12) **评注** 集环对于有限交运算是封闭的；因为如果$A,B\in\mathscr{R}$，则应用两次(1.11.ii)便推出$A\cap B=A\cap(A\cap B')'\in\mathscr{R}$. 根据(1.11.i)和(1.11.ii)，我们得出$A\triangle B=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\in\mathscr{R}$. 又注意到，既然$\mathscr{R}$非空，便有$\varnothing\in\mathscr{R}$. 当且仅当$X\in\mathscr{R}$时，$\mathscr{R}$也是一个代数. 不是集代数的集环是有的，例如$N$的有限子集全体所成的族是集环，但不是集代数.

(1.13) **定义** 假若一个集环（集代数）$\mathscr{R}$满足以下条件：

如果$\{A_n:n\in N\}\subset\mathscr{R}$，那么$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R}$，

则称$\mathscr{R}$为**σ环**（**σ代数**）[或称$\mathscr{R}$为**集所成的σ环**（**σ代数**）].

测度论经常论述构成σ环或σ代数的集族. 不是σ代数的σ环是有的，例如一个不可数集的可数子集全体所成的族就是如此.（可数和不可数的定义见§4.）

(1.14) **评注**① 有许多集环和集代数的公理论述，事实上，某些很奇特的实体可看作集环或集代数[见(1.25)]. 设B是任意一个集. 假定对于每个$a\in B$，可以确定唯一的元素$a^*\in B$，而对于每一对元素$a,b\in B$，可以确定唯一的元素$a\vee b\in B$，使得这些运算满足：

(i) $a\vee b=b\vee a$,

(ii) $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$,

(iii) $(a^*\vee b^*)^*\vee(a^*\vee b)^*=a$.

1890—1930年间许多作者研究过这样的集B：它具有运算$\vee$和$*$（或类似运算），并满足与(i)—(iii)等价的公理. 根据英国数学家G.Boole（1815—1864）的姓氏，对此类集他们提供了一个一般名称，定名为Boole代数. 公理(i)—(iii)是由美国数学家E.V.

---

①只是由于具有启发性，才列入了这一小段，初学者可暂且略去.

Huntington（1874—1952）提出的①.

读者会注意到，如果把a,b看作是集，而$\vee$和$*$看作是并和求余，那么(i)—(iii)就变成恒等式了. 在Boole代数中也可规定其他运算，比如说，$\wedge$（类似于集的运算符号$\cap$）规定为$a\wedge b=(a^*\vee b^*)^*$. 在研究抽象Boole代数方面，人们已付出艰巨劳动. 20世纪30年代，当代美国数学家M.H.Stone证明了，任意Boole代数可如下明确解释为一个集代数②：已知任意Boole代数B，存在一个集X，X的子集所成的一个代数$\mathscr{R}$以及B到$\mathscr{R}$上的一个一一映射τ，使得$\tau(a^*)=(\tau(a))'$（$*$变为$'$），且$\tau(a\vee b)=\tau(a)\cup\tau(b)$（$\vee$变为$\cup$）. 这样一来，根据在Boole代数中研究运算的观点，人们只研集代数就行了.

Stone关于Boole代数表示法的论述，曾建立在一个稍许不同的实体（Boole环）的基础之上. 一个Boole环是指合于以下条件的任意一个环S：对于每个$x\in S$，有$x^2=x$. 〔环的定义见(5.3)〕

Stone曾经指出，Boole代数和有乘法单位元的Boole环可以认为是等同的，从而将其研究建立在Boole环的基础之上. 更确切地说，对于任意Boole环S，都存在一个集环$\mathscr{R}$和S到$\mathscr{R}$上的一一映射τ，满足以下两个条件：

$$\tau(a+b)=\tau(a)\triangle\tau(b)$$

及

$$\tau(ab)=\tau(a)\cap\tau(b).$$

也就是说，一个Boole环中的加法对应于对称差，而乘法对应于交.

上述结果的证明、Boole代数与Boole环以及集代数与集环的篇幅很长的论述，读者均可参阅G.Birkhoff③.

(1.15) **习题** 将下列各式化为最简形式：

---

①参见：Trans.Amer.Math.Soc.5, 288—309（1904）.

②参见：Trans.Amer.Math.Soc.40, 37—111（1936）.

③G.Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer.Math.Soc.Colloquium Publications, 25卷，第二版；Amer.Math.Soc., New York, N.Y., 1948.

(a) $(A\cup(B\cap(C\cup W')))'$;

(b) $((X'\cup Y)\cap(X\cup Y'))'$;

(c) $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)$
$\cup(A\cap B\cap C')\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')$
$\cup(A'\cap B'\cap C)$.

(1.16) 习题（Poretsky） 已知两个集X和Y，证明$X=\varnothing$当且仅当$Y=X\triangle Y$.

(1.17) 习题 用文字说明集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$和$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$，其中$\{A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots\}$是以$N$为指标集的任意一个集族．并证明：前者是后者的子集.

(1.18) 习题 证明下列等式：

(a) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$;

(b) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(c) $A\triangle A=\varnothing$;

(d) $\varnothing\triangle A=A$.

(1.19) 习题 设$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$和$\{B_\iota\}_{\iota\in I}$是两个非空集族．试证：

(i) $$(\bigcup_\iota A_\iota)\triangle(\bigcup_\iota B_\iota)\subset\bigcup_\iota(A_\iota\triangle B_\iota).$$

并举一例验证包含关系可以是真包含关系．如果在(i)中将所有$\cup$换成$\cap$，会有什么结论？

(1.20) 习题 设A,B,C是任意集．试证：

$$A\triangle B\subset(A\triangle C)\cup(B\triangle C)$$

并举一例说明包含关系可以是真包含关系.

(1.21) 习题 设$\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个集族，且集N_n两两不相交．规定$Q_1=M_1$，$Q_n=M_n\cap(M_1\cup\cdots\cup M_{n-1})'$（$n=2,3,\cdots$）．证明：$N_n\triangle Q_n\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(N_k\triangle M_k)$（$n=1,2,\cdots$）.

(1.22) 习题 考虑有有限个字母（比如a个，$a>1$）的一个字母表，其中所谓一个**字**是指字母（不一定互异）的一个有限序列．两个字相等指的是它们有同样多的字母，并且依次有相同的字

母．考虑**字长**①为l（$l>1$）的所有字，试问：某固定字母至少重复两次的字有多少个？某固定字母至少重复三次的字有多少个？有多少个字中出现两个指定的互异字母？

（1.23） **习题**

（a） 设A是一个有限集，$\nu(A)$表示A的元素个数：这样，$\nu(A)$便是非负整数．试证：

$$\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B).$$

（b） 将上述恒等式推广到$\nu(A\cup B\cup C)$和$\nu(A\cup B\cup C\cup D)$的情况．

（c） 一位大学注册管理员报告：全校注册学生数是10000名，其中2521人已婚，6471人是男性，3115人21岁以上，1915名男生已婚，21岁以上已婚者是1873人，21岁以上已婚男生是1302人．试问这个报告是否正确？

（d）请帮助这位管理员．对于一个10000人的学生团体，根据（c）中所列的类型，试求与（b）中所求得的恒等式一致的正整数．

（1.24） **习题** 试证：在任意一个Boole环中，均成立以下恒等式：

（a） $x+x=0$．

（b） $xy=yx$．

（1.25） **习题**

（a） 设B是能除尽30的正整数全体所成的集．对于$x,y\in B$，设$x\vee y$是x和y的最小公倍数，命$x^*=\dfrac{30}{x}$．证明：B是一个Boole代数．试给出一个象（1.14）中所说的表示B的集代数．

（b） 用任意无平方因子正整数代替30，推广（a）．

（c） 试推广（b）：考虑所有无平方因子正整数所成的集B，定义$x\vee y$为x和y的最小公倍数，定义$x\wedge y$为x和y的最大公因子，定义$x\triangle y$为$\dfrac{x\vee y}{x\wedge y}$．证明：$B$可以表示为某个集环，但不能表

---

①字母的数目称为**字长**．——译者注

示为一个集代数.

§2 关系与函数

本节我们着手研究关系和函数的概念，这些概念在初等分析中以不同的形式为我们所熟知．我们采用目前流行的观点：即关系和函数从其图形来看是没有区别的，也就是说，它们都是有序偶所成的集．与在集的场合一样，我们对这些概念也只作不很正规的讨论.

(2.1) **定义** 设X和Y是两个集．**X和Y的Cartesian乘积**是指有序偶(x,y)，$x\in X$，$y\in Y$全体所成的集$X\times Y$. ①

当且仅当$x=u,y=v$时，我们写成$(x,y)=(u,v)$。这样，$(1,2)\neq(2,1)$，而$\{1,2\}=\{2,1\}$.

(2.2) **定义** 一个**关系**是指有序偶所成的任意一个集．这样，两个集的Cartesian乘积的任意子集便是一个关系．注意，$\varnothing$是一个关系.

(2.3) **定义** 设f是任意一个关系，**f的定义域**规定为集$\mathrm{dom}f=\{x$:对于某个y，$(x,y)\in f\}$，**f的值域**规定为集$\mathrm{rng}f=\{y$:对于某个x,$(x,y)\in f\}$．符号f^{-1}表示f的**逆**:$f^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in f\}$.

(2.4) **定义** 设f和g是两个关系，**f和g的合成**〔也叫做**积**或**叠**(iterate)〕定义为关系$g\circ f=\{(x,z)$：对于某个y,$(x,y)\in f$,$(y,z)\in g\}$.

f和g的合成可以是空集．事实上，$g\circ f=\varnothing$的充要条件是$(\mathrm{rng}f)\cap(\mathrm{dom}g)\neq\varnothing$.

(2.5) **定义** 设f和g是两个关系：$f\subset g$．则称g是f的一个**开拓**，而f是g的一个**限制**.

下面我们详述后面要用到的某些特殊类型的关系．如需要，我

①原书这里用扁乘号，即用$X\times Y$表示两集X,Y的Cartesian乘积，显示原书符号系统的严谨性．但限于印刷条件，中文版改用“X”．当后文（如(22.36)）混合使用普通意下的乘号时，读者当不难予以区分．——译者注

们就用约定记号xfy表示$(x,y)\in f$.

(2.6) **定义** 设X是一个集. X**上的等价关系**是指满足下列条件的一个关系$\sim\subset X\times X$：对于X中的任意x,y,z，有

(i) $x\sim x$（**自反的**）；

(ii) $x\sim y$蕴涵$y\sim x$（**对称的**）；

(iii) $x\sim y$，$y\sim z$蕴涵$x\sim z$（**传递的**）.

(2.7) **定义** 设P是一个集. P **上的半序关系**是指满足下列条件的一个关系$\leqslant\subset P\times P$：

(i) $x\leqslant x$（**自反的**）；

(ii) $x\leqslant y$，$y\leqslant x$蕴涵$x=y$（**反对称的**）；

(iii) $x\leqslant y$，$y\leqslant z$蕴涵$x\leqslant z$（**传递的**）.

如果$\leqslant$又满足

(iv) $x,y\in P$蕴涵$x\leqslant y$或$y\leqslant x$（**三分法**），则$\leqslant$叫做P**上的一个线性序关系**（也叫做**简单序关系，全序关系**）[①]. 如果$x\leqslant y$，而$x\neq y$，就写成$x<y$. $x\geqslant y$这个式子表示$y\leqslant x$，而$x>y$表示$y<x$.

如果$\leqslant$是满足以下条件的线性序关系：

(v) 若$\varnothing\neq A\subset P$，则存在一个元素$a\in A$，使得对于每个$x\in A$，有$a\leqslant x$（$a$是$A$的**最小元素**），

那么$\leqslant$叫做P**上的一个良序关系**.

一个**半序集**是指一个有序偶$(P,\leqslant)$，其中P是一个集，$\leqslant$是P上的一个半序关系. 如果$\leqslant$是一个线性序关系，$(P,\leqslant)$就叫做一个**线性有序集**（**简单序集、全序集**）. 如果$\leqslant$是一个良序关系，则$(P,\leqslant)$叫做一个**良序集**[②].

设P是一个线性有序集，对于$x,y\in P$，我们作以下规定：$x\leqslant y$时，$\max\{x,y\}=y$；$y\leqslant x$时，$\max\{x,y\}=x$. 对于P的有限子集

---

①原文中的Complete，total，这里皆译为"全". ——译者注

②如果不致引起误解，后文有时就称P为线性有序集、良序集、…等等. ——译者注

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$（所有$x_j$不一定互异），我们规定$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \max\{x_n, \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}\}$. 可类似地定义表达式$\min\{x, y\}$和$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

(2.8) **例** (a) 设$\mathscr{F}$是任意一个集族.则集包含关系$\subset$是$\mathscr{F}$上的一个半序关系，而($\mathscr{F}$, $\subset$)是一个半序集. 我们简称$\mathscr{F}$被$\subset$半序化. 读者应注意，这个关系可能不是一个线性序关系，这取决于$\mathscr{F}$；比如，取$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\{0,1\})$.

(b) 设P是非负有理数全体所成的集：

$$P = \{x : x \in Q, x \geqslant 0\},$$

又设$\leqslant$是P上的普通序关系. 那么$\leqslant$是P上的一个线性序关系，而P有最小元素0. 但是，根据这个序关系，P却不是一个良序集. 这是因为，确实存在P的非空子集，它们没有最小元素. 例如设$A = \{x \in P : x \neq 0\}$. 则只要$x \in A$，就有$\frac{x}{2} \in A$，可见$A$没有最小元素.

(c) 正整数全体所成的集N，按照普通序关系成为一个线性有序集. 它也是一个良序集. 最后这一断言等价于数学归纳法的Peano公理.

(2.9) **定义** 设f是一个关系，A是一个集. 则**A在f下的象**定义为集

$$f(A) = \{y: 对于某个 x \in A, (x, y) \in f\}.$$

注意，$f(A) \neq \varnothing$的充要条件是$A \cap \operatorname{dom} f \neq \varnothing$. A在f下的**原象**是集$f^{-1}(A)$.

(2.10) **定义** 如果一个关系f满足：只要$(x, y) \in f$, $(x, z) \in f$，就有$y = z$，就说f是**单值的**. 如果f和f^{-1}都是**单值的**，则f叫做**一对一关系或一一关系**（1-1关系）①. 可类似定义**多对一**关系、**一对多**关系和**多对多**关系.

因为单值关系在分析数学中起着重要作用，所以我们提出以下

---

①括号内的简便记法是译者加的. ——译者注

定义.

(2.11) **定义** 一个单值关系叫做一个**函数**(**映射**、**变换**、**运算**、**对应**、**映照**①).

(2.12) **例** 正弦函数,即$\{(x,\sin x): x\in R\}$是多对一的. 这个函数的逆,即$\{(\sin x, x): x\in R\}$是一对多关系. 关系$\{(x,y): x, y\in R, x^2+y^2=1\}$是多对多关系. 函数$\{(x,\operatorname{tg}x): x\in R, -\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\}$是一对一函数.

(2.13) **定义** 设f是一个函数,X和Y分别表示f的定义域和值域. 对于$x\in X$,命$f(x)$表示Y的合于$(x,f(x))\in f$的唯一元素,元素$f(x)$叫做f**在**x**的值或**x**在**f**下的象**.

注意,为了完全确定一个函数,只要确定函数的定义域以及在它的定义域的每一点的函数值就行了.

(2.14) **评注** 根据(2.9),我们注意到,如果f是一个函数,A是一个集,则$f(A)=\{f(x): x\in A\cap\operatorname{dom}f\}$,$f^{-1}(A)=\{x: x\in\operatorname{dom}f, f(x)\in A\}$. 读者应验证这些等式.

(2.15) **定理** 设X和Y是两个集,$f\subset X\times Y$是一个关系. 假定$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是X的一个子集族,$\{B_\iota\}_{\iota\in I}$是Y的一个子集族. 对于$A\subset X$,用A'表示A关于X的余集;对于$B\subset Y$,用B'表示B关于Y的余集. 则有

(i) $$f\left(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\right)=\bigcup_{\iota\in I}f(A_\iota);$$

(iii) $$f\left(\bigcap_{\iota\in I}A_\iota\right)\subset\bigcap_{\iota\in I}f(A_\iota).$$

如果f是一个函数,则下列结果成立,但对于任意关系,这些结果却未必成立:

---

①原文为"application". 法文里此词可译为"映照"或"贴合"等,英文里它一般指"贴合". 但在微分几何中,"贴合"一词有其特定的几种解释. 为避免名词混乱,这里从法文的"映照"一义. ——译者注

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\iota\in I} B_\iota\right)=\bigcap_{\iota\in I} f^{-1}(B_\iota)$;

(iv) $f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'$;

(v) $f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)$.

本定理的证明留给读者.

(2.16) 评注 由定理(2.15)可见，根据任何纯集论性质，1-1函数的定义域和值域不能彼此区别开. 如果X和Y是两个集，且存在一个有定义域X和值域Y的1-1函数f，则对于X的任意子集A，我们有$f(A')=f(A)'$. 对于X的任意子集族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$，我们有$f(\bigcup_{\iota\in I} A_\iota)=\bigcup_{\iota\in I} f(A_\iota)$及$f(\bigcap_{\iota\in I} A_\iota)=\bigcap_{\iota\in I} f(A_\iota)$. 对于$Y$的子集和$f^{-1}$也有类似结果. 这样一来，在$f$和$f^{-1}$下保持一切Boole运算($\cup$，$\cap$，$\triangle$，$'$)不变.

(2.17) 定义 设f是一个函数，且$\mathrm{dom}f=X$，$\mathrm{rng}f\subset Y$，则说f是**X到Y内**(或**X上到Y**)的一个函数①，记作$f:X\to Y$. 如果$\mathrm{rng}f=Y$，就说f是**到Y上的**②.

(2.18) 定义 一个**序列**是定义域为正整数全体的集N的一个函数. 如果x是一个序列，在n处的x值常写成x_n，而不写成$x(n)$. 值x_n叫做这个序列的**第n项**. 第n项是x_n的序列x记为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，或简记为(x_n). 设有一个序列(x_n)，如果对于每个$n\in N$，有$x_n\in X$，便说**(x_n)在X中**. $(x_n)\subset X$这种写法是记号的误用③.

后面几次要用到以下定理.

(2.19) 定理 设$\mathfrak{F}$是满足以下条件的任意一个函数族：如果$f,g\in\mathfrak{F}$，那么或是$f\subset g$，或是$g\subset f$. 也就是说，$\mathfrak{F}$关于$\subset$是线性有序的. 命$h=\bigcup\mathfrak{F}$. 则：

(i) h是一个函数；

---

①或称f是把X映入Y的函数. ——译者注

②或称f映满Y. ——译者注

③作者的意思是，本书准备滥用这一错误记法. 参见(6.25)，(6.81)等段. ——译者注

(ii) $\text{dom}h = \bigcup\{\text{dom}f : f \in \mathfrak{F}\}$;

(iii) 如果$x \in \text{dom}h$，那么对于合于$x \in \text{dom}f$的每个$f \in \mathfrak{F}$，有$h(x) = f(x)$;

(iv) $\text{rng}h = \bigcup\{\text{rng}f : f \in \mathfrak{F}\}$.

证 (i) 既然h是有序偶所成的集之并，所以h显然是一个关系．因此只要证明h是单值的就行了．设$(x,y) \in h, (x,z) \in h$. 则在$\mathfrak{F}$中存在f和g，适合$(x,y) \in f$，$(x,z) \in g$. 已知$f \subset g$或$g \subset f$；比如说$f \subset g$．则$(x,y) \in g, (x,z) \in g$. 既然g是一个函数，便有$y = z$. 于是h是一个函数.

等式(ii)成立，因为下列命题彼此等价：$x \in \text{dom}h$；对于某个y，$(x,y) \in h$；对于某个$f \in \mathfrak{F}$，$(x,y) \in f$；对于某个$f \in \mathfrak{F}$，$x \in \text{dom}f$.

设$x \in \text{dom}h \cap \text{dom}f = \text{dom}f$，其中$f \in \mathfrak{F}$. 则$(x, f(x)) \in f \subset h$，而$h$是单值的，所以$h(x) = f(x)$. 这便证明了(iii).

等式(iv)可由上述结论及(2.15.i)得出，这是因为$\text{rng}h = h(\text{dom}h) = h(\bigcup\{\text{dom}f : f \in \mathfrak{F}\}) = \bigcup\{h(\text{dom}f) : f \in \mathfrak{F}\}$

$$= \bigcup\{f(\text{dom}f) : f \in \mathfrak{F}\} = \bigcup\{\text{rng}f : f \in \mathfrak{F}\}. \quad \square$$

(2.20) **定义** 设X是任意一个集，E是X的任意子集．函数ξ_E有定义域X及含在$\{0,1\}$中的值域，且满足

$$\xi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in X \cap E', \end{cases}$$

我们称$\xi_E(x)$为E的**特征函数**．根据上下文，总易于确定ξ_E的定义域．特征函数在分析数学中很有用，这在全书中屡见不鲜．有一个特殊的特征函数大有用处，须给予专门符号．$X \times X$的**对角集**D定义为$D = \{(x,x) : x \in X\}$. D的特征函数在(x,y)的值记为δ_{xy}，叫做Kronecker δ记号．这样，当$x = y$时，$\delta_{xy} = 1$；当$x \neq y$时，$\delta_{xy} = 0$；这里x, y是X中的任意两点.

(2.21) **习题** 试证：对于任意关系f, g, h，都有

$$f \circ (g \circ h)=(f \circ g) \circ h.$$

(2.22) **习题** 试证：对于不是函数的一切关系 f，等式 $f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)$不成立.

(2.23) **习题** 对于$N\times N$中的(a,b)和(c,d)，如果$a<c$，或$a=c$而$b\leqslant d$，都定义$(a,b)\leqslant(c,d)$. 试证：关于这个关系，$N\times N$是一个良序集.

(2.24) **习题** 设n是正整数，$P_n=\{k\in N: k\text{是}n\text{的因子}\}$. 对于$a,b\in P_n$，规定$a\trianglelefteq b$表示$a$是$b$的因子，这就是说，$a\mid b$.

(a) 试证：P_n（关于$\trianglelefteq$）是一个半序集.

(b) 试问：当n满足怎样的充要条件时，才能使得P_n成为一个线性有序集？

(2.25) **习题** 设X是一个集，在X上定义了一个二元运算p，也就是说，p是$X\times X$到X内的一个函数，记$p(xy)=xy$. 假定对于X中的任意x,y,z，这个运算满足

(i) $x(yz)=(xy)z$,

(ii) $xy=yx$,

(iii) $xx=x$.

当且仅当$xy=y$时，用$x\leqslant y$来定义X上的$\leqslant$. 试证：

(a) X是一个半序集；

(b) X的每对元素有上确界，也就是说，如果$x,y\in X$，那么必存在$z\in X$，适合$x\leqslant z$，$y\leqslant z$，而如果$x\leqslant w$，$y\leqslant w$，那么$z\leqslant w$.

(2.26) **习题** 设f是X到Y内①的一个函数. 假定有Y到X内的一个函数g，适合：对于一切$y\in Y$，有$f\circ g(y)=y$；又对于一切$x\in X$,有$g\circ f(x)=x$. 试证：f是X到Y上的一个1-1函数，且$g=f^{-1}$.

---

①原文为“X到Y”，鉴于(2.17)，为统一叙述，译文改为“X到Y内”. ——译者注

§3 选择公理及某些等价命题

在代数、分析和拓扑的研究中，人们往往感到初等集论工具（如§1与§2所简略介绍的）是太不够了，很难提出所需要的构造、证明乃至定义. 20世纪初期，德国数学家E.Zermelo提出了一个貌似简单，实则很深奥的公理——选择公理①（Auswahlpostulat）②，它有许多重要推论，也激发起了蓬勃的论争. 本节我们学习选择公理，证明其他四个等价命题，并举出两个重要应用例子. 选择公理的其他应用则散见于全书.

(3.1) **定义** 设$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是任意一个集族. 这个族的Cartesian乘积（记作$\bigtimes_{\iota\in I}A_\iota$）是适合以下条件的一切函数$x$所成的集：它有定义域$I$，且对于每个$\iota\in I$，有$x_\iota=x(\iota)\in A_\iota$. 每个这样的函数$x$都叫做族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$的一个**选择函数**. 设$x\in\bigtimes_{\iota\in I}A_\iota$，且$\iota\in I$，则值$x_\iota\in A_\iota$称为$x$**的第**$\iota$**个坐标**.

人们或许要问：一个已知集族，是否必存在任意一个选择函数呢？当然，如果$I=\varnothing$，那么对于以I为指标集的任意族，空函数$\varnothing$就是它的一个选择函数. 如果$I\neq\varnothing$，而且对于某个$\iota\in I$，$A_\iota=\varnothing$，那么$\bigtimes_{\iota\in I}A_\iota=\varnothing$. 这两种特殊情况都没有多大意义. 一般说来，在集论的普通公理基础上无法回答上述问题. 我们将利用以下公理作出回答.

(3.2) **选择公理** 非空集所成的任意一个非空族的Cartesian乘积是一个非空集，这就是说，如果$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是一个集族：$I\neq\varnothing$，且对于每个$\iota\in I$，$A_\iota\neq\varnothing$，则族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$至少存在一个选择函数.

P.J.Cohen最近证明了选择公理独立于集论的其他公理③.

---

①参见Math.Ann.，59（1904），514. ——译者注

②德语：选择公理，或Auswahlaxiom. ——译者注

③参见Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A.50，1143—1148（1963）；51，105—110（1964）.

(3.3) **定义** 设A和I是两个集. 我们定义A^I为Cartesian乘积$\times_{\iota\in I} A_\iota$,这里对于每个$\iota\in I$, 有$A_\iota=A$. 于是$A^I$是适合$\operatorname{dom} f=I$及$\operatorname{rng} f\subset A$的函数$f$全体所成的集. 如果$I$是集$\{1,2,\cdots,n\}$(对于某个$n\in N$), 则记为$A^I=A^n$. 有些作者将$A^N$写成$A^\omega$.

A^n的典型元无疑是一个函数, 因而它是n个有序偶所成的集. 不过我们按照习惯记法, 将这种函数的值表成有序n元组. 于是, $A^n=\{(a_1,\cdots,a_n):a_k\in A,k=1,\cdots,n\}$. 同样, $A^N=\{(a_1,a_2,\cdots):a_k\in A,k\in N\}$. 集$R^n$叫做$n$**维欧几里得空间**, K^n叫做n**维酉空间**.

(3.4) **例** 设$A=\{0,1\}$. 则A^N是一切序列$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$所成的集, 其中每个$a_n$是0或1.这个集很类似于Cantor三分点集$P=[0,1]\cap\left(\left]\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right]\cup\left]\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right[\cup\cdots\right)'$〔见下(6.62)〕.用$\varphi(a)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$定义的映射$\varphi$是$A^N$到$P$上的一个1-1映射. 以后我们会看到, 在引进度量ρ后, 集A^N可形成一个度量空间, 这里当$a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\cdots$, $a_{n-1}=b_{n-1}$而$a_n\neq b_n$时, $\rho(a,b)=\frac{1}{n}$; 当$a=b$时, $\rho(a,b)=0$. 在A^N上的这一度量下, φ和φ^{-1}都是连续的. 按照运算+(对于$n\in N$, 用$(a+b)_n=a_n+b_n(\mathrm{mod}\,2)$来定义这个运算), 集$A^N$作成一个Abel群. (有许多别的方法也可将$A^N$作成一个Abel群.)

(3.5) **定义** 设$(P,\leqslant)$是任意一个半序集, $A\subset P$. 设有一个元素$u\in P$, 如果对于每个$x\in A$, 有$x\leqslant u$, 那么u叫做A**的一个上界**. 设有一个元素$m\in P$, 如果$x\in P$及$m\leqslant x$蕴涵$m=x$, 那么m叫做P**的一个极大元素**. 可类似定义**下界**和**极小元素**①. P**中的一个链**是指P的任意一个线性有序子集C. 换句话说, 如果C是P的任意子集, 而且在P上的已知序关系$\leqslant$下, C是线性有序的, 那么C叫做P中的一个链②.

---

①我们约定, P的每个元素既是空集$\varnothing$的上界, 又是$\varnothing$的下界; 但是, $\varnothing$当然既不"含"极大元素, 又不"含"极小元素.

②为使链的定义更明确, 译文稍作铺陈. ——译者注

半序集这个术语往往用于任意集族，这时集族当然被认为是集包含关系$\subset$下的一个半序集. 于是，集族$\mathscr{A}$的一个极大元是一个集$M\in\mathscr{A}$：M不是$\mathscr{A}$中任何其他元的真子集. 而一些集的链指的是一个集族$\mathscr{B}$，满足：只要$A,B\in\mathscr{B}$，则不是$A\subset B$，便是$B\subset A$.

(3.6) **定义** 设$\mathscr{F}$是一个集族. 如果对于每个集A来说，$A\in\mathscr{F}$的充要条件是A的每个有限①子集在$\mathscr{F}$中，就说$\mathscr{F}$是一个具有**有限特征的族**.

后文需要以下引理.

(3.7) **引理** 设$\mathscr{F}$是具有限特征的一个族，$\mathscr{B}$是$\mathscr{F}$中的一个链. 则$\cup\mathscr{B}\in\mathscr{F}$.

证 只要证明$\cup\mathscr{B}$的每个有限子集都在$\mathscr{F}$中就行了. 设$F=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\cup\mathscr{B}$，那么在族中必存在集$B_1,\cdots,B_n$. 使得$x_j\in B_j$ ($j=1,\cdots,n$). 既然$\mathscr{B}$是一个链，便有一个$j_0\in\{1,\cdots,n\}$，使对于每个$j=1,\cdots,n$，都有$B_j\subset B_{j_0}$. 于是$F\subset B_{j_0}\in\mathscr{F}$. 但$\mathscr{F}$是具有限特征的，因此$F\in\mathscr{F}$. □

在集论、代数和分析中的许多问题里，并不能直接应用(3.2)形式的选择公理，但某个等价公理却是直接适用的. 下面我们列出四个这类命题. 虽然它们都等价于公理(3.2)，只是由于历史原因，还是加上了“引理”、“定理”等名称.

(3.8) **Tukey引理** 凡具有限特征的非空族，都有一个极大元.

(3.9) **Hausdorff极大性原理** 凡非空半序集都包含一个极大链.

(3.10) **Zorn引理** 如果一个非空半序集中的每个链都有上界，则这个集必有一个极大元素.

(3.11) **良序定理**(Zermelo) 每个集都可良序化；也就是

---

①设有一个集F，如果或者$F=\varnothing$，或者存在$n\in N$以及$\{1,2,\cdots,n\}$到F上的1-1函数，则称F是**有限的**. 见(4.12).

说，如果S是一个集，则S上必存在某个良序关系$\leqslant$.

(3.12) **定理** 下列五个命题彼此等价：

(i) 选择公理；

(ii) Tukey引理；

(iii) Hausdorff极大性原理；

(iv) Zorn引理；

(v) 良序定理.

证 我们依次证明：(i)蕴涵(ii)，(ii)蕴涵(iii)，(iii)蕴涵(iv)，(iv)蕴涵(v)，最后(v)蕴涵(i). 最难证明的是(i)蕴涵(ii).

设(i)成立，假定(ii)不成立. 则存在一个没有极大元的具有限特征的非空族$\mathscr{F}$. 对于每个$F\in\mathscr{F}$，命$\mathscr{A}_F=\{E\in\mathscr{F}:F\subsetneqq E\}$. 那么$\{\mathscr{A}_F:F\in\mathscr{F}\}$是非空集的一个非空族，所以根据(i)便有一个定义在$\mathscr{F}$上的函数f，使对于每个$F\in\mathscr{F}$，$f(F)\in\mathscr{A}_F$. 这样，对于每个$F\in\mathscr{F}$，便有$F\subsetneqq f(F)\in\mathscr{F}$.

设有$\mathscr{F}$的一个子族$\mathscr{I}$，如果它具有以下三个性质，则称$\mathscr{I}$是f**归纳的**(f-inductive)：

(1) $\varnothing\in\mathscr{I}$；

(2) $A\in\mathscr{I}$蕴涵$f(A)\in\mathscr{I}$；

(3) 一个链$\mathscr{B}\subset\mathscr{I}$蕴涵$\cup\mathscr{B}\in\mathscr{I}$.

既然$\mathscr{F}$非空，又$\varnothing$有限，而且(3.7)成立，族$\mathscr{F}$乃是f归纳的. 命$\mathscr{I}_0=\cap\{\mathscr{I}:\mathscr{I}是f归纳的\}=\{A\in\mathscr{F}:对于每个f归纳族\mathscr{I}, A\in\mathscr{I}\}$. 容易看出，$\mathscr{I}_0$是$f$归纳的. 于是$\mathscr{I}_0$是最小$f$归纳族，所以含在$\mathscr{I}_0$中的任意一个$f$归纳族必定就是$\mathscr{I}_0$. 我们将反复利用这一事实来证明$\mathscr{I}_0$是一个链.

命

$$\mathscr{H}=\{A\in\mathscr{I}_0:B\in\mathscr{I}_0及B\subsetneqq A蕴涵f(B)\subset A\}.$$

我们断言：如果$A\in\mathscr{H}$，又$C\in\mathscr{I}_0$，那么不是$C\subset A$，便是$f(A)\subset C$. 为了证明这一断言，设$A\in\mathscr{H}$，并规定

$$\mathscr{G}_A=\{C\in\mathscr{I}_0: C\subset A\text{或}f(A)\subset C\}.$$

只要证$\mathscr{G}_A$是f归纳的就行了．因为$\varnothing\in\mathscr{I}_0$，而且$\varnothing\subset A$，所以$\mathscr{G}_A$满足(1)．设$C\in\mathscr{G}_A$．则或有$C\subsetneqq A$，或有$C=A$，或有$f(A)\subset C$．如果$C\subsetneqq A$，那么$f(C)\subset A$，这是因为$A\in\mathscr{H}$．如果$C=A$，那么$f(A)\subset f(C)$．如果$f(A)\subset C$，那么$f(A)\subset f(C)$，这是因为$C\subset f(C)$．于是在每种情况下都有$f(C)\in\mathscr{G}_A$，所以$\mathscr{G}_A$又满足(2)．再设$\mathscr{B}$是$\mathscr{G}_A$中的一个链．则或者对于每个$C\in\mathscr{B}$，有$C\subset A$，在这种情况下，$\bigcup\mathscr{B}\subset A$；或者存在$C\in\mathscr{B}$，使得$f(A)\subset C\subset\bigcup\mathscr{B}$．于是$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{G}_A$所以$\mathscr{G}_A$也满足(3)．因而我们推得$\mathscr{G}_A$是$f$归纳的，可见$\mathscr{G}_A=\mathscr{I}_0$．

其次我们断言$\mathscr{H}=\mathscr{I}_0$．我们来证明$\mathscr{H}$是$f$归纳的，从而便证明了这一断言．既然$\varnothing$没有真子集，$\mathscr{H}$显然满足(1)．又设$A\in\mathscr{H}$，并设$B\in\mathscr{I}_0$满足$B\subsetneqq f(A)$．由于$B\in\mathscr{I}_0=\mathscr{G}_A$，便有$B\subset A$（包含关系$f(A)\subset B$不可能）．如果$B\subsetneqq A$，则由$\mathscr{H}$的定义得出$f(B)\subset A\subset f(A)$．如果$B=A$，那么$f(B)\subset f(A)$．在两种情况都成立包含关系$f(B)\subset f(A)$，所以$f(A)\in\mathscr{H}$，由此对于$\mathscr{H}$，(2)成立．再设$\mathscr{B}$是$\mathscr{H}$中的一个链，并且$B\in\mathscr{I}_0$具有性质$B\subsetneqq\bigcup\mathscr{B}$．因为对于每个$A\in\mathscr{B}$，有$B\in\mathscr{I}_0=\mathscr{G}_A$ 所以或者对于某个$A\in\mathscr{B}$，$B\subset A$，或者对于任意$A\in\mathscr{B}$，$f(A)\subset B$．如果后者成立，我们应得到

$$B\subsetneqq\bigcup\mathscr{B}\subset\bigcup\{f(A): A\in\mathscr{B}\}\subset B,$$

这不可能．于是有某个$A\in\mathscr{B}$，合于$B\subset A$．如果$B\subsetneqq A$，则由于$A\in\mathscr{H}$，我们就有$f(B)\subset A\subset\bigcup\mathscr{B}$．如果$B=A$，则$B\in\mathscr{H}$，而且$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{I}_0=\mathscr{G}_B$．由此推出$f(B)\subset\bigcup\mathscr{B}$（$\bigcup\mathscr{B}\subset B$不可能）．于是在两种情况下，我们都得到$f(B)\subset\bigcup\mathscr{B}$，从而$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{H}$．这就证明了$\mathscr{H}$也满足(3)．因此$\mathscr{H}$是$f$归纳的，而且$\mathscr{H}=\mathscr{I}_0$．

根据上述论证，我们得出结论：如果$A\in\mathscr{I}_0=\mathscr{H}$，又$B\in\mathscr{I}_0=\mathscr{G}_A$，那么不是$B\subset A$，便是$A\subset f(A)\subset B$．因此$\mathscr{I}_0$是一个链．命$M=\bigcup\mathscr{I}_0$．因为$\mathscr{I}_0$是$f$归纳的，所以(3)意味着$M\in\mathscr{I}_0$．应用(2)，我们有$\bigcup\mathscr{I}_0=M\subsetneqq f(M)\in\mathscr{I}_0$，这个矛盾证明了(i)蕴涵(ii)这一事实．

其次证(ii)蕴涵(iii)．设$(P,\leqslant)$是任意一个非空半序集．我们要证P包含一个极大链．由Tukey引理立即得出这一结论，因为P中的一切链所成的族$\mathscr{C}$，是具有限特征的一个非空族〔$\varnothing\in\mathscr{C}$，且对于每个$x\in P$，$\{x\}\in\mathscr{C}$〕．

为了证明(iii)蕴涵(iv)，设$(P,\leqslant)$是一个非空半序集，而它的每个链有上界．根据(iii)，有一个极大链$M\subset P$．命m是M的一个上界．则m是P的一个极大元素．因为如果有$x\in P$，能使$m\leqslant x$，而$m\neq x$，那么$M\cup\{x\}$便是真包含M的一个链了，这与M的极大性相矛盾．

为了证明(iv)蕴涵(v)，设S是任意一个非空集，命$\mathscr{L}$表示合于$W\subset S$的一切良序集$(W,\leqslant)$所成的族．例如，对于每个$x\in S$，$(\{x\},\{(x,x)\})\in\mathscr{L}$．然后根据定义$(W_1,\leqslant_1)\preceq(W_2,\leqslant_2)$来引进$\mathscr{L}$上的一个次序关系，它的含义是：或者$W_1=W_2$，且$\leqslant_1=\leqslant_2$，或者存在$a\in W_2$，使得$W_1=\{x\in W_2:x\leqslant_2 a,x\neq a\}$，且在$W_1$上，$\leqslant_2$与$\leqslant_1$一致，也就是$\leqslant_1\subset\leqslant_2$．我们说$(W_2,\leqslant_2)$是$(W_1,\leqslant_1)$的一个**延拓**．读者不难看出，$\preceq$是$\mathscr{L}$上的一个半序关系．

我们来证明Zorn引理可应用于半序集$(\mathscr{L},\preceq)$．设$\mathscr{C}=\{(W_\iota,\leqslant_\iota)\}_{\iota\in I}$是$\mathscr{L}$中任意一个（关于$\preceq$的）非空链．命$W=\bigcup_{\iota\in I}W_\iota$，且$\leqslant=\bigcup_{\iota\in I}\leqslant_\iota$（不要忘记每个$\leqslant_\iota$是有序偶所成的集）．我们留给读者证明$\leqslant$是$W$上的一个线性序关系．设$A$是$W$的一个非空子集．存在$\iota\in I$，使$A\cap W_\iota\neq\varnothing$．因为$(W_\iota,\leqslant_\iota)$是一个良序集，所以有一个元素$a\in A\cap W_\iota$，使对于每个$x\in A\cap W_\iota$，有$a\leqslant_\iota x$．假定有一个元素$b\in A$，适合$b\leqslant a$．则$b\in W_\iota$，且$b\leqslant_\iota a$，所以$b=a$．于是在$(W,\leqslant)$中$A$有一个最小元素$a$．我们推知$(W,\leqslant)\in\mathscr{L}$，且是$\mathscr{C}$的一个上界．

根据Zorn引理，$\mathscr{L}$有一个极大元素$(W_0,\leqslant_0)$．如果$W_0=S$，那么$\leqslant_0$是S的一个良序关系，这便完成了证明．假定$W_0\neq S$，命$z\in S\cap W_0'$．在$W_0\cup\{z\}$上规定

$$\leqslant=\leqslant_0\cup\{(x,z):x\in W_0\cup\{z\}\},$$

也就是说，命z在W_0中每个元素的后面．则$(W_0\cup\{z\},\leqslant)\in\mathscr{Z}$．这与$(W_0,\leqslant_0)$的极大性矛盾，因而我们证明了$W_0=S$．

还需证(v)蕴涵(i)．设$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$是非空集的任意一个非空族，$S=\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$．又设$\leqslant$是$S$的一个良序关系．对于每个$\iota\in I$，命$f(\iota)$是$A_\iota$（关于良序关系$\leqslant$）的最小元．则$f$便是族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$的一个选择函数． □

按下述方法给出定义或构造往往很有用处：设将某个集W良序化，则总是根据W中元素a的所有前趋元素的定义或构造，来给出a上的定义或构造．下面(3.13)和(3.14)叙述这个方法的一般形式．

(3.13) **定义** 设$(W,\leqslant)$是一个良序集，又设$a\in W$．集$I(a)=\{x\in W:x\leqslant a,x\neq a\}$叫做**由$a$决定的$W$的初始段**．

(3.14) **定理（超限归纳原理）**

设$(W,\leqslant)$是一个良序集．又设$A\subset W$，而且只要$I(a)\subset A$，就有$a\in A$．则$A=W$．

证 假定$W\cap A'\neq\varnothing$，且a是$W\cap A'$的最小元．则有$I(a)\subset A$，所以$a\in A$．但是$a\in W\cap A'$． □

选择公理在分析数学中或许并不起主要作用，但有时却非常需要它．在后面测度论和线性泛函的研究中，我们会遇到这类情况．现在我们举出选择公理的一个直接和重要的应用实例——根据Tukey引理，证明每个向量空间都含有一个基．先叙述几个严格定义．

(3.15) **定义** 一个**向量空间（线性空间）**指的是一个有序三元组$(X,\cdot,F)$，其中X是一个加法Abel群①，F是一个域，而$\cdot$是$F\times X$到X内的一个函数（此函数在(α,x)的值用αx表示），并满足条件：对于$\alpha,\beta\in F$，$x,y\in X$，有

（i） $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$；

①群、环、域的论述，见§5．

(ii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

(iii) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(iv) $1x=x$，其中 1 是F的乘法单位元.

X的元叫做**向量**，F的元叫做**纯量**，运算 · 叫做**纯量乘法**，我们简称X是**域F上的一个向量空间**.

(3.16) 评注 在向量空间中我们有 $0x=\alpha 0=0$，这是因为 $0x=(0+0)x=0x+0x$，而$\alpha 0=\alpha(0+0)=\alpha 0+\alpha 0$. 又$\alpha\neq 0$及 $x\neq 0$ 蕴涵$\alpha x\neq 0$，这是由于，不然的话我们该有 $x=1x=(\alpha^{-1}\alpha)x=\alpha^{-1}(\alpha x)=\alpha^{-1}0=0$.

(3.17) 例 (a) 设F是任意一个域，$n\in N$，$X=F^n$. 对于X中的$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$及$\alpha\in F$，定义$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$，$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n)$. 则$X$是$F$上的一个向量空间.

(b) 设F是任意一个域，A是任意一个非空集，$X=F^A$. 对于$f,g\in X$，$\alpha\in F$以及一切$x\in A$，定义$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$. 则$X$是$F$上的一个向量空间. 注意 (a) 是 (b) 当$A=\{1,\cdots,n\}$时的特殊情况.

(c) 设$X=R$有R中的普通加法，$E=Q$. 对于$x\in R$，$\alpha\in Q$，设αx是R中的普通乘积. 则R是Q上的一个向量空间.

(3.18) 定义 设X是F上的一个向量空间，A是X的一个子集. 如果对于A的互异元素所成的每个有限子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$和F的元素所成的每个有限序列$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，等式$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=0$蕴涵等式$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$①，就说$A$（**在$F$上**）**是线性无关的**. 一个非空线性无关集B，如果$B\subsetneqq E\subset X$蕴涵E非线性无关，就叫做F上X的一个**Hamel基**（或简称为**基**）②. 可见，Hamel基乃是一个极大线性无关集.

---

①注意，$\varnothing$线性无关.

②这一基的概念，是由德国数学家G.Hamel（1877—1954）提出来的. ——译者注

(3.19) 定理 至少有两个元素的每个向量空间都含有一个Hamel基.

证 设向量空间X至少有两个元素，又设X中$x\neq 0$. 则(3.16)表明$\{x\}$是一个线性无关集. 于是X的一切线性无关子集所成的族$\mathscr{F}$非空. 由线性无关定义立即推知$\mathscr{F}$是具有限特征的. Tukey引理说明$\mathscr{F}$含有一个极大元，也就是说，X含有一个基. □

(3.20) 定理 设X是域F上的一个向量空间，B是F上X的一个Hamel基. 则对于每个$x\in X$，存在B到F内的唯一函数α，使除对于有限个$b\in B$以外，都有$\alpha(b)=0$，而且$x=\sum\limits_{b\in B}\alpha(b)b$，换句话说，$x$可以唯一地表成$B$的元的有限线性组合.

证 设$x\in X$. 如果$x\in B$，则定义$\alpha(x)=1$，而对于$b\in B$，$b\neq x$，定义$\alpha(b)=0$. 那么$\sum\limits_{b\in B}\alpha(b)b=1x=x$. 假定$x\notin B$. 则$B\cup\{x\}$非线性无关，所以存在一个有限集$\{x,x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset B\cup\{x\}$和一个不全为零的有限序列$(\beta,\beta_1,\cdots,\beta_n)\subset F$，满足$\beta x+\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n=0$. 既然$B$是线性无关的，我们马上看出$\beta\neq 0$. 因此$x=-\beta^{-1}\beta_1x_1-\cdots-\beta^{-1}\beta_nx_n$. 现定义$\alpha(x_j)=-\beta^{-1}\beta_j(j=1,\cdots,n)$，而对于$b\in B\cap\{x_1,\cdots,x_n\}'$，定义$\alpha(b)=0$. 那么$x=\sum\limits_{b\in B}\alpha(b)b$. 这就证明了命题中$\alpha$的存在性.

为了证明唯一性，假设$\sum\limits_{b\in B}\alpha_1(b)b=\sum\limits_{b\in B}\alpha_2(b)=b$. 则

$\sum\limits_{a\in B}(\alpha_1(b)-\alpha_2(b))b=0$，这乃是$B$的元素的一个有限线性组合. 根据线性无关性，对于每个$b\in B$，$\alpha_1(b)-\alpha_2(b)=0$，因而$\alpha_1$和$\alpha_2$是同一个函数. □

(3.21) 习题 已知非空集A和域F，设$\mathfrak{L}$是F^A的子集，它包括使集$\{a\in A:f(a)\neq 0\}$为有限的那些函数. 设$\mathfrak{L}$中的线性运算是(3.17.b)中的运算. 证明：$\mathfrak{L}$是F上的向量空间. 再证明：每个向

量空间与某个向量空间 $\mathfrak{L}$ 在向量空间意义下同构①.

(3.22) **习题** 试证：如果P是一个集，$\leqslant$是P上的一个半序关系，那么在P上存在一个线性序关系$\leqslant_0$，使$\leqslant \subset \leqslant_0$.

(3.23) **习题** 设$(L, \leqslant)$是一个线性有序集. 试证：存在一个集$W \subset L$，使得$\leqslant$良序化W，并且使对于每个$x \in L$，有$y \in W$，适合$x \leqslant y$.

(3.24) **习题** 设G是一个群，H是G的一个Abel子群. 试证：存在G的一个极大Abel子群J，使得$H \subset J$；也就是说，J是Abel群，但没有适合$J \subsetneqq J^*$的子群J^*是Abel群.

(3.25) **习题** 证明以下断言等价于选择公理：如果A和B是两个非空集，f是A到B上的一个函数，则存在B到A内的一个函数g，使对于每个$y \in B$，有$g(y) \in f^{-1}(y)$.

(3.26) **习题** 设X是域F上的一个向量空间，A是X的一个非空线性无关子集，S是X的一个子集，且X的每个元素是S的元素的有限线性组合（称集S**张成**X）. 假定$A \subset S$. 试证：X含有一个Hamel基B，且$A \subset B \subset S$.

§4 基数与序数

正如(2.16)所指出的，1-1对应的两个集，尽管可能是截然不同的实体，但是，根据任何纯集论性质，它们却是不能区别开的. 这就导致以下定义.

(4.1) **定义** 对于每个集A，我们予以一个记号，叫做A的**基数**，使得两个集A和B附有同一记号的充要条件是存在一个1-1函

---

①设X_1和X_2是F上的两个线性空间，X_1到X_2上的一个同构τ指的是满足以下条件的X_1到X_2上的一个1-1映射：对于任意$x, y \in X_1$和任意$\alpha \in F$，

(i) $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$；

(ii) $\tau(\alpha x) = \alpha\tau(x)$.

从线性空间的性质来说，同构的线性空间是无差异的.

数 f，适合

$$\mathrm{dom} f = A,\ \mathrm{rng} f = B.$$

我们记 $A \sim B$，指的是存在这样的一个1-1函数. 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B **等价**（或称**对等**、**等势**、具有**相同基数(性)**、**同权**）. 我们用 $\overline{\overline{A}}$ 表示 A 的基数. 这样，$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 指的是 $A \sim B$.

(4.2) **例** 对于某些常见集，须用专门记号来记它们的基数. 比如，$\overline{\overline{\varnothing}} = 0$；对于每个 $n \in N$，$\overline{\overline{\{1, 2, \cdots, n\}}} = n$；$\overline{\overline{N}} = \mathrm{card} N$；$\overline{\overline{R}} = \mathfrak{c}$（连续统的基数）①.

(4.3) **评注** 读者如果细想一下恒等函数、反函数及合成函数，就容易验证：(4.1)所定义的集等价，是自反的、对称的和传递的. 这个事实说明定义（4.1）的合理性和实用的广泛性.

(4.4) **评注** 上述基数定义多少有点含糊不清，因为其中并没有弄清这些所谓"记号"的确切含义. 由于我们研究集论时采用直观方法，某些这种模糊性是不可避免的. 不过，对目前来说，这一定义也就够用了. 公理集论中有一种说法是，一个集的基数被认为是一个很特别的良序集——等价于已知集的最小序数.

下面我们定义基数的一个序关系.

(4.5) **定义** 设 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{v}$ 是两个基数，U，V 是两个集，且 $\overline{\overline{U}} = \mathfrak{u}$，$\overline{\overline{V}} = \mathfrak{v}$. 我们记 $\mathfrak{u} \leqslant \mathfrak{v}$ 或 $\mathfrak{v} \geqslant \mathfrak{u}$，表示 U 等价于 V 的某个子集. 考虑其合成关系可知，本定义是非二义性的. 我们用 $\mathfrak{u} < \mathfrak{v}$ 或 $\mathfrak{v} > \mathfrak{u}$ 表示 $\mathfrak{u} \leqslant \mathfrak{v}$，且 $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{v}$.

(4.6) **定理** 设 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{v}$，$\mathfrak{w}$ 是基数，则：

(i) $\mathfrak{u} \leqslant \mathfrak{u}$；

(ii) $\mathfrak{u} \leqslant \mathfrak{v}$ 及 $\mathfrak{v} \leqslant \mathfrak{w}$ 蕴涵 $\mathfrak{u} \leqslant \mathfrak{w}$.

证. 留作习题.

(4.7) **定理**（Schröder-Bernstein）设 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{v}$ 是两个基数.

---

①后文中除去这几种专门记号之外，常用德文花体小写字母表示基数.
——译者注

如果$u \leqslant v$，$v \leqslant u$，则$u = v$.

证 设U，V是两个集，且$\overline{\overline{U}} = u$，$\overline{\overline{V}} = v$. 根据题设，存在两个1-1函数$f$和$g$，使得$\mathrm{dom} f = U$，$\mathrm{rng} f \subset V$，$\mathrm{dom} g = V$，$\mathrm{rng} g \subset U$. 根据以下规则定义$\mathscr{P}(U)$到$\mathscr{P}(U)$内的一个函数$\varphi$:

$$\varphi(E) = U \cap [g(V \cap (f(E))')]'. \tag{1}$$

容易看出

$$E \subset F \subset U \text{ 蕴涵 } \varphi(E) \subset \varphi(F). \tag{2}$$

命$\mathscr{D} = \{E \in \mathscr{P}(U) : E \subset \varphi(E)\}$. 注意到$\varnothing \in \mathscr{D}$. 然后设$D = \bigcup \mathscr{D}$. 因为对于每个$E \in \mathscr{D}$，$E \subset D$，所以由(2)可推出对于每个$E \in \mathscr{D}$，$E \subset \varphi(E) \subset \varphi(D)$. 因此$D \subset \varphi(D)$. 再应用(2)，我们有$\varphi(D) \subset \varphi(\varphi(D))$，所以$\varphi(D) \in \mathscr{D}$. 于是我们有反向包含关系$D = \bigcup \mathscr{D} \supset \varphi(D)$，因而$\varphi(D) = D$. 根据(1)，这意味着

$$D = U \cap [g(V \cap (f(D))')]'.$$

这样，$U \cap D' = g(V \cap (f(D))')$，由此可见$U$上按下式

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ g^{-1}(x), & x \in U \cap D', \end{cases}$$

定义的函数h是1-1的，而且h是映满V的. □

Schröder-Bernstein定理的证明并不需要选择公理。它也没有说明我们想了解的有关基数比较的全部知识. 它无非断言$u < v$和$v < u$不能同时成立. 为了证明任意两个基数实际上都是可以比较的〔如(4.8)所说〕，就需要选择公理了.

(4.8) **定理** 设u，v是两个基数，那么不是$u \leqslant v$，便是$v \leqslant u$.

证 设U，V是两个集，且$\overline{\overline{U}} = u$，$\overline{\overline{V}} = v$. 命$\mathfrak{F}$表示合于$\mathrm{dom} f \subset U$及$\mathrm{rng} f \subset V$的1-1函数$f$全体所成的族。容易看出$\mathfrak{F}$是具有限特征的一个族，从而根据Tukey引理(3.8)，$\mathfrak{F}$含有一个极大元h. 我们断言不是$\mathrm{dom} h = U$，便是$\mathrm{rng} h = V$. 设若不然，则存在$x \in U \cap (\mathrm{dom} h)'$及$y \in V \cap (\mathrm{rng} h)'$. 但另一方面却有$h \cup \{(x, y)\} \in \mathfrak{F}$，与$h$的极大性相矛盾. 于是上述断言成立。如果

$\mathrm{dom}f=U$，则 h 表明 $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$. 如果 $\mathrm{rng}h=V$，则 h^{-1} 表明 $\mathfrak{v}\leqslant\mathfrak{u}$. □

（4.9） **定理** 基数的序关系≤使基数所成的任意集成为一个线性有序集.

证 本定理无非是定理(4.6)，(4.7)和(4.8)的简单综合.

以下定理表明，不可能存在一个最大基数.

（4.10） **定理**（Cantor） 设 U 是任意的一个集，则 $\overline{\overline{U}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(U)}}$.

证 因为当 $U=\varnothing$ 时，$\overline{\overline{\mathscr{P}(\varnothing)}}=1>0=\overline{\overline{\varnothing}}$，所以假定 $U\neq\varnothing$. 设 $\mathfrak{u}=\overline{\overline{U}}$，$\mathfrak{v}=\overline{\overline{\mathscr{P}(U)}}$. U 上由 $f(x)=\{x\}\in\mathscr{P}(U)$ 所定义的函数 f 是1-1的，所以 $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$. 倘若 $\mathfrak{u}=\mathfrak{v}$，那么必存在一个（1-1的）函数 h，使 $\mathrm{dom}h=U$，$\mathrm{rng}h=\mathscr{P}(U)$. 规定

$$S=\{x\in U:x\notin h(x)\}.$$

由于 $S\subset U$（可能有 $S=\varnothing$），就有 $S\in\mathscr{P}(U)$. 于是，因为 h 是到 $\mathscr{P}(U)$ 上的，所以存在一个元素 $a\in U$，使 $h(a)=S$. 只有两种可能：不是 $a\in S$，便是 $a\notin S$. 如果 $a\in S$，则根据 S 的定义，有 $a\notin h(a)=S$. 因此 $a\notin S$. 但 S 是集 $h(a)$，所以 $a\notin h(a)$，这又推出 $a\in S$. 这个矛盾说明 $\mathfrak{u}\neq\mathfrak{v}$，从而证明了 $\mathfrak{u}<\mathfrak{v}$. □

（4.11） **评注** 直觉集论具有一些著名的悖论. 而在公理集论中，由于排除了"太大"的那些"集"，就避开了这些熟知悖论. 比如说，设 C 是基数全体所成的"集". 对于每个 $\mathfrak{a}\in C$，命 $A_{\mathfrak{a}}$ 是合于 $\overline{\overline{A_{\mathfrak{a}}}}=\mathfrak{a}$ 的一个集. 定义

$$B=\bigcup\{A_{\mathfrak{a}}:\mathfrak{a}\in C\}$$

命 $\mathfrak{b}=\overline{\overline{B}}$. 因为 $A_{\mathfrak{a}}\subset B$，所以对于每个基数 $\mathfrak{a}$ 就有 $\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{b}$. 这一结论与定理（4.10）相违背. 问题出在"集" C "太大"了. 实际上这个集非常非常之大. 本书没有必要考虑这么大的一些集.

（4.12） **定义** 设 S 是一个集，如果 $S=\varnothing$，或者对于某个 $n\in N$，$\overline{\overline{S}}=n=\overline{\overline{\{1,2,\cdots,n\}}}$，就说 S 是**有限的**. 如果一个集不是有限的，就说是**无限的**或**无穷的**.

Tarski和Dedekind给出了以下“有限”和“无限”的定义，其中没有提到自然数，我们叙述成为定理.

(4.13) 定理 设S是一个集. 则：

(i) (Tarski) 集S有限的充要条件是S的每个非空子集族含有一个极小元.

(ii) (Dedekind) 集S无限的充要条件是S等价于它的某个真子集.

证 留作习题.〔利用(4.15).〕

(4.14) 定义 设S是一个集，如果或者S是有限的，或者$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{N}}=\mathrm{card}N$，就称$S$是**可数的**.不是可数的任意集是**不可数的**.设S是一个集，如果$\overline{\overline{S}}=\mathrm{card}N$，就称$S$是**可数无限的**(或称**可列的**).设$S$是可数无限集，$f$是$N$到$S$上的一个1-1函数，则序列$(x_n)$(这里$x_n=f(n)$)叫做$S$的一个**枚举**. 要注意，$x_n\neq x_m(n\neq m)$.

(4.15) 定理 凡无限集都有一个可数无限子集.

证 设A是任意的一个无限集. 根据归纳法，我们来证明：对于每个$n\in N$，存在一个集$A_n\subset A$，使$\overline{\overline{A_n}}=n$. 实际上$A\neq\varnothing$，所以存在$A_1\subset A$. 如果$A_n\subset A$，并且$\overline{\overline{A_n}}=n$，那么既然$A$是无限集，便存在一个元素$x\in A\cap A_n'$. 命$A_{n+1}=A_n\cup\{x\}$，我们有$A_{n+1}\subset A$，并且$\overline{\overline{A_{n+1}}}=n+1$.

其次设$\{A_n\}_{n\in N}$是A的如上所说的任意一个子集族.（请留意，在挑选这个族时，应用了选择公理.）对于每个$n\in N$，规定

$$B_n=A_{2^n}\cap\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_{2^k}\right)'.$$

那么族$\{B_n\}_{n\in N}$是A的一个两两不相交的子集族，并且对于每个$n\in N$，我们有

$$\overline{\overline{B_n}}\geqslant\overline{\overline{A_{2^n}}}-\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\overline{A_{2^k}}}=2^n-\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2^n-(2^n-1)=1,$$

所以每个B_n非空. 把选择公理应用于$\{B_n\}_{n\in N}$，可以得到一个选择函数f. 那么f是N到A内的一个1-1映射，所以$\mathrm{rng}f$便是A的一

个可数无限子集. □

(4.16) **推论** 如果 $\mathfrak{a}$ 是任意一个无限基数(即一个无限集的基数),则 $\mathrm{card}N \leqslant \mathfrak{a}$.

(4.17) **定理** 可数集的任意子集也是可数的.

证 设 A 是任意一个可数集,并且 $B \subset A$. 如果 B 是有限集,则 B 可数. 因此假定 B 是无限集,那么 A 乃是可数无限集. 设 (a_n) 是 A 的一个枚举. 递推定义 N 到 B 上的一个1-1函数 f 如下:

$f(1)=a_{n_1}$,其中 n_1 是使 $a_n \in B$ 的最小的 $n \in N$; $f(k+1)=a_{n_{k+1}}$,其中 n_{k+1} 是使 $a_n \in B \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_k}\}'$ 的最小的 $n \in N$. □

(4.18) **定理** Cartesian乘积 $N \times N$ 必是可数集.

证 须证 $N \sim N \times N$. 为了证明二者等价,我们可按照 $f(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$ 定义 $N \times N$ 到 N 上的映射 f. 因为每个正整数等于 2 的一个乘幂(有可能是零次幂)乘以一个奇数,所以 f 是到 N 上的. 可见 f 是1-1映射,不然的话就该有一个既是偶数又是奇数的整数了. □

(4.19) **引理** 如果 A 是任意一个非空可数集,则存在 N 到 A 上的一个映射.

证 既然 A 可数,所以存在 A 到 N 内的一个 1-1 映射 g. 设 $a \in A$,在 N 上定义 f 为

$$f(n)=\begin{cases} g^{-1}(n), & n \in \mathrm{rng}\, g, \\ a, & n \notin \mathrm{rng}\, g. \end{cases} \quad \square$$

(4.20) **引理** 如果 A, B 是两个非空集,并且存在 A 到 B 上的一个映射 f,则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$.

证 设 g 是族 $\{f^{-1}(b)\}_{b \in B}$ 的一个选择函数. 则 g 是 B 到 A 内的一个1-1映射. □

(4.21) **定理** 可数集的任意可数族的并也是可数集,这就是说,如果 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是一个集族,而 I 可数,并且每个 A_i 可数,那么

$A=\bigcup_{i\in I}A_i$也可数.

证 设$\{A_i\}_{i\in I}$是定理中的集族，显然可假定I和每个A_i都非空．利用引理(4.19)，可以得到映射f_i和g，它们满足条件：对于任意$i\in I$，$\mathrm{dom}f_i=\mathrm{dom}g=N$，$\mathrm{rng}g=I$，$\mathrm{rng}f_i=A_i$．在$N\times N$上定义$h$为$h(m,n)=f_{g(m)}(n)$．则$h$是到$A$上的．由(4.20)和(4.18)可推出

$$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{N\times N}}=\mathrm{card}N.$$

根据(4.16)，A可数． □

(4.22) 推论 下列各集都可数：

(i) Z，整数全体的集；

(ii) Q，有理数全体的集．

证 我们有

$$Z=N\cup\{0\}\cup\{-n:n\in N\}$$

及

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m}{n}:m\in Z\right\}.\ \square$$

下面引进基数的算术运算．我们将看到，无限基数的算术是非常简单的．

(4.23) 定义 设$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$是两个基数，A，B是两个集，且$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$，$\overline{\overline{B}}=\mathfrak{b}$．如果$A\cap B=\varnothing$，则规定$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\overline{\overline{A\cup B}}$．并规定$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=\overline{\overline{A\times B}}$及$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}=\overline{\overline{(A^B)}}$．

容易证明上述定义不会产生歧义．此外顺便指出，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$总是有定义的．因为总可求出适当的不相交的两个集$A$和$B$．事实上，如果$A\cap B\neq\varnothing$，那么只要规定$A_0=\{(a,0):a\in A\}$，$B_0=\{(b,1):b\in B\}$，便得到$A\sim A_0$，$B\sim B_0$，并且$A_0\cap B_0=\varnothing$．

(4.24) 定理 设$\mathfrak{u}$，$\mathfrak{v}$和$\mathfrak{w}$是任意的三个基数．则：

(i) $\mathfrak{u}+(\mathfrak{v}+\mathfrak{w})=(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})+\mathfrak{w}$；

(ii) $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}=\mathfrak{v}+\mathfrak{u}$；

(iii) $\mathfrak{u}(\mathfrak{v}+\mathfrak{w})=\mathfrak{u}\mathfrak{v}+\mathfrak{u}\mathfrak{w}$；

(iv) $\mathfrak{u}(\mathfrak{v}\mathfrak{w})=(\mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{w}$；

(v) $\mathfrak{u}\mathfrak{v}=\mathfrak{v}\mathfrak{u}$；

(vi) $\mathfrak{u}^{\mathfrak{v}}\mathfrak{u}^{\mathfrak{w}}=\mathfrak{u}^{\mathfrak{v}+\mathfrak{w}}$；

(vii) $\mathfrak{u}^{\mathfrak{w}}\mathfrak{v}^{\mathfrak{w}}=(\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\mathfrak{w}}$；

(viii) $(\mathfrak{u}^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{w}}=\mathfrak{u}^{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}$；

(ix) $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$ 蕴涵 $\mathfrak{u}+\mathfrak{w}\leqslant\mathfrak{v}+\mathfrak{w}$；

(x) $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$ 蕴涵 $\mathfrak{u}\mathfrak{w}\leqslant\mathfrak{v}\mathfrak{w}$；

(xi) $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$ 蕴涵 $\mathfrak{u}^{\mathfrak{w}}\leqslant\mathfrak{v}^{\mathfrak{w}}$；

(xii) $\mathfrak{u}\leqslant\mathfrak{v}$ 蕴涵 $\mathfrak{w}^{\mathfrak{u}}\leqslant\mathfrak{w}^{\mathfrak{v}}$.

证 通过规定适当的1-1映射，这十二个结论，都可得到证明。我们以证明(viii)为例，其余十一个留作习题.

设U，V和W是三个集，而$\overline{\overline{U}}=\mathfrak{u}$，$\overline{\overline{V}}=\mathfrak{v}$，$\overline{\overline{W}}=\mathfrak{w}$．须证$(U^V)^W\sim U^{V\times W}$．为此，在$(U^V)^W$上规定映射$\varphi$为

$$\varphi(f)=g\in U^{V\times W}$$

其中

$$g(y,z)=(f(z))(y)\in U,\quad (y,z)\in V\times W$$

于是φ是到$U^{V\times W}$上的，这是因为，如果$g\in U^{V\times W}$，则只要这样规定W上的函数f就行了：f在$z\in W$处的值是V上的函数，对于每个$y\in V$，这个值等于$g(y,z)\in U$，所以$\varphi(f)=g$．为了断定φ是1-1的，假定在$(U^V)^W$内，$f_1\neq f_2$．则有一个$z_0\in W$，使$f_1(z_0)\neq f_2(z_0)$．因为在V上这两个函数是不同的，所以必定有一个$y_0\in V$，使$f_1(z_0)(y_0)\neq f_2(z_0)(y_0)$．于是$[\varphi(f_1)](y_0,z_0)\neq[\varphi(f_2)](y_0,z_0)$．因此$\varphi(f_1)$和$\varphi(f_2)$是不同的函数．□

(4.25) 定理 如果$\mathfrak{a}$是任意一个基数，则$\mathfrak{a}<2^{\mathfrak{a}}$.

证 设A是一个集，且$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$．由(4.10)可知$\mathfrak{a}<\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$，而$2^{\mathfrak{a}}=\overline{\overline{(\{0,1\}^A)}}$．因此只要证明$\mathscr{P}(A)\sim\{0,1\}^A$就可以了．在$\mathscr{P}(A)$上定义函数$\varphi$为

$$\varphi(E)=\xi_E\in\{0,1\}^A,\quad E\subset A,$$

如同（2.20），这里

$$\xi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in A\cap E'.\end{cases}\quad\square$$

以下我们考虑基数 $\mathfrak{c}=\overline{\overline{R}}$. 读者要预先了解§5中$R$的详细构造以及$R$的有关性质.

(4.26) 定理 命

$$]0,1[=\{x\in R:0<x<1\},$$
$$[0,1[=\{x\in R:0\leqslant x<1\},$$
$$[0,1]=\{x\in R:0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

则 $\overline{\overline{]0,1[}}=\overline{\overline{[0,1[}}=\overline{\overline{[0,1]}}=\mathfrak{c}$.

证 定义函数f为$f(x)=\dfrac{1-2x}{x(1-x)}$，$f$是$]0,1[$到$R$上的1-1映射. 因此$\overline{\overline{]0,1[}}=\overline{\overline{R}}=\mathfrak{c}$. 由不等式$\mathfrak{c}=\overline{\overline{]0,1[}}\leqslant\overline{\overline{[0,1[}}\leqslant\overline{\overline{[0,1]}}\leqslant\overline{\overline{R}}=\mathfrak{c}$和Schröder-Bernstein定理便得出其余结论. $\square$

(4.27) 定理 $2^{\operatorname{card}N}=\mathfrak{c}$.

证 命$A=\{0,1\}^N$。定义(4.23)表明$\overline{\overline{A}}=2^{\operatorname{card}N}$.根据(4.26)，$\overline{\overline{[0,1[}}=\mathfrak{c}$，在$A$上定义$f$为$f(\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi(n)}{3^n}$. 则〔见(5.40)〕$f$是$A$到$[0,1[$内的一个1-1映射,所以$2^{\operatorname{card}N}\leqslant\mathfrak{c}$. 对于每个$x\in[0,1[$，有如下形式的$x$的唯一表达式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n},$$

其中每个x_n是0或1，并且对于无限多个$n\in N$, $x_n=0$〔见(5.40)〕. 定义$[0,1[$到A内的映射g为$g(x)=\varphi$，其中对于每个$n\in N$，$\varphi(n)=x_n$. 则g是1-1映射,所以$\mathfrak{c}\leqslant 2^{\operatorname{card}N}$. 然后应用Schröder-Bernstein定理就得到$2^{\operatorname{card}N}=\mathfrak{c}$. $\square$

下面指出无限基数的几个稀奇古怪的算术性质. 先得证一个

引理.

(4.28) **引理** 如果D是任意一个无限集，F是合于$D\cap F=\varnothing$的任意一个有限集，则$\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{D\cup F}}$.

证 设$F=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，其中$y_i\neq y_j(i\neq j)$，又设$C=\{x_j:j\in N\}$是D的一个可数无限子集，其中$x_i\neq x_j(i\neq j)$(4.15). 定义D到$D\cup F$上的函数f为

$$f(x)=\begin{cases}y_j, & x=x_j,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ x_{j-n}, & x=x_j, j>n,\\ x, & x\in D\cap C'.\end{cases}$$

那么f是1-1的. □

(4.29) **定理** 设$\mathfrak{a}$是任意一个无限基数. 则$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$.

证 设A是合于$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$的任意一个集，$B=A\times\{0,1\}$. 那么$B=\{(a,0):a\in A\}\cup\{(a,1):a\in A\}$,根据定义(4.23)，便有$\overline{\overline{B}}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}$. 命$\mathfrak{F}$表示合于$\mathrm{dom}f\subset A$及$\mathrm{rng}f=(\mathrm{dom}f)\times\{0,1\}$的1-1函数$f$全体所成的集. 既然$A$是无限集，便存在一个可数无限集$C$，使$C\subset A$(4.15). 由(4.21)可知，$C\times\{0,1\}$也是可数无限集，所以有一个1-1函数$f$，满足$\mathrm{dom}f=C$，$\mathrm{rng}f=C\times\{0,1\}$. 这就证明了$\mathfrak{F}\neq\varnothing$. 用$\subset$半序化$\mathfrak{F}$. 根据Hausdorff极大性原理(3.9)，$\mathfrak{F}$含有一个极大链$\mathfrak{C}$. 命$g=\cup\mathfrak{C}$. 容易验证$g\in\mathfrak{F}$.命$D=\mathrm{dom}g$. 函数$g$的存在性表明$\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{D}}+\overline{\overline{D}}$. 因此为了完成定理的证明，只要证$\overline{\overline{D}}=\mathfrak{a}$就行了. 命$E=A\cap D'$. 如果$E$有限，那么引理(4.28)表明$\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{D\cup E}}=\mathfrak{a}$. 如果$E$无限，设$G$是$E$的一个可数无限子集，又设$f$是$G$到$G\times\{0,1\}$上的任意一个1-1映射. 那么$h=f\cup g\in\mathfrak{F}$，且$g\subsetneqq h$. 这与$\mathfrak{C}$的极大性矛盾. 因此$E$有限，并且$\overline{\overline{D}}=\mathfrak{a}$.
□

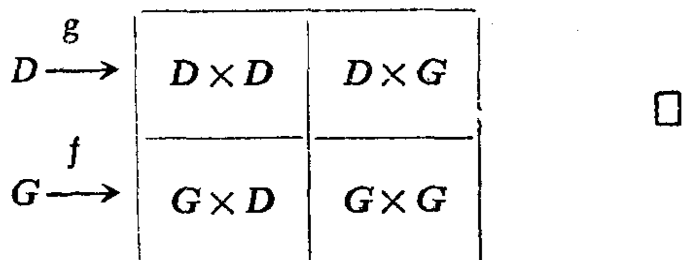
(4.30) **推论** 如果$\mathfrak{a}$是任意一个无限基数，$\mathfrak{b}$是适合$\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}$的任意一个基数，则$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$.

证 既然$\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}$，便有$\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$. □

(4.31) **定理** 如果$\mathfrak{a}$是任意一个无限基数，则$\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}\mathfrak{a}=$

$\mathfrak{a}$.

证 设A是合于$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$的任意一个集. 命$\mathfrak{F}$表示适合$\mathrm{dom}f\subset A$及$\mathrm{rng}f=(\mathrm{dom}f)\times(\mathrm{dom}f)$的1-1函数$f$全体所成的集. 由于$A$含有一个可数无限子集(4.15), 而$(\mathrm{card}N)(\mathrm{card}N)=\mathrm{card}N$(4.18), 可见$\mathfrak{F}\neq\varnothing$. 如(4.29)那样, 我们利用Hausdorff极大性原理来证明$\mathfrak{F}$含有一个极大元g.命$D=\mathrm{dom}g$.那么g的存在性表明$D\sim D\times D$. 为了完成定理的证明, 只须证$\overline{\overline{D}}=\mathfrak{a}$, 命$E=A\cap D'$, $\mathfrak{d}=\overline{\overline{D}}$. 如果$\overline{\overline{E}}\leqslant\mathfrak{d}$, 那么(4.30)表明$\mathfrak{d}=\mathfrak{d}+\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{D\cup E}}=\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$. 仅有的另一可能是$\mathfrak{d}<\overline{\overline{E}}$(4.8). 假如这样,则有一个集$G\subset E$, 适合$\overline{\overline{G}}=\mathfrak{d}$. 既然$D\sim D\times D$,可知$\mathfrak{d}^2=\mathfrak{d}$. 于是$\overline{\overline{D\times G}}=\overline{\overline{G\times D}}=\overline{\overline{G\times G}}=\mathfrak{d}$. 由(4.29)看出$\mathfrak{d}=\mathfrak{d}+\mathfrak{d}+\mathfrak{d}$. 由此可见, $\overline{\overline{(D\times G)\cup(G\times D)\cup(G\times G)}}=\mathfrak{d}=\overline{\overline{G}}$.从而存在$G$到$(D\times G)\cup(G\times D)\cup(G\times G)$上的一个1-1函数. 定义$h=f\cup g$, 那么$h$是$D\cup G$与$(D\cup G)\times(D\cup G)$之间的一个1-1对应.于是得到$h\in\mathfrak{F}$. 由于$g\subsetneqq h$, 这便与$g$的极大性矛盾. 从而$\overline{\overline{E}}\leqslant\mathfrak{d}$, 且$\mathfrak{d}=\mathfrak{a}$. 附图或许有助于理解证明.



□

(4.32) **推论** 如果$\mathfrak{a}$是一个无限基数, $\mathfrak{b}$是适合$0<\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}$的一个基数, 则$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$.

证 我们有$\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$. □

(4.33) **习题** 试证: 在集N上本节所说的基数次序关系及算术运算, 与正整数的普通次序关系及算术运算是一致的.

(4.34) **习题** 设$\mathfrak{a}$是适合$2\leqslant\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{c}$的任意一个基数. 试证: $\mathfrak{a}^{\mathrm{card}N}=\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$.

(4.35) **习题** 设A是任意一个无限集，$\mathscr{F}$是A的有限子集全体所成的族. 试证：$\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\overline{\overline{A}}$.

(4.36) **习题** 设A是适合$\overline{\overline{A}}\leqslant \mathfrak{c}$的任意一个无限集，命$\mathscr{C}$表示$A$的可数子集全体所成的族，试证：$\overline{\overline{\mathscr{C}}}=\mathfrak{c}$.

(4.37) **习题** 设W是一个集，假定$\varphi\subset W\times W$是一个关系，而(W,φ)和(W,φ^{-1})都是良序集. 试证：W是有限集.

(4.38) **习题** 试不用选择公理或其等价命题，证明：$\mathfrak{c}^2=\mathfrak{c}$.（提示：利用实数的小数表示.）

(4.39) **习题** （König）设I是一个非空集，$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$和$\{B_\iota\}_{\iota\in I}$是两个集族，而对于每个$\iota\in I$，有$\overline{\overline{A}}_\iota<\overline{\overline{B}}_\iota$. 命$A=\bigcup\limits_{\iota\in I}A_\iota$，$B=\bigtimes\limits_{\iota\in I}B_\iota$. 试证：$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.〔对于每个$\iota\in I$，命$\pi_\iota$表示$B$到$B_\iota$上的射影映射，也就是说，对于每个$b\in B$，有$\pi_\iota(b)=b_\iota$. 设$f$是$A$到$B$内的任意一个映射. 那么$\pi_\iota\circ f(A_\iota)\neq B_\iota$(4.20)，因之对于每个$\iota\in I$，存在$c_\iota\in B_\iota\cap[\pi_\iota\circ f(A_\iota)]'$. 由此可见，有$c_\iota$作为其第$\iota$个坐标的元素$c\in B$并不在$\mathrm{rng}f$中，于是不存在$A$到$B$上的映射.〕

以下我们简单介绍一下序数理论. 基数与序数之间的主要区别是，每个集都有基数，而只有良序集才有序数. 有许多本质上不同的方式可将已知集良序化. 虽然这个集仅有一个基数，但是这些方式的每一个却有它自己的序数. 比如说，我们可按照以下两个方式良序化N：

$$1<2<3<\cdots,$$
$$2<3<4<\cdots<1.$$

第一个是普通次序关系，第二个除去1从开头移到了末尾以外，与第一个完全相同. 这两个良序关系是不同的，因为第二个有末元素，而第一个却没有末元素. 为了更深入的研究，我们需要一些精确定义.

(4.40) **定义** 设A，B是两个线性有序集. A到B上的**序同**

构是指A到B上的一个1-1函数f，它满足：如果在A中$x\leqslant y$，那么在B中必有$f(x)\leqslant f(y)$．记号$A\approx B$指的是存在这样一个序同构．容易看出，关系$\approx$是自反的、对称的和传递的，对于每个线性有序集A，我们予以一个记号，叫做**A的序型**，使得两个线性有序集A，B附有同一记号当且仅当$A\approx B$．如果$A\approx B$，我们就说A和B是**序同构的**或者说**具有相同序型**．记号$\mathrm{ord}A$表示A的序型．特别说来，如果A是良序集，我们就称$\mathrm{ord}A$为一个**序数**．

(4.41) **例** 设$\{1,2,\cdots,n\}$ $(n\in N)$，N和Q都有其普通次序关系．记$\mathrm{ord}\varnothing=0$，$\mathrm{ord}\{1,2,\cdots,n\}=n$，$\mathrm{ord}Q=\eta$，$\mathrm{ord}N=\omega$．这样，$0,n,\omega$都是序数，但$\eta$并不是一个序数，因为$Q$根本不是良序集．

(4.42) **定义** 设A是一个线性有序集，$x\in A$．**由x决定的A的初始段**是指集$A_x=\{y\in A:y<x\}$．设α，β是两个序数，A，B是适合$\mathrm{ord}A=\alpha$及$\mathrm{ord}B=\beta$的两个良序集．记号$\alpha<\beta$指的是存在一个$x\in B$，使$A\approx B_x$．记号$\alpha\leqslant\beta$表示不是$\alpha<\beta$，便是$\alpha=\beta$．容易证明，这个序数次序关系的定义与集A和B的取法无关，而仅依赖于它们的序型．

我们来研究这个序关系的一些性质．

(4.43) **定理** 如果A是一个良序集，f是A到A内的一个序同构，则对于每个$x\in A$，都有$x\leqslant f(x)$．

证 假定A中有一个适合$f(x)<x$的x，又设a是这种x的最小者．则$f(a)<a$，所以$f(f(a))<f(a)$．但这与a的极小性相矛盾．□

(4.44) **定理** 设A，B是两个良序集．则：

(i) A不能和它的初始段序同构；

(ii) 对于某两个$x,y\in A$，如果$A_x\approx A_y$，那么$x=y$；

(iii) 如果$A\approx B$，那么存在唯一的A到B上的序同构．

证 假定有一个$x\in A$，并且有一个A到A_x上的序同构f．根据(4.43)便有$x\leqslant f(x)$．但另一方面$f(x)\in A_x$，所以又有

$f(x)<x$. 这个矛盾证明了(i).

其次设对于某两个$x,y\in A$，有$A_x\approx A_y$. 假定$x\neq y$. 不妨设$x<y$. 那么A_x是良序集A_y的初始段. 由(i)这是不可能的，所以(ii)成立.

设f，g是A到B上的两个序同构，那么$h=f^{-1}\circ g$是A到A上的一个序同构. 利用(4.43)，对于每个$x\in A$，$x\leqslant h(x)$，也就是说，对于每个$x\in A$，$f(x)\leqslant g(x)$. 在上述论证中，互换f和g，又得到对于每个$x\in A$，$g(x)\leqslant f(x)$. 由此可见，对于每个$x\in A$，必有$f(x)=g(x)$，即$f=g$. □

(4.45) 定理 设α，β是两个序数. 则下列三式恰有一个成立：$\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$，$\beta<\alpha$.

证 定理(4.44)表明，这些式子至多有一个成立，我们来证明至少有一个必成立.

设A，B是适合$\operatorname{ord}A=\alpha$及$\operatorname{ord}B=\beta$的两个良序集. 命$\mathfrak{F}$表示适合以下条件的一切映射$f$所成的族：$f$是$A$的一个初始段或$A$本身到$B$的一个初始段上或$B$本身上的序同构（显然不妨设$A\neq\varnothing\neq B$）. 如果$a$是$A$的最小元素，$b$是$B$的最小元素，那么$\{(a,b)\}\in\mathfrak{F}$，从而$\mathfrak{F}\neq\varnothing$. 根据Hausdorff极大性原理，存在一个极大链$\mathfrak{C}\subset\mathfrak{F}$.（其实$\mathfrak{C}=\mathfrak{F}$，但是我们并不需要这个结论.）命$h=\bigcup\mathfrak{C}$. 容易验证$h$属于$\mathfrak{F}$. 如果$\operatorname{dom}h$和$\operatorname{rng}h$分别是$A$和$B$的初始段$A_x$和$B_y$，那么$h\cup\{(x,y)\}$就可以附加到$\mathfrak{C}$上，这与$\mathfrak{C}$的极大性相违背. 于是我们或有$\operatorname{dom}h=A$，或有$\operatorname{rng}h=B$. 如果$\operatorname{dom}h=A$，那么或者$\operatorname{rng}h=B$（即$\alpha=\beta$），或者$\operatorname{rng}h$是$B$的一个初始段（即$\alpha<\beta$）；如果$\operatorname{dom}h\neq A$，则$\operatorname{dom}h$是$A$的一个初始段，而$\operatorname{rng}h=B$，从而在这种情况下，$h^{-1}$的存在性证明了$\beta<\alpha$. □

(4.46) 推论 如果序关系由(4.42)所定义，则序数所成的任意一个集都是线性有序集.

(4.47) 定理 设α是任意一个大于零的序数，命P_α表示小于α的序数全体所成的集，则按照(4.42)的序关系，P_α成为一个良

序集，并且$\mathrm{ord}P_\alpha=\alpha$.

证 设$\beta\in P_\alpha$，A,B是适合$\mathrm{ord}A=\alpha$及$\mathrm{ord}B=\beta$的两个良序集. 由于$\beta<\alpha$，就必有一个$x\in A$，使$A_x\approx B$. 根据(4.44.ii)，这个x是由β所唯一确定的. 因此定义$\varphi(\beta)=x$. 读者应不难验证，上式定义了P_α到A上的一个序同构φ. 所以P_α是良序集，并且$\mathrm{ord}P_\alpha=\mathrm{ord}A=\alpha$. □

(4.48) 定理 设$\mathfrak{a}$是一个基数. 则存在一个序数α，使$\overline{\overline{P_\alpha}}=\mathfrak{a}$.

证 设A是适合$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$的任意一个集. 根据良序定理(3.11)，有一个$A$上的良序关系，使$A$成为一个良序集. 命$\alpha=\mathrm{ord}A$. 则由定理(4.47)，得$A\approx P_\alpha$. 从而$A\sim P_\alpha$，并且$\overline{\overline{P_\alpha}}=\overline{\overline{A}}=\mathfrak{a}$. □

(4.49) 定理 有一个使P_Ω是不可数的最小序数Ω. 集P_Ω具有下列性质：

(i) P_Ω是良序集；

(ii) 如果$\alpha\in P_\Omega$，则P_α可数；

(iii) P_Ω不可数；

(iv)如果$C\subset P_\Omega$，并且C可数，则对于每个$\alpha\in C$，存在一个$\beta\in P_\Omega$，使$\alpha\leqslant\beta$.

证 选取一个序数γ，使$\overline{\overline{P_\gamma}}=\mathfrak{c}$. 如果$P_\gamma$的每个元仅有可数个前趋元素，则命$\Omega=\gamma$. 要不然$P_\gamma$的某些元便有不可数个前趋元素，那么，命$\Omega$是其最小者(4.47). 由(4.47)立即得到结论(i). 由Ω的定义则得到结论(ii)和(iii). 设C是P_Ω的一个可数子集. 命$D=\cup\{P_\alpha:\alpha\in C\}$. 则$D$是可数集的可数并，因而$D$也可数(4.21). 设$\beta\in P_\Omega\cap D'$. 显然对于每个$\alpha\in C$及不同的$\beta\in D$，有$\alpha\leqslant\beta$. 这便证明了(iv). □

(4.50) 评注 集P_Ω的基数用ω_1表示. **连续统假设断言**：$\omega_1=\mathfrak{c}$. 这等价于断言：R的每个无限子集或可数或具有基数$\mathfrak{c}$. 借助于这个假设，业已证明许多引人注目的重要定理. P.J.Cohen近来证明了〔见(3.2)中所引文献〕连续统假设与集论的Zermelo-

-Fraenkel公理系是独立的.

(4.51) **习题** 试证：由基数所成的每个非空集有最小元.

(4.52) **习题** 设A是一个无限线性有序集. 假定A的任何无限子集都没有最大元素. 试证：$\mathrm{ord}A=\omega$.（忆及$\omega=\mathrm{ord}\mathrm{N}$.）

(4.53) **习题** 设A是适合下列条件的线性有序集：

(i) A是可数无限集；

(ii) A没有首元素或末元素；

(iii) 如果$x,y\in A$及$x<y$，那么必有一个$z\in A$，适合$x<z<y$. 试证：$\mathrm{ord}A=\eta$.（忆及$\eta=\mathrm{ord}Q$.）

(4.54) **习题** 试证：有不可数个不同方式可以把集N良序化，使得这些不同良序集中任意两个都不是序同构的.

(4.55) **习题** 设A是任意一个无限集. 试证：A可以被良序化，使得没有末元素. 然后证明有一个A的良序关系，使得存在末元素.

(4.56) **习题** 集A的一个**置换**，是指A到A上的任意一个1-1映射. 设A是适合$\overline{\overline{A}}>1$的一个集.

(a) 试证：存在A的一个置换f，使对于任意$x\in A$，都有$f(x)\neq x$.

(b) 试证：如果$\overline{\overline{A}}$是一个偶数，或者$\overline{\overline{A}}$是无限基数，那么可以选择(a)中的置换f，使对于任意$x\in A$，都有$f\circ f(x)=x$. 如果$\overline{\overline{A}}$是一个奇数，试问会有什么结论？

(c) 试证：总可选择(a)中的置换f，使对于任意$x\in A$，成立$f\circ f\circ f\circ f\circ f\circ f(x)=x$.

(4.57) **习题** 设B是一个集，$\mathfrak{b}=\overline{\overline{B}}$，并设

$$\mathfrak{b}\,!=\overline{\overline{\{f:f\text{是}B\text{的一个置换}\}}}.$$

试证：如果B是无限集，则$\mathfrak{b}\,!=2^{\mathfrak{b}}$.

以下我们证明一个定理，据此，可以定义任意向量空间的代数维数.

(4.58) **定理** 设X是域F上的一个向量空间，A，B是F上

X的任意两个Hamel基. 则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证 我们先利用Zorn引理构造A到B内的一个1-1函数. 为此, 命$\mathfrak{F}$表示满足下列条件的1-1函数f全体所成的集:

(1) $\mathrm{dom}f\subset A$;

(2) $\mathrm{rng}f\subset B$;

(3) 在F上$(\mathrm{rng}f)\cup[A\cap(\mathrm{dom}f)']$线性无关.

A是线性无关的这一事实表明, 空函数$\varnothing$是$\mathfrak{F}$的一个元素. 因此$\mathfrak{F}\neq\varnothing$. 用包含关系半序化$\mathfrak{F}$. 为了证明Zorn引理适用于$\mathfrak{F}$, 命$\mathfrak{C}$是含于$\mathfrak{F}$中的任意一个非空链, 并设$g=\cup\mathfrak{C}$. 由(2.19)推知$g$是一个函数, 且对于函数$g$, (1)和(2)成立. 容易看出$g$是1-1的. 我们有

$$(\mathrm{rng}\ g)\cup[A\cap(\mathrm{dom}\ g)']$$
$$=\Big(\bigcup_{f\in\mathfrak{C}}\mathrm{rng}f\Big)\cup\Big[A\cap\Big(\bigcup_{f\in\mathfrak{C}}\mathrm{dom}f\Big)'\Big]. \qquad (4)$$

其次命F是集(4)的任意一个有限子集. 因为$\{\mathrm{rng}f: f\in\mathfrak{C}\}$是包含关系下的一个链, 所以必存在一个函数$f_0\in\mathfrak{C}$, 适合

$$F\subset(\mathrm{rng}f_0)\cup\Big[A\cap\Big(\bigcup_{f\in\mathfrak{C}}\mathrm{dom}\,f\Big)'\Big]$$
$$\subset(\mathrm{rng}\ f_0)\cup[A\cap(\mathrm{dom}\ f_0)'].$$

因此F线性无关, 从而g满足条件(3). 于是g在$\mathfrak{F}$中, 且g是$\mathfrak{C}$的一个上界. 根据Zorn引理, $\mathfrak{F}$有一个极大元, 记作h.

我们断言$\mathrm{dom}h=A$. 假若$\mathrm{dom}h\neq A$, 命$a_0\in A\cap(\mathrm{dom}h)'$. 根据(3), a_0不是$\mathrm{rng}h$的元素的线性组合, 由于a_0是B的元素的线性组合, 可见$\mathrm{rng}h\neq B$. 命b_0是$B\cap(\mathrm{rng}h)'$的任意一个元素. 如果集

$$\{b_0\}\cup(\mathrm{rng}\ h)\cup[A\cap(\mathrm{dom}\ h)']$$

线性无关, 那么函数$h\cup\{(a_0, b_0)\}$显然在$\mathfrak{F}$中, 这与h的极大性相矛盾, 可见b_0是集$(\mathrm{rng}h)\cup[A\cap(\mathrm{dom}h)']$的元素的线性组合;

记

$$b_0=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

既然B线性无关，b_0就不是$\mathrm{rng}h$的元素的线性组合. 所以存在一个k，使$x_k \in A \cap (\mathrm{dom}h)'$，并且$a_k \neq 0$. 于是$b_0$不是线性无关集$(\mathrm{rng}h) \cup [A \cap (\{x_k\} \cup \mathrm{dom}h)']$的元素的线性组合，因而函数$h \cup \{(x_k, b_0)\}$是$\mathfrak{Z}$的一个元素. 这与$h$的极大性相矛盾. 可见$\mathrm{dom}h = A$，并且$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.

在上述论证中，互换A和B，又得到$\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$. 根据Schröder-Bernstein定理（4.7），便完成了证明. □

(4.59) 定义 设X是域F上的一个向量空间. 当$X=\{0\}$时，定义X**的代数维数（或线性维数）**为0；当$X \neq \{0\}$时，则定义X的代数维数为F上X的任意一个Hamel基的基数.

(4.60) 习题 设X是域F上的一个向量空间，B是这个空间的一个Hamel基. 试证：

（a） 如果B是无限集，那么$\overline{\overline{X}} = \max\{\overline{\overline{B}}, \overline{\overline{F}}\}$；

（b） 如果B是有限集，那么$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{F}}^{\overline{\overline{B}}}$.

(4.61) 习题 不利用连续统假设，试求出域Q上向量空间R的代数维数.

(4.62) 习题（M.Hewitt推荐） 设A是一个非空集. 假如有一个A的子集族$\mathscr{S}$，具有下列性质：

(i) 对于一切$B \in \mathscr{S}$，$\overline{\overline{B}} = 3$；

(ii) $\cup \mathscr{S} = A$；

(iii) 对于互异的B_1，$B_2 \in \mathscr{S}$，$\overline{\overline{B_1 \cap B_2}} = 1$；

(iv) 如果$x, y \in A$，$x \neq y$，那么存在唯一的$B \in \mathscr{S}$，它包含$\{x, y\}$.

试证：存在这样一个$\mathscr{S}$的充要条件是$\overline{\overline{A}} = 3$，或$\overline{\overline{A}} = 7$.

§5 实数域和复数域的构造

本节在假定有理数为已知的情况下，给出实数与复数的简短而相当精湛的构造．由于初等分析以实数域的完备性为基础，研究实数域的构造看来是可取的．此外，因为代数与现代分析之间存在着强烈的相互影响，所以我们将代数概念和代数方法应用于分析学，就是很必要的了．以下先讲述有关群和一些别的代数结构的几个事实．

(5.1) **定义** 设G是一个集．如果G具有把$G\times G$映入G的二元运算$(x,y)\to xy$，并且满足下列三个条件，那么G叫做一个**群**：

(i) 对于任意$x,y,z\in G$，有$x(yz)=(xy)z$（**结合律**）；

(ii) 存在一个元素$e\in G$，它具有性质：对于一切$x\in G$，有$ex=x$（e是一个**左单位元**）；

(iii) 对于(ii)中的一切e及一切$a\in G$，存在$a^{-1}\in G$，它具有性质$a^{-1}a=e$（a^{-1}是a的一个**左逆元**）．

如果又有

(iv) 对于任意$a,b\in G$，有$ab=ba$．

则G叫做一个**Abel群**〔根据挪威数学家N.H.Abel（1802—1829）的姓氏而命名〕．

(5.2) **评注** (a)每个左逆元也是右逆元．事实上，对于(ii)中的任意e，有

$$(a^{-1}a)a^{-1}=ea^{-1}=a^{-1}.$$

其次设b是a^{-1}的一个左逆元，也就是$ba^{-1}=e$，那么

$$b(a^{-1}aa^{-1})=ba^{-1}=e,$$
$$(ba^{-1})(aa^{-1})=e,$$
$$e(aa^{-1})=e,$$

根据(ii)便有

$$aa^{-1}=e.$$

注意，由最后的等式还可推出，a 是a^{-1}的一个左逆元.

(b)对于(ii)中的任意 e 和任意$a\in G$，有

$$ae=a(a^{-1}a)=(aa^{-1})a=ea=a,$$

可见e也是一个右单位元. 如果e_1，e_2满足(ii)，那么它们也都是右单位元，因此

$$e_1e_2=e_2\text{（}e_1\text{是一个左单位元），}$$

$$e_1e_2=e_1\text{（}e_2\text{是一个右单位元），}$$

从而$e_1=e_2$，也就是说，在G中有唯一的一个左单位元和右单位元.

(c)同样可推出，a^{-1}是唯一的.

(d)对于Abel群，我们往往用加号（+表示二元运算）；这时，用0表示单位元，$-a$表示a的逆元，而$a-b$表示$a+(-b)$.

(5.3) **定义** 考虑具有两个二元运算+及·（分别叫做加法及乘法）的一个集A，A对于加法运算作成（具有单位元0的）一个Abel群，并且对于任意a，b，$c\in A$，成立等式：

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)\text{（左分配律），}$$

$$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)\text{（右分配律），}$$

及

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\qquad\text{（乘法的结合律），}$$

则A叫做一个**环**. 如果对于一个环A中的任意a，b，都有$a\cdot b=b\cdot a$，则A叫做**交换环**. 如果对于任意$a\in A$，一个元$1\in A$满足$1\cdot a=a\cdot 1=a$，则1叫做**A的（双边）单位元**①.

设I是环A的一个非空子集，如果

（1） 对于任意$a,b\in I$，有$a-b\in I$；

（2） 对于任意$a\in I$及任意$x\in A$，有$x\cdot a\in I(a\cdot x\in I)$，

---

①原文为unit（单位），这里译为“单位元”. ——译者注

则 I 叫做一个**左(右)理想**. 如果 A 的一个子集 I 既是左理想又是右理想，则 I 叫做一个**双边理想**.

(5.4) **评注** (a)分配律等式中的记号固然是恰当的，但不简便. 今后我们将按照代数惯例来写——用 ab 表示 $a\cdot b$，用 $ab+cd$ 表示 $(a\cdot b)+(c\cdot d)$.

(b)对于环 A 中的任意 x，我们有 $xx=x(x+0)=xx+x0$，因此 $x0=0$. 同样 $0x=0$.

(c)显然，两个群或两个环可以是不同的实体，而且作为群或作为环仍是不能区分的. 形式上，我们说环 A 和环 A' 是**同构的**，是指存在一个把 A 映满 A' 的1-1映射 τ，并且对于任意 $a,b\in A$，都成立

$$\tau(a+b)=\tau(a)+\tau(b),$$
$$\tau(ab)=\tau(a)\tau(b)$$

映射 τ 则叫做一个**同构**或**同构映射**. 有关群也有类似定义. 把环(或群)映满自身的同构叫做**自同构**.

下面我们定义一个很重要的特殊类型的环.

(5.5) **定义** 设有一个环 F，如果 $F\cap\{0\}'$ 对于乘法作成一个Abel群，则 F 叫做一个**域**.

(5.6) **评注**

(a)由于一个群至少①含有一个元素，域的上述定义则表明 $1\neq 0$，并且一个域至少含有两个元素.

(b)恒等式(5.4.b)表明，为了得到对于乘法来说的一个群，F 中必须除去0才行.

(c)最简单的域是 $\{0,1\}$——具有模2的加法运算和乘法运算. 这个域的加法表和乘法表是

---

①“至少”二字是译者加上去的. ——译者注

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(d)当 p 是一个素数时，对于模 p 的加法运算和乘法运算，集 $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ 作成一个域. 所需的验证都很容易；我们来验证其中较难的一项，即每个非零元有一个乘法逆元. 如果 $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$，那么须证存在 $x \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$，满足

$$ax \equiv 1 \pmod{p}.$$

既然 p 是素数，a 和 p 的最大公因子便是1，可见有整数 x 和 y，$x \neq 0$，满足

$$1 = ax + py.$$

特别说来，有整数 x'，y'，满足

$$1 = ax' + py', \quad 1 \leqslant x' < p;$$

所以 $ax' \equiv 1 \pmod{p}$，并且 $x' \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$.

(e)如果 F 是任意一个域，那么元素 0，1，$1+1$，$\cdots$，$n1$，$\cdots$（这里 n 是任意正整数，而 $n1$ 的意思是很明白的）都是 F 的元. 如果对于某个正整数 n，$n1=0$，那么满足 $p1=0$ 的最小正整数 p 显然是一个素数. 这时就说 F 具有**特征** P；不然的话就说 F 具有**特征** 0. 具有特征 p 的域目前在初等分析中没有什么意思. 如果 F 具有特征 0，那么 F 有一个同构于有理数域的子域（子域的定义是显而易见的）. 我们总用符号 Q 来表示有理数域.

为了证明 F 含有（唯一的）一个 Q 的同构，我们来考察把 F 的一部分映满 Q 的一个映射 τ，看看为了成为一个同构，它须具备什么性质. 为了记法方便，我们忽略 F 和 Q 的零元以及 F 和 Q 的单位元的区别. 显然，$\tau(0)=0$，$\tau(1)=1$. 利用归纳法便得到对于任意 $n \in N$，$\tau(n1)=n$. 如果 τ 是一个同构，那么对于任意 $n \in N$，

也必定有 $\tau((n1)^{-1})=\frac{1}{n}$ 及 $\tau(-(n1))=-n$. 由此可见，对于任意 m, $n\in N$, 必定成立

$$\tau((m1)(n1)^{-1})=\frac{m}{n}$$

及

$$\tau((-(m1))(n1)^{-1})=-\frac{m}{n}.$$

容易证明这样构造的映射 τ 是把 F 的一个子域映满域 Q 的一个同构.

(f)设 G 是任意一个群. 对于 A, $B\subset G$, 定义

$$AB=\{xy: x\in A, y\in B\},$$
$$A^{-1}=\{x^{-1}: x\in A\},$$
$$A^2=AA.$$

如果是加法，这些集就记作 $A+B$, $-A$, $2A$. 集 A^n (其中 n 是正整数；如果是加法，就是集 nA)的定义是很明白的.

(g)对于一个域的非零元素 b, 往往把乘法逆元 b^{-1} 写成 $\frac{1}{b}$; 对于域的元素 a, 则往往把 ab^{-1} 写成 $\frac{a}{b}$.

(5.7) **定义** 设 F 是一个域，如果存在 F 的一个子集 P, 满足以下三个条件，就说 F 是**有序的**:

(i) $P\cap(-P)=\varnothing$;

(ii) $P\cup\{0\}\cup(-P)=F$;

(iii) 由 $a,b\in P$ 可推出 $a+b\in P$, $ab\in P$.

如果把 F 看作是有理数或实数，那么 P 正是正有理数集或正实数集. 根据这一点，在一般情况下，P 的元素就叫做**正的**; $-P$ 的元素则叫做**负的**. 因为 $0=-0$, 所以 0 不会是 P 的一个元素.

(5.8) **定理** 设 F 是一个有序域，P 如(5.7)所设. 如果 $a\in F$, $a\neq 0$, 则 $a^2\in P$. 特别说来，$1\in P$. 如果 $a,b\in F$, $ab\in P$,

$a\in P$，则也有$b\in P$.

证 如果$a\in P$,那么由(5.7.iii)，得到$a^2\in P$.如果$a\notin P,a\neq 0$，那么由(5.7.ii)，得到$a\in -P$，也就是说，$-a\in P$.再由(5.7iii)，便得$(-a)^2\in P$. 在任意一个环中，等式$(-a)(-b)=ab$恒成立，因此$a^2=(-a)^2\in P$. 既然$1^2=1$，第二个断言便成立. 为了证明第三个断言，假定$b\notin P$. 如果$b=0$，那么$ab=0\notin P$，与题设矛盾. 如果$b\in -P$，那么$-b\in P$，并且

$$a(-b)=-(ab)\in P;$$

因此有$ab\in -P$，又与题设矛盾. 所以$b\in P$. □

(5.9) **定理** 任意有序域F都含有Q的一个同构，而且这一同构可当作是保序的.

证 既然$1\in P$，由(5.7.iii)可推知对于一切$n\in N$，$n1\in P$. 由此推出F具有特征0，因而可以构造(5.6.e)中的同构τ. 容易验证τ保序. □

(5.10) **定义** 设F是一个有序域，当$b-a\in P$时，我们就写成$a<b$或$b>a$；表达式$a\leqslant b$或$b\geqslant a$的意思是很明白的.

(5.11) **定理** 设F是一个有序域. 则对于任意a，$b\in F$，我们有$a<b$或$a=b$或$a>b$，并且这些关系仅有一个成立.

证 由P的定义和以下事实，立即得证：

$$b-a=0 \quad \text{当且仅当} \quad b=a,$$
$$b-a\in P \quad \text{当且仅当} \quad b>a,$$
$$a-b\in P \quad \text{当且仅当} \quad a>b. \ \square$$

有关不等式关系的许多基本事实，是序公理(5.7)的推论. 下面列出几个.

(5.12) **定理** 如果F是一个有序域，$a,b,c,d\in F$，又$a<b$，$c\leqslant d$，则$a+c<b+d$.

证明留给读者.

(5.13) **定理** 如果F是一个有序域，$a,b,c\in F$，又$a<b$，$c>0$($c<0$)，则$ac<bc$($ac>bc$).

证 如果 $a<b$，那么 $b-a\in P$，因此当 $c>0$ 时，便有 $c(b-a)\in P$ 及 $cb>ca$，当 $c<0$ 时，便有 $-c\in P$，从而 $(-c)(b-a)\in P$；所以 $ac-bc\in P$，也就是 $ac>bc$. □

(5.14) 定理 在一个有序域 F 中，由不等式 $0<a<b$ 可推出 $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

证 由于 $b\frac{1}{b}=1\in P$ 及 $b\in P$，由(5.8)可推知 $\frac{1}{b}\in P$. 所以 $\frac{1}{b}$，$\frac{1}{a}$，$b-a$ 都在 P 中，由此可见

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\frac{1}{b}(b-a)\in P,$$

从而

$$0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}. \qquad \square$$

(5.15) 定义 设 a 是有序域 F 的一个元素，规定

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

(5.16) 定理 对于有序域 F 中的任意元素 a，b，都成立：

(i) $|a|=|-a|$；

(ii) $|ab|=|a|\,|b|$；

(iii) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(iv) $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

证 由 $|a|$ 的定义显然可推出结论(i)和(ii)，而由(iii)可得到(iv). 我们来证明(iii). 当 $a\geqslant 0$ 时，有 $|a|=a$；当 $a<0$ 时，则有 $|a|=-a>0$. 所以总有

$$a\leqslant|a|,$$
$$b\leqslant|b|,$$

从而由(5.10)推知

$$a+b \leqslant |a| + |b|.$$

因为$-a \leqslant |-a| = |a|$，所以又有

$$-(a+b) \leqslant |a| + |b|,$$

综合这两个不等式便得到(iii). □

(5.17) **定义** 设F是一个有序域，如果对于任意$a \in F$及任意$b \in P$，总存在一个正整数n，使得$nb > a$，就说F是 **Archimedes 有序的**. 这个定义的直观含义是，不管a多么大，b多么小，把b一个一个地加起来，总能超过a. 非Archimedes有序的有序域是有的：见(5.39).

(5.18) **定理** 设F是一个Archimedes有序域，a，$b \in F$，并且$a < b$，则存在$\frac{m}{n} \in F$（这里m，n都是整数），适合$a < \frac{m}{n} < b$①.

证 既然$b-a > 0$，便有$(b-a)^{-1} > 0$；因此，由于F是Archimedes有序的，并且$1 > 0$，便存在一个整数n，满足

$$n1 > (b-a)^{-1} > 0.$$

利用(5.14)，得到

$$0 < (n1)^{-1} < b-a;$$

或写得明白些

$$\frac{1}{n}1 < b-a.$$

命n是满足最后不等式的任意一个整数，S是集

$$S = \left\{k : k\text{是整数且}k \cdot \frac{1}{n} > a\right\}.$$

既然$\frac{1}{n} > 0$，而F是Archimedes有序的，便有$S \neq \varnothing$. 同时，根据F的Archimedes有序性，又存在一个正整数p，满足

---

①式子$\frac{m}{n}$的真实含义是$\frac{m1}{n1} \in F$，考虑到(5.6.e)，不妨假定$F \supset Q$.

$$p\frac{1}{n}>-a,$$

$$-\left(p\frac{1}{n}\right)<a,$$

$$(-p)\frac{1}{n}<a.$$

可见$-p$，$-(p+1)$，$-(p+2)$，…都在S的外部．所以S是下有界的一个非空整数集，因此它必含有一个最小元素m．因为$m\in S$，所以$a<\frac{m}{n}$．

既然$m-1\notin S$，便得到$\frac{m-1}{n}\leqslant a$；从而

$$\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}\leqslant a+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b;$$

也就是

$$a<\frac{m}{n}<b. \quad \square$$

(5.19) **定义** 设F是一个有序域．并设(a_n)〔$=(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$〕是$F$的元素所成的序列．如果存在一个元素$b\in F$，使对于每个正整数$n$，有$|a_n|\leqslant b$，则$(a_n)$叫做**有界序列**．如果对于任意$e>0$（$e\in F$），总存在一个正整数$N(e)$，使得只要$p$，$q\geqslant N(e)$，就有$|a_p-a_q|<e$，则序列$(a_n)$叫做**Cauchy序列**①．如果对于任意$e>0$（$e\in F$），总存在一个正整数$N(e)$，使得只要$p\geqslant N(e)$，就有$|a_p|<e$，则序列$(a_n)$叫做**零序列**．满足上述三个条件的序列所成的三个族，分别用$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$，$\mathfrak{N}$表示．

(5.20) **定理** 包含关系$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{C}\subset\mathfrak{B}$成立．

---

①法国数学家A.L.Cauchy（1789—1857）在F是实数域情况下，首先考虑了这类序列．

证 设$(a_n)\in\mathfrak{C}$，那么只要$p, q\geqslant N(1)$，就有$|a_p-a_q|<1$. 特别说来

$$|a_{N(1)+k}-a_{N(1)}|<1 \qquad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

命$b=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}|+1\}$〔max的定义见(2.7)〕；那么$|a_p|\leqslant b(p=1, 2, \cdots)$，所以$(a_n)\in\mathfrak{B}$，即$\mathfrak{C}\subset\mathfrak{B}$.

设$(a_n)\in\mathfrak{N}$，那么对于任意给定的正的$e\in F$，只要$p, q\geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$，就有

$$|a_p-a_q|\leqslant|a_p|+|a_q|<\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e=e.$$

可见$(a_n)\in\mathfrak{C}$，所以$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{C}$. □

(5.21) **定理** 已知(a_n)，$(b_n)\in\mathfrak{C}$，设$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$，$(a_n)(b_n)=(a_nb_n)$。则对于和与积的这些定义来说，$\mathfrak{C}$作成一个有单位元的交换环，又$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{C}$中的一个理想，并且$\mathfrak{N}\subsetneqq\mathfrak{C}$.

证 我们先来证Cauchy序列的和与积还是Cauchy序列. 设已知(a_n)，$(b_n)\in\mathfrak{C}$. 对于一个正的$e\in F$，命$N(e)$和$M(e)$分别是与Cauchy序列(a_n)和(b_n)有关的正整数. 当$p, q\geqslant\max\left\{N\left(\frac{e}{2}\right), M\left(\frac{e}{2}\right)\right\}$时，便得到$|a_p+b_p-(a_q+b_q)|\leqslant|a_p-a_q|+|b_p-b_q|<\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e=e$. 可见$(a_n)+(b_n)$是Cauchy序列.

既然$\mathfrak{C}\subset\mathfrak{B}$，便存在$F$的正元素$c$和$d$，使得

$$|a_p|\leqslant c(p=1, 2, 3, \cdots);$$
$$|b_p|\leqslant d(p=1, 2, 3, \cdots).$$

当$p, q\geqslant\max\left\{N\left(\frac{e}{2d}\right), M\left(\frac{e}{2c}\right)\right\}$时，便得到

$$\begin{aligned}|a_pb_p-a_qb_q|&=|a_pb_p-a_pb_q+a_pb_q-a_qb_q|\\&\leqslant|a_p|\ |b_p-b_q|+|b_q|\ |a_p-a_q|\end{aligned}$$

$$<\frac{ce}{2c}+\frac{de}{2d}=e.$$

可见$(a_n)(b_n)$也是Cauchy序列.

现在，$\mathfrak{C}$显然是一个加法Abel群($(0, 0, \cdots)$是它的零元). $\mathfrak{C}$中的乘法很明显也是可交换的，并且$\mathfrak{C}$有乘法单位元$(1, 1, \cdots)$. 根据F的分配律马上可推出$\mathfrak{C}$的分配律. 于是我们证明了$\mathfrak{C}$是一个有单位元的交换环.

现在要证$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{C}$的一个真理想. 如果(a_n), $(b_n)\in\mathfrak{N}$，那么显然$(a_n)-(b_n)\in\mathfrak{N}$；因此$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{C}$的一个加法子群. 如果$(a_n)\in\mathfrak{N}$, $(b_n)\in\mathfrak{C}$，那么须证$(a_nb_n)\in\mathfrak{N}$. 设c是F的一个正元素，满足

$$|b_n|\leqslant c,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

对于给定的正的$e\in F$，存在一个正整数$N\left(\frac{e}{c}\right)$，使得只要$p\geqslant N\left(\frac{e}{c}\right)$，就有

$$|a_p|<\frac{e}{c}.$$

所以只要$p\geqslant N\left(\frac{e}{c}\right)$，就有

$$|a_pb_p|\leqslant|a_p|\ c<\frac{e}{c}c=e,$$

从而$(a_nb_n)\in\mathfrak{N}$. 这样我们便证明了$\mathfrak{N}$是一个理想. 既然$(1, 1, 1, \cdots)\in\mathfrak{C}\cap\mathfrak{N}'$，$\mathfrak{N}$乃是一个真理想. □

应当注意的是，$\mathfrak{C}$并不是一个域：例如$(0, 1, 0, 0, \cdots)$在$\mathfrak{C}$中就没有乘法逆元.

(5.22) **定理** 命$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$表示一个集，它的元素是集$(a_n)+\mathfrak{N}$(叫做$\mathfrak{N}$的陪集)，其中$(a_n)\in\mathfrak{C}$. 设$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$中的加法和乘法规定为

$$((a_n)+\mathfrak{N})+((b_n)+\mathfrak{N})=(a_n)+(b_n)+\mathfrak{N}=(a_n+b_n)+\mathfrak{N},$$

及

$$((a_n)+\mathfrak{N})((b_n)+\mathfrak{N})=(a_n)(b_n)+\mathfrak{N}=(a_nb_n)+\mathfrak{N}.$$

那么这两个定义是非二义性的，并且对于这样定义的加法和乘法来说，$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$作成一个域.

证 因为$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{C}$的一个加法子群，所以任意两个陪集$(a_n)+\mathfrak{N}$及$(b_n)+\mathfrak{N}$或者不相交，或者恒同. 两个序列(a_n)，$(a_n')\in\mathfrak{C}$属于同一个陪集的充要条件是对于某个$(c_n)\in\mathfrak{N}$，有$(a_n')=(a_n)+(c_n)$. 如果(c_n)，$(d_n)\in\mathfrak{N}$，那么

$$\begin{aligned}&(((a_n)+(c_n))+\mathfrak{N})+(((b_n)+(d_n))+\mathfrak{N})\\&\quad=(a_n)+(b_n)+(c_n)+(d_n)+\mathfrak{N}\\&\quad=(a_n)+(b_n)+\mathfrak{N},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&(((a_n)+(c_n))+\mathfrak{N})(((b_n)+(d_n))+\mathfrak{N})\\&\quad=(a_n)(b_n)+(a_n)(d_n)+(c_n)(b_n)+(c_n)(d_n)+\mathfrak{N}\\&\quad=(a_n)(b_n)+\mathfrak{N}.\end{aligned}$$

这样一来，就非二义性地定义了陪集的加法和乘法. 容易验证$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$是一个有单位元的交换环. 比如说，$(1,1,1,\cdots)+\mathfrak{N}$就是$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$的单位元.

还需证明，$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$的任意非零元素都有一个乘法逆元.设$(a_n)+\mathfrak{N}\neq\mathfrak{N}$；即设$(a_n)\in\mathfrak{C}\cap\mathfrak{N}'$. 需求$(x_n)\in\mathfrak{C}$，使满足

$$(a_nx_n)+\mathfrak{N}=(1_{(n)})+\mathfrak{N};$$

或者说满足

$$(a_nx_n-1_{(n)})\in\mathfrak{N}.$$

因为(a_n)不是一个零序列，所以存在一个正的$e\in F$，使对于任意正整数r，有某个整数$s>r$，成立$|a_s|\geqslant e$. 当p，$q\geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$时，我们有

$$|a_p-a_q|<\frac{1}{2}e.$$

设 $s>N\left(\frac{1}{2}e\right)$适合 $|a_s|\geqslant e$；则当 $p\geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$时，有

$$e\leqslant|a_s|=|a_s-a_p+a_p|\leqslant|a_s-a_p|+|a_p|<\frac{1}{2}e+|a_p|.$$

由此

$$\text{当}p\geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)\text{时，}\quad |a_p|>\frac{1}{2}e.$$

现定义(x_n). 把$N\left(\frac{1}{2}e\right)$记作$m$，设

$$x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=1,$$

而

$$\text{当}p\geqslant m\text{时，}\quad x_p=\frac{1}{a_p}.$$

我们有

$$(x_na_n)=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{m-1},\ 1,\ 1,\ \cdots)$$

所以

$$(x_na_n-1_n)=(a_1-1,a_2-1,\cdots,a_{m-1}-1,0,0,\cdots).$$

于是，显而易见$(x_na_n-1_{(n)})\in\mathfrak{N}$. 为了完成证明,只要证$(x_n)\in\mathfrak{C}$

就够了. 当p，$q\geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$时，则得到

$$|x_p-x_q|=\left|\frac{1}{a_p}-\frac{1}{a_q}\right|=\left|\frac{1}{a_p}\right|\cdot\left|\frac{1}{a_q}\right||a_p-a_q|$$

$$\leqslant\frac{2}{e}\cdot\frac{2}{e}|a_p-a_q|.$$

而对于任意正的$d\in F$，显然由

$$p,\ q\geqslant\max\left\{N\left(\frac{1}{2}e\right),\ N\left(\frac{e^2d}{4}\right)\right\}$$

可推出

$$|x_p - x_q| < d.$$

所以$(x_n) \in \mathfrak{C}$. □

(5.23) **记号** 域$\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$记作$\overline{F}$. 在(5.23)—(5.30)中, $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$的元素$(a_n)+\mathfrak{N}$总用小写希腊字母$\alpha$, β, …表示. 如果$a \in F$, 那么$\overline{F}$的元素$(a_{(n)})+\mathfrak{N}$记作$\overline{a}$; 它是包含常序列(它的项全为a)的$\mathfrak{N}$的陪集.

(5.24) **定理** 在$\overline{F}$中命$\overline{P}=\{\alpha \in \overline{F}: \alpha \neq \overline{0}$, 且存在$(a_n) \in \alpha$, 使$a_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)$\}$. 对于这个集$\overline{P}$来说, $\overline{F}$乃是(5.7)意义下的一个有序域. 而映射$\tau: \tau(a)=\overline{a}$是把$F$映入$\overline{F}$的一个保序代数同构.

本定理的证明留给读者.

(5.25) **定义** 已知有序域F中的一个序列(a_n), 又$b \in F$, 如果对于F中任意正的e, 总存在正整数$L(e)$, 使当$n \geqslant L(e)$时, $|a_n - b| < e$, 就说(a_n)**的极限是**b, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \text{或} a_n \to b.$$

一个有序域F说是**完备的**, 是指F中的任意Cauchy序列在F中总有极限.

(5.26) **引理** 有极限的序列必定是Cauchy序列. 如果(a_n)是Cauchy序列, 并且$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ($1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$) 是有极限$b$的一个子序列, 则$(a_n)$也有极限$b$.

证 第一个断言是显然的事实. 为了证明第二个断言, 在F中取定$e>0$. 当$L\left(\frac{1}{2}e\right) \leqslant k$时, 则有$|a_{n_k} - b| < \frac{1}{2}e$. 既然$(a_n)$是Cauchy序列, 便得出

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{2}e \quad \left(p, q \geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)\right).$$

任取k, 使$k \geqslant L\left(\frac{1}{2}e\right)$, $n_k \geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$, 那么当

$q \geqslant N\left(\frac{1}{2}e\right)$时，便有

$$|a_q-b| \leqslant |a_q-a_{n_k}| + |a_{n_k}-b| < e. \quad \square$$

(5.27) **引理** 设$\alpha > \overline{0}$，$\alpha \in \overline{F}$，则存在$e \in F$，它适合$\overline{0} < \overline{e} < \alpha$. 如果$F$是Archimedes有序的，那么$\overline{F}$也是Archimedes有序的.

证 既然$\alpha > \overline{0}$，所以存在$(a_n) \in \alpha$，使$a_n > 0$（$n=1, 2, 3, \cdots$），并且$(a_n) \notin \mathfrak{N}$. 于是存在$d \in F$，使对于充分大的$s$，$a_s = |a_s| \geqslant d$. 当$p$，$q \geqslant N\left(\frac{1}{2}d\right)$时，有

$$|a_p-a_q| < \frac{1}{2}d.$$

选取如上述的s，使$s \geqslant N\left(\frac{1}{2}d\right)$；则得出

$$d \leqslant a_s = a_s - a_p + a_p \leqslant |a_s-a_p| + |a_p| < \frac{1}{2}d + a_p;$$

也就是，只要$p \geqslant N\left(\frac{1}{2}d\right)$，就有$\frac{1}{2}d < a_p$. 由此推得$\left(a_n - \frac{1}{2}d_{(n)}\right) + \mathfrak{N} = \alpha - \overline{\frac{1}{2}d} \geqslant \overline{0}$. 我们有

$$\alpha - \overline{\frac{1}{3}d} > \alpha - \overline{\frac{1}{2}d} \geqslant \overline{0},$$

从而得出

$$\alpha > \overline{\frac{1}{3}d}.$$

所以$e = \frac{1}{3}d$就满足定理第一个断言.

假定F是Archimedes有序的，并设α，$\beta \in \overline{F}$，使满足

$$\bar{0}<\alpha\leqslant\beta.$$

根据定理第一个断言，便存在正的 $e\in F$，使 $\bar{e}<\alpha$. 因为每个Cauchy序列都是有界的，所以存在 $d\in F$，它满足 $\beta<\bar{d}$. 如果 m 是适合 $me>d$ 的任意正整数，那么

$$m\alpha>m\bar{e}>\bar{d}>\beta;$$

因此有 $m\alpha>\beta$，从而 $\bar{F}$ 是Archimedes有序的. □

(5.28) **引理** 设 $\alpha\in\bar{F}$，$(a_n)\in\alpha$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\bar{a}_n=\alpha.$$

证 在 $\bar{F}$ 中任取 $\varepsilon>\bar{0}$，而在 F 中选取适合 $\bar{0}<\bar{e}<\varepsilon$ 的任意 $e>0$；根据(5.27)，这是办得到的. 我们得到

$$|a_p-a_q|<e\quad(p,\ q\geqslant N(e)).$$

现固定 $p\geqslant N(e)$. 当 $n\geqslant N(e)$ 时，得到

$$a_p-a_n<e,$$
$$a_n-a_p<e.$$

由此推出

$$\bar{a}_p-\alpha\leqslant\bar{e}<\varepsilon,$$

$$\alpha-\bar{a}_p\leqslant\bar{e}<\varepsilon;$$

也就是，

$$|\alpha-\bar{a}_p|<\varepsilon\qquad(p\geqslant N(e)).\quad□$$

下面叙述并证明有关 $\bar{F}$ 的主要结论.

(5.29) **定理** 域 $\bar{F}$ 是完备的.

证 设 (α_p) 是 $\bar{F}$ 中的任意一个Cauchy序列. 如果 (α_p) 的末段是常序列①，就无须证明了；要不然就存在一个子序列 $(\alpha_{p_l})_{l=1}^{\infty}$，而 $\alpha_{p_l}\neq\alpha_{p_{l+1}}$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$. 根据(5.26)可知，只要证明 $(\alpha_{p_l})_{l=1}^{\infty}$ 有极限就可以了. 不失一般性，我们假定 $(\alpha_p)_{p=1}^{\infty}$ 满足

①原文为“(α_p) 是**终归常序列**”. 这指的是存在某个 $p_0\in N$，及 $\beta\in\bar{F}$，使对于一切 $p\geqslant p_0$，$\alpha_p=\beta$. 参见下文(22.20). ——译者注

$\alpha_p \neq \alpha_{p+1}$ ($p=1, 2, 3, \cdots$). 记 $0 < |\alpha_p - \alpha_{p+1}| = \mu_p$.

对于 $\bar{F}$ 中的任意 $\varepsilon > \bar{0}$，总存在 $N(\varepsilon)$，使

$$|\alpha_p - \alpha_q| < \varepsilon \qquad (p, q \geqslant N(\varepsilon));$$

特别说来

$$\mu_p < \varepsilon \qquad (p \geqslant N(\varepsilon)).$$

利用(5.28)，取 $a_p \in F$，使 $|\bar{a}_p - \alpha_p| < \mu_p$ ($p=1, 2, 3, \cdots$). 然后在 F 中任取 $e > 0$. 当 $p, q \geqslant N\left(\frac{1}{3}\bar{e}\right)$ 时，就有

$$\begin{aligned}|\bar{a}_p - \bar{a}_q| &\leqslant |\bar{a}_p - \alpha_p| + |\alpha_p - \alpha_q| + |\alpha_q - \bar{a}_q| \\ &< \mu_p + \frac{1}{3}\bar{e} + \mu_q < \frac{1}{3}\bar{e} + \frac{1}{3}\bar{e} + \frac{1}{3}\bar{e} = \bar{e}.\end{aligned}$$

由于(5.24)的映射 τ 是一个保序同构，可见当 $p, q \geqslant N\left(\frac{1}{3}\bar{e}\right)$ 时，必有 $|a_p - a_q| < e$，也就是说，$(a_p) \in \mathfrak{C}$. 定义 β 为 $(a_p) + \mathfrak{N}$.

我们断言 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p = \beta$. 为了证实这一点，在 $\bar{F}$ 中任取正的 ε. 当 $p \geqslant N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 时，我们有 $|\bar{a}_p - \alpha_p| < \mu_p < \frac{1}{2}\varepsilon$. 同时，(5.28)表明，有一个正整数 $M\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$，使当 $p \geqslant M\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 时，有 $|\bar{a}_p - \beta| < \frac{1}{2}\varepsilon$. 所以当 $p \geqslant \max\left\{N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right), M\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right\}$ 时，

$$\begin{aligned}|\alpha_p - \beta| &\leqslant |\alpha_p - \bar{a}_p| + |\bar{a}_p - \beta| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

(5.30) **定理** 对于任意有序域 F，$\bar{\bar{F}}$ 同构于 $\bar{F}$；$\bar{F}$ 的每个Cauchy序列都与一常序列相差一个零序列.

证 设 (α_p) 是 $\bar{F}$ 的元素所成的一个Cauchy序列，命 $\beta = \lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p$(5.29). 那么 ($\alpha_p - \beta_p$) 便是一个零序列，定理得证. $\square$

(5.31) **定理** 在任意一个Archimedes有序域中，序列 $(2^{-p})_{p=1}^{\infty}$是零序列.

证 我们有$2^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}>p$，因此得$2^{-p}<\frac{1}{p}$.既然$\left(\frac{1}{p}\right)_{p=1}^{\infty}$是零序列，所以$(2^{-p})$也是零序列. □

(5.32) **定义** 设F是一个有序域，$\varnothing\subsetneqq A\subset F$. 设有一个元素$b\in F$，如果对于一切$x\in A$，都有$x\leqslant b$（$x\geqslant b$），就说$b$是$A$**的一个上（下）界**. 设$b$是$A$的一个上界，如果$b$小于$A$的所有其他上界，那么$b$叫做$A$的**最小上界**或**上确界**（记作$b=\sup A$），可类似定义$A$**的最大下界**或**下确界**，并记作$\inf A$①. 记号l.u.b.$A$和g.l.b.$A$有时用来表示$\sup A$和$\inf A$.

(5.33) **定理** 设F是一个完备Archimedes有序域，A是F的一个上（下）有界的非空子集. 则必存在$\sup A$（$\inf A$）.

证 设b是A的任意一个上界，$a\in A$. 那么必存在两个正整数M和$-m$，适合$M>b$及$-m>-a$，也就是说，适合$m<a\leqslant b<M$. 对于每个正整数p，命

$$S_p=\left\{k:k\text{是整数，且}\frac{k}{2^p}\text{是}A\text{的一个上界}\right\}.$$

如果$k\leqslant 2^p m$，那么k不在S_p中. 于是S_p下有界. 因为$2^pM\in S_p$，所以S_p非空. 可见S_p有一个最小元素，比如说是k_p. 定义$a_p=\frac{k_p}{2^p}$（$p=1,2,3,\cdots$）. 根据k_p的定义，$\frac{2k_p}{2^{p+1}}=\frac{k_p}{2^p}$是$A$的一个上界，而$\frac{2k_p-2}{2^{p+1}}=\frac{k_p-1}{2^p}$就不是$A$的上界. 因此我们或有

$$k_{p+1}=2k_p,\ \text{或有}k_{p+1}=2k_p-1,$$

从而有

---

①显然我们也可以在任意半序集中定义上确界（suprema）和下确界（infima）.

$$a_{p+1}=\frac{2k_p}{2^{p+1}}=a_p \quad 或 a_{p+1}=\frac{2k_p-1}{2^{p+1}}=a_p-\frac{1}{2^{p+1}},$$

因此得出

$$a_{p+1}\leqslant a_p \quad 及 a_p-a_{p+1}\leqslant\frac{1}{2^{p+1}} \quad (p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

如果$q>p\geqslant 1$，那么

$$\begin{aligned}0&\leqslant a_p-a_q=(a_p-a_{p+1})+(a_{p+1}-a_{p+2})+\cdots+(a_{q-1}-a_q)\\&\leqslant\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+2}}+\cdots+\frac{1}{2^q}=\frac{1}{2^{p+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-p-1}}\right)\\&=\frac{1}{2^{p+1}}\left(2-\frac{1}{2^{q-p-1}}\right)<\frac{1}{2^p}.\end{aligned}$$

于是只要$q>p\geqslant 1$，就有$|a_p-a_q|=a_p-a_q<\frac{1}{2^p}$. 根据(5.31)，我们推知$(a_p)$是Cauchy序列，所以$\lim\limits_{p\to\infty}a_p$必存在；命极限是$c$. 显然$a_p\geqslant c$.

我们断言$\sup A=c$. 为了证实这一点，先假定c不是A的一个上界. 那么便有$x\in A$，适合$x>c$，所以有一个正整数p，适合$a_p-c=|a_p-c|<x-c$；也就是说，$a_p<x$. 既然a_p是A的一个上界，最后的不等式不会成立. 因此c肯定是A的一个上界. 其次假定A有一个上界c'，它适合$c'<c$，选定一个正整数p，使$\frac{1}{2^p}<c-c'$. 则有$a_p-\frac{1}{2^p}\geqslant c-\frac{1}{2^p}>c+c'-c=c'$，因而$a_p-\frac{1}{2^p}$是$A$的一个上界. 可是根据定义，$a_p-\frac{1}{2^p}$等于$\frac{k_p-1}{2^p}$，而$\frac{k_p-1}{2^p}$并不是$A$的一个上界. 可见$c=\sup A$.

同样可证，如果A下有界，那么$\inf A$必存在；证明

$$\inf A=-\sup(-A)$$

也是可以的. □

(5.34) 定理 任意两个完备的Archimedes有序域F_1和F_2（分别有正元素集P_1和P_2）是代数同构的和序同构的，也就是说，存

在F_1到F_2上的一个1－1映射τ，使

$$\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y),$$
$$\tau(xy)=\tau(x)\tau(y),$$
$$\tau(x)\in P_2 \quad \text{当且仅当} \quad x\in P_1.$$

证 设1_1和1_2是F_1和F_2的单位元，而0_1和0_2是零元. 先在F_1的有理元素上定义映射τ〔参见(5.6.e)〕：于是：

$$\tau(1_1)=1_2;$$
$$\tau(0_1)=0_2;$$
$$\tau(m1_1)=m1_2, \quad \text{其中}m\text{是整数};$$
$$\tau\left(\frac{1}{n}1_1\right)=\frac{1}{n}1_2, \text{其中}n\text{是非零整数};$$
$$\tau\left(\frac{m}{n}1_1\right)=\frac{m}{n}1_2.$$

如果$x\in F_1$，而x不具有$\frac{m}{n}1_1$的形式，就定义

$$\tau(x)=\sup\left\{\frac{m}{n}1_2:\frac{m}{n}1_1<x\right\}.$$

那么τ具有要证的性质，这一证明留给读者. □

(5.35) **定义** 所谓**实数域**，指的是一个完备的Archimedes有序域（比如说，$\overline{Q}$）. 我们总用R表示实数域.

(5.36) **习题** 设F是任意一个有序域，已知a，$b\in F$，试证：

$$\max\{a, b\}=\frac{1}{2}(|a-b|+a+b).$$

$$\min\{a, b\}=\frac{1}{2}(-|a-b|+a+b).$$

(5.37) **习题** 设F是任意一个有序域，a，b，c是F的任意三个元素. 定义

mode$\{a, b, c\}$为$\min\{\max\{a, b\}, \max\{b,c\},\max\{a, c\}\}$
试用文字说明mode，并且以绝对值和域运算来表示它.

(5.38) **习题** 设F是任意一个有序域，D是F的一个子集，如果：

(i) $\varnothing \subsetneqq D \subsetneqq F$；

(ii) 关系$x \in D$及$y < x$蕴涵$y \in D$,

则D叫做一个F中的**Dedekind分划**.

(a) 设D是R中的一个Dedekind分划.试证：对于某个$a \in R$, $D = \{x \in R : x < a\}$，或者对于某个$a \in R$，$D = \{x \in R : x \leqslant a\}$.

(b) 如果F是非序同构于R的一个有序域,试证：F含有不是这两种形式的一个Dedekind分划.

(c) 对于域R，试利用(a)证明：每个正实数都有唯一的正k次方根（$k = 2, 3, 4, \cdots$）.

(5.39) **习题** 考虑有理系数单未定元t的有理函数全体所成的域，记作$Q(t)$. 这样，$Q(t)$的一般非零元素便具有形式$\frac{A(t)}{B(t)}$,

其中$A(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$，$B(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j t^j$. 数$a_k$，$b_j$在$Q$中，并且$a_n \neq 0$，$b_m \neq 0$. 按普通意义来定义加法和乘法. 用以下规则定义$Q(t)$中的次序：$\frac{A(t)}{B(t)}$在$P$中的充要条件是$a_n b_m$是正有理数. 试证：$Q(t)$是一个有序域，而次序是非Archimedes的. 再证明：任意非Archimedes有序域都含有一个代数同构并且序同构于$Q(t)$的子域. 试求$Q(t)$的完备化.

(5.40) **习题** 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是大于1的整数所成的任意一个序列. 试证：适合$0 \leqslant x < 1$的任意实数x都有形如

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

的展开式，其中每个$x_k \in \{0, 1, \cdots, a_k - 1\}$. 试求两个不同展开式表示同一个实数的充要条件.

下面我们来构造复数域——这比构造R要简单得多了.

(5.41) **定理** 考虑未定元t的实系数多项式$p(t)$[①]全体所成的环$R[t]$,按普通意义定义加法和乘法. 设$J=\{(t^2+1)p(t):p(t)\in R[t]\}$. 则$J$是$R[t]$中的一个理想. 命$R[t]/J$是陪集$p(t)+J$所成的集. 设$R[t]/J$中的加法和乘法定义为

$$(p(t)+J)+(q(t)+J)=(p(t)+q(t))+J$$

及

$$(p(t)+J)(q(t)+J)=(p(t)q(t))+J.$$

则这两个定义是非二义性的, 并且对于这样定义的加法和乘法来说, $R[t]/J$作成一个域.

证 J是$R[t]$中的一个理想是显然的事实. 正如(5.22)中的证明, 我们推知$R[t]/J$中的加法和乘法定义是非二义性的, 而且$R[t]/J$是有零元J和单位元$1+J$的交换环.

为了更严密地描述$R[t]/J$, 假定$(a+bt)+J=(a'+b't)+J$. 那么$[(a+bt)-(a'+b't)]\in J$, 从而对于某个$p(t)\in R[t]$, 有$(a-a')+(b-b')t=(t^2+1)p(t)$. 比较这两个多项式的同次幂, 得到$p(t)=0$, 并且$a=a'$, $b=b'$. 换句话说, 集$\{(a+bt)+J:(a,b)\in R\times R\}$的各个元素都是$R[t]/J$的互异元素. 每个$p(t)\in R[t]$都可写成

$$p(t)=(t^2+1)q(t)+r(t),$$

其中$q(t)\in R[t]$, $r(t)=a+bt$(这是初等代数事实, 证略). 这样, 陪集$p(t)+J$便等于$(t^2+1)q(t)+(a+bt)+J=(a+bt)+J$. 这就证明了$R[t]/J=\{a+bt+J:(a,b)\in R\times R\}$, 其中互异偶$(a,b)$得出$R[t]/J$的互异元素.

通过普通计算得到

$$((a+bt)+J)+((a'+b't)+J)$$
$$=((a+a')+(b+b')t)+J$$

及

---

① "$p(t)$"是译者加上去的. ——译者注

$$((a+bt)+J)((a'+b't)+J)$$
$$=((aa'-bb')+(ab'+a'b)t)+J.$$

当$(a+bt)+J\neq J$时，$a\neq 0$或$b\neq 0$．既然R是一个有序域，便有$a^2+b^2>0$，从而在R中$\frac{1}{a^2+b^2}$是存在的．显而易见

$$[(a+bt)+J]\left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}t\right)+J\right]=1+J.$$

这表明$R[t]/J$的任意非零元素都有一个乘法逆元，因此$R[t]/J$是一个域． □

(5.42) **定义** 域$R[t]/J$叫做**复数域**或**复数所成的域**，用符号K表示这个域．我们把陪集$(a+bt)+J$写成$a+bi$；$a+bi$叫做一个**复数**．数a叫做$a+bi$**的实部**，记作$\mathrm{Re}(a+bi)$．数b叫做$a+bi$**的虚部**，记作$\mathrm{Im}(a+bi)$．符号$z=x+iy$，$w=u+iv$，$\sigma+i\tau$，$\alpha+\beta i$等都用来表示复数．复数$a+0i$只写成a，$0+bi$只写成bi．设$z=x+iy\in K$，z**的绝对值**定义为$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$（非负平方根！），记作$|z|$．z**的复共轭**（或简称为**共轭**）定义为$x-iy$，记作$\bar{z}$．

(5.43) **定理** 域K不是有序域．

证 倘若在K中存在(5.7)所说的子集P，就该有$i\in P$或$-i\in P$．如果$i\in P$，那么$i^2=-1\in P$，与(5.8)相矛盾．如果$-i\in P$，那么$(-i)^2=-1\in P$，也引出矛盾． □

(5.44) **定理** 对于任意z，z_1，$z_2\in K$，成立：

(i) $\bar{\bar{z}}=z$；

(ii) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$；

(iii) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$．

证 通过普通计算易得．

(5.45) **评注**① 上述定理表明，共轭（映射）②是K的一个自

---

①只是由于具有启发性，才列入了(5.45)和(5.46)两小段，这两小段与本书后续内容无关．

②“映射”二字是译者加的．——译者注

同构．但是除去恒等映射外，域R却没有别的自同构．事实上，设φ是一个函数，定义域为R，值域包含在R中，$\varphi(R)\neq\{0\}$，φ还满足$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$．容易证明$\varphi(1)=1$，$\varphi(0)=0$，一般地，对于任意$r\in Q$，都有$\varphi(r)=r$．当$x\neq 0$时，如果$\varphi(x)=0$，那么

$$1=\varphi(1)=\varphi\left(x\frac{1}{x}\right)=\varphi(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

所以当$x\neq 0$时，必定有$\varphi(x)\neq 0$．如果$a<b$，则有

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi(b-a)=\varphi\left(\left((b-a)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)$$
$$=\left(\varphi\left((b-a)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2>0$$

所以，如果$a<b$，则$\varphi(a)<\varphi(b)$．对于任意一个实数x，取r_1，$r_2\in Q$，使$r_1<x<r_2$．那么

$$r_1=\varphi(r_1)<\varphi(x)<\varphi(r_2)=r_2.$$

既然r_2-r_1可任意小，可见$\varphi(x)=x$．

(5.46) **评注**① 函数方程$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$在$R$上有$2^{\mathfrak{c}}$个间断解．事实上，把$R$看作$Q$上的一个向量空间(3.17.c)，设$B$是$Q$上$R$的一个Hamel基(3.19)．对于每个$x\in R$，命$\alpha_x$表示(3.20)中的$B$到$Q$内的那个唯一函数，并且$x=\sum\limits_{b\in B}\alpha_x(b)b$．然后对于每个$f\in R^B$，规定$\varphi_f:R\to R$如下：

$$\varphi_f(x)=\sum_{b\in B}\alpha_x(b)f(b).$$

读者容易验证，每个这样的φ_f满足所求解的函数方程，而且$\varphi_f(rx)=r\varphi_f(x)$($r\in Q$，$x\in R$)．于是$\varphi_f(r)=r\varphi_f(1)$($r\in Q$)，因此，如果$\varphi_f$连续，那么对于任意$x\in R$，$\varphi_f(x)=x\varphi_f(1)$．由于$\varphi_f(1)$刚好有$\mathfrak{c}$个可能值，所以得出刚好有$\mathfrak{c}$个连续的$\varphi_f$．但是$\overline{\overline{R^B}}=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$〔见(4.34)〕，又如果在$R^B$中$f\neq g$，那么$\varphi_f\neq\varphi_g$，所以存在$2^{\mathfrak{c}}$个间断的$\varphi_f$．前段表明，附加的必要条件$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$使$\varphi$成

① "评注"二字是译者加的——译者注

为连续的.

为了说明某些这类加性函数的异常性质，规定$\psi(x)=\sum_{b\in B}\alpha_x(b)$（$x\in R$），也就是$\psi=\varphi_f$（其中对于每个$b\in B$，$f(b)=1$）. 现考虑$B$中的$b_1\neq b_2$，$R$中的$c<d$，以及$r\in R$.

取$s\in Q$，使$c<rb_1+s(b_1-b_2)<d$. 命

$$u=rb_1+s(b_1-b_2)=(r+s)b_1-sb_2.$$

那么，$c<u<d$，$\psi(u)=(r+s)-s=r$. 因此由$c<d$（在R中）可推出$\psi(\{x:c<x<d\})=Q$. 这个函数是杂乱间断的.

域K有$2^{\mathfrak{c}}$个自同构. 这一事实取决于K是代数闭的. 不过，恒等映射$z\to z$和共轭映射$z\to\bar{z}$关于K上的通常拓扑〔见(6.17)〕都是连续的.

(5.47) **定理** 设z，$w\in K$，则$|zw|=|z|\cdot|w|$，$|z|=|\bar{z}|$，$|z|^2=z\bar{z}$，$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$.

证 直接计算即得.

(5.48) **引理** 设$z=x+yi$是一个复数. 则有

(i) $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$，而$\mathrm{Re}(z)=|z|$的充要条件是$x\geqslant 0$及$y=0$；

(ii) $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$，而$\mathrm{Im}(z)=|z|$的充要条件是$x=0$及$y\geqslant 0$.

证 易见有下列关系式：

$$-|z|=-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant-(x^2)^{\frac{1}{2}}=-|x|\leqslant x$$

$$\leqslant|x|=(x^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=|z|.$$

显然，$x=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$的充要条件是$y=0$及$x\geqslant 0$. 同样可证关于$\mathrm{Im}(z)$的结论(ii). □

(5.49) **定理** 设z，$w\in K$，则有$|z+w|\leqslant|z|+|w|$，而且等号成立的充要条件是$\alpha z=\beta w$，其中α，β是不同时为零的非负实数.

证 应用(5.47)，(5.48)得到

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w \\
&= |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \\
&\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z\bar{w}| \\
&= |z|^2+|w|^2+2|z|\,|w| \\
&= (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}
$$

这表明$|z+w|\leqslant|z|+|w|$．等号成立的充要条件是$\mathrm{Re}(z\bar{w})=|z\bar{w}|$，从而根据(5.48)，这等价于$z\bar{w}$是一个非负实数．$z=0$时，取$\alpha=1$，$\beta=0$．$w=0$时，取$\alpha=0$，$\beta=1$．如果$z\neq0$，$w\neq0$，$z\bar{w}$是一个正实数$\beta$，那么$z|w|^2=z\bar{w}w=\beta w$，可取$\alpha=|w|^2>0$． □

(5.50) **几何解释**

读者已知，把域K看作Euclid平面$R\times R$很有好处，这时平面上的点(a,b)对应于复数$a+bi$．这样一来，(a,b)与$(0,0)$之间的Euclid距离就是$a+bi$的绝对值．共轭无非是关于X轴的反射．

(5.51) **定义** 设$z=x+iy$是一个非零复数，则$\arg(z)$是指适合以下条件的实数θ全体所成的集：

$$\cos(\theta)=\frac{x}{|z|},\ \sin(\theta)=\frac{y}{|z|}.$$

$\arg(z)$中适合$-\pi<\theta\leqslant\pi$的任意一个元素θ，记作$\mathrm{Arg}(z)$．规定$\arg(0)=R$，而$\mathrm{Arg}(0)$没有定义①．

(5.52) **定理** 设z是任意一个非零复数，则$\arg(z)$是一个可数无限集，并且$\mathrm{Arg}(z)$恰含有一个实数．如果$\theta\in\arg(z)$，则$\arg(z)=\{\theta+2\pi n:n\in Z\}$．

证 我们仅略述证明；详细证明可参看例如Saks和Zygmund

---

①请读者留意，国内通常用$\arg(z)$和$\mathrm{Arg}(z)$分别表示这里的$\mathrm{Arg}(z)$和$\arg(z)$．——译者注

的书①. 实值函数

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

对于一切$x\in R$有定义、连续且实际上无穷次可微. 特别, $\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$. 数$\frac{\pi}{2}$定义为余弦的最小正零点. 然后证明对于适合$c^2+d^2=1$的任意实数偶(c, d), 总存在唯一的实数θ, 它满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$, $\cos(\theta)=c$, $\sin(\theta)=d$. 这个数就是$\mathrm{Arg}(z)$. 再证明对于一切$\theta\in R$及一切$n\in Z$, 都成立$\cos(\theta)=\cos(\theta+2\pi n)$, $\sin(\theta)=\sin(\theta+2\pi n)$, 并且$2\pi$是余弦和正弦的最小周期. 由这些事实就可推出本定理的后两个结论. □

(5.53) **习题** 设z是一个非零复数,试证$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$. 如果$z$不是负实数, 试证$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)=-\mathrm{Arg}(z)$. 如果$z$是负实数, 试证$\mathrm{Arg}(z)=\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)=\pi$.

(5.54) **习题** 设z, w都是非零复数, 试证$\arg(zw)=\arg(z)+\arg(w)$. 对于任意正整数k, 成立$\arg(z^k)=k\cdot\arg(z)$.

(5.55) **摘要**

图 3 说明复数的加法和乘法. 加法是分量式的. 作图时, 可应用向量加法的平行四边形法则. 乘法稍许复杂些. 我们有

$$\mathrm{Arg}(zw)=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w)\quad(\mathrm{mod}\,2\pi)$$

及

$$|zw|=|z|\cdot|w|.$$

图 4 说明$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$(5.49)成立的唯一条件以及$\overline{z}$(相对于z)的位置.

(5.56) **指数表示法** 一个复数序列(z_n)收敛于极限z, 是指$\lim\limits_{n\to\infty}|z-z_n|=0$. (§6还要更详细地阐述这个概念.)我们暂且利用这一概念, 把指数函数exp定义为

①S.Saks *and* A. Zygmund, *Analytic Functions*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 第28卷, pp.62—64, 1952年.

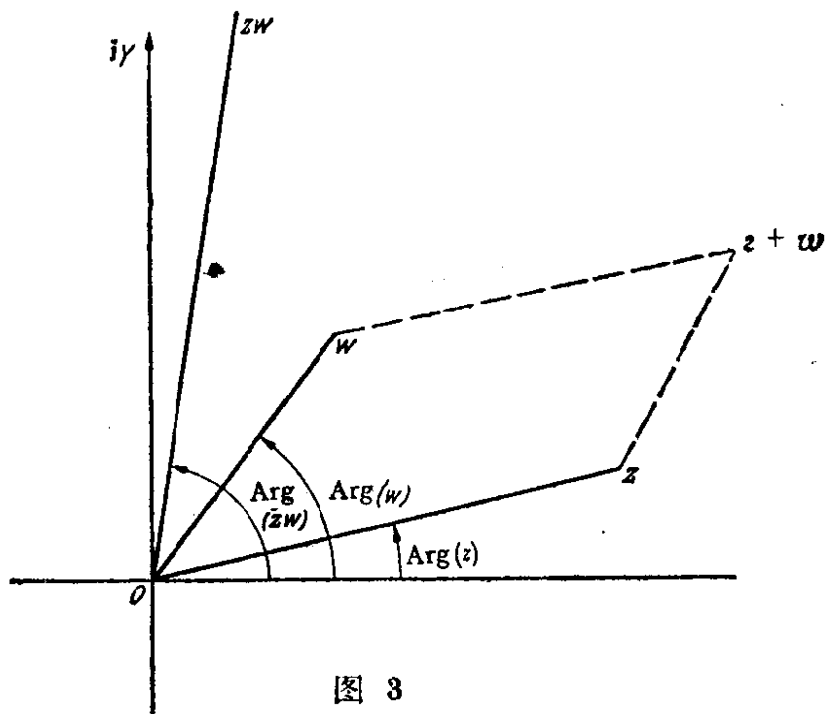


图 3

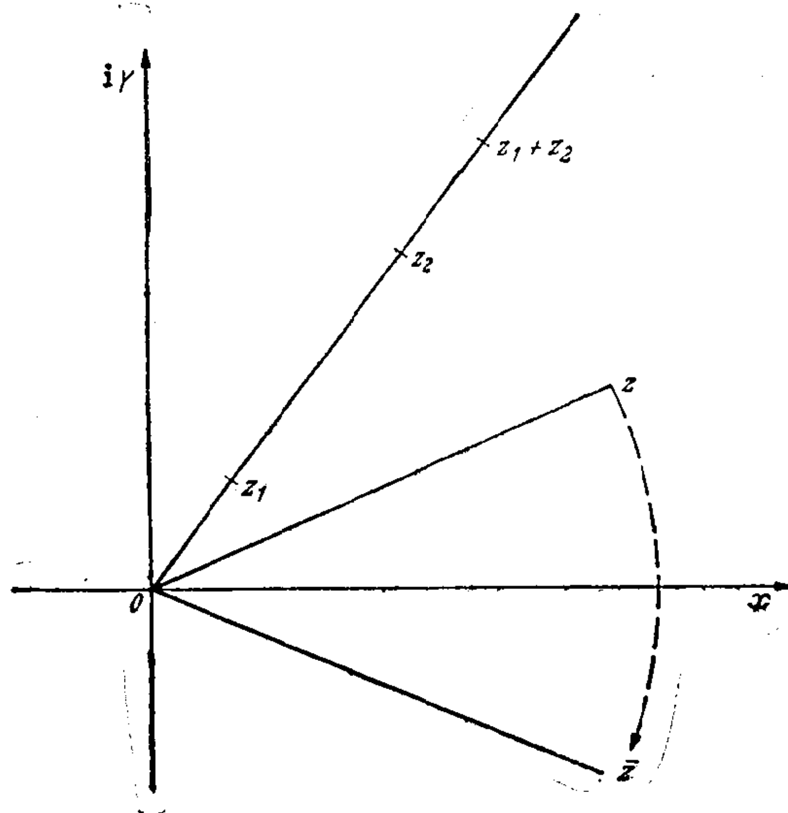


图 4

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{z^n}{n!}.$$

正如实幂级数的情况，可以证明对于任意$z\in K$，$\exp(z)$总存在（也就是说，右端极限存在）．等式

$$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$$

恒成立，这可由先作乘法$\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{w^m}{m!}\right)$，然后取$k\to\infty$时的极限得到证明．不难看出，对于一切$\theta\in R$，都有

$$\exp(i\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta),$$

因此$|\exp(i\theta)|=1$．这样，任意非零复数z都可写成

$$z=|z|\left(\frac{z}{|z|}\right)=|z|\exp(i\theta)=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)).$$

这里θ是$\arg(z)$中的任意数.

上面所隐定义的函数$z\to\frac{z}{|z|}$经常用到，它叫做**正负号函数**，形式定义为

$$\operatorname{sgn}(z)=\begin{cases}\frac{z}{|z|}, & z\in K\cap\{0\}',\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

(5.57) **习题** 试利用Hamel基证明加法群R和K是同构的.

(5.58) **习题** 定义K中的加法为普通加法，定义乘法为“坐标式”：

$$(x+iy)(u+iv)=xu+iyv.$$

试证：对于这些运算来说，K作成一个有单位元的交换环．再证K不是一个域.

第二章　拓扑学与连续函数

本书要旨，在于完整阐述积分和微分．因此这里来深入研究集论拓扑学显然不够妥当．同样，详细论述连续函数也超出本书范围．不过，研究积分和微分注重完善性，这样就不能忽视拓扑学与连续性．

首先，在测度论——它差不多同积分论并行发展——与紧性这一拓扑概念之间有着本质联系；其次，积分和导数理论中的不少重要事实，归根结底奠基于连续函数性质之上；第三，不论构成抽象分析的研究对象，还是推证命题，纯拓扑概念都起着主导作用；第四，就任意拓扑空间而言，许多证明与在实直线情况一样简单易行．

因此，如§6所示，我们开头就要作一番努力，这是很重要的一步，旨在让读者考虑一些结构，它们涉及较直线远为一般的拓扑空间．在此基础上，我们就可以完善地讲述现代分析了．

如果只限于扼要论述集论拓扑学中就分析学而言业已证明是很重要的那部分内容，第6节则是自成体系的．完全正则空间的仿紧性及紧化这两个论题忍痛割爱了．但是此类删节必须有所节制．§7则研究连续函数以及与之密切相关的一些函数．我们特别涉及到这类函数所成的空间及其所可能具备的性质．本节最后叙述Stone-Weierstrass定理，这一定理无疑是每位分析学家必不可少的工具．

§ 6 拓扑学基础

集论拓扑学研究**接近**、**极限点**和**收敛**等概念的抽象形式. 作为特殊的但极为重要的一类情况，我们来考虑直线R. 设x, $y \in R$, x与y之间的距离可规定为$x-y$的绝对值：

$$\rho(x, y) = |x-y|.$$

我们还可以研究一点$x \in R$以及与之对应的使得$\rho(x,y)$小于确定的正数α的点$y \in R$全体，即考虑开区间$]x-\alpha, x+\alpha[$. 这就为我们提供了R内基于距离函数ρ的一个系统逼近概念. 此外，我们还需要一个更一般的概念. 设A是R的一个子集，如果它含有"充分靠近"其每个元的所有点，A就叫做**开集**. 研究集论拓扑学时，通常方便的途径是将开集概念抽象化和公理化.

为了更精确起见，我们先引进一些定义. 首先扩张实数系，然后描述广义实数的若干重要子集.

(6.1)定义 (a) 设∞和$-\infty$是两个互异对象，都不是实数①. 集$R^{\#} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$叫做**广义实数集**. 取$R$中的普通次序关系，并规定$-\infty < \infty$，而且对于每个$x \in R$，规定$-\infty < x < \infty$，$R^{\#}$就成为线性有序集了. 设$a$, b属于$R^{\#}$，且$a<b$，则以下各集

$$]a,b[= \{x \in R^{\#} : a < x < b\},$$
$$[a,b] = \{x \in R^{\#} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$[a,b[= \{x \in R^{\#} : a \leqslant x < b\},$$
$$]a,b] = \{x \in R^{\#} : a < x \leqslant b\}$$

都叫做**区间**，端点为a, b. 区间$]a, b[$是**开区间**，$[a, b]$是**闭区间**，$[a, b[$和$]a, b]$都是**半开区间**. 假如a, b属于R，这些区间就说是**有界的**. 否则就说是**无界的**. 注意，R本身是开区间$]-\infty, \infty[$，而且这里所定义的一切区间都具有基数$\mathfrak{c}$.

---

①许多作者将这里的∞写作$+\infty$. 符号$+$有害无益，所以删去了.

(b) 为了今后的应用，我们作几项约定——根据以下规则来定义$R^{\#}$中的和与乘积. 设x, $y\in R\subset R^{\#}$, $x+y$和xy则照通常的定义. 设$x\in R$, 则规定

$$\infty+x=x+\infty=\infty;$$

$$(-\infty)+x=x+(-\infty)=x-\infty=-\infty;$$

还规定

$$\infty+\infty=\infty;$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty-\infty=-\infty;$$

$$-(\infty)=-\infty, \quad -(-\infty)=\infty.$$

表达式$\infty+(-\infty)$及$(-\infty)+\infty$都没有定义. 设$x\in R$, $x>0$, 则规定

$$\infty\cdot x=x\cdot\infty=\infty;$$

$$(-\infty)\cdot x=x\cdot(-\infty)=-\infty.$$

规定

$$\infty\cdot 0=0\cdot\infty=(-\infty)\cdot 0=0\cdot(-\infty)=0,$$

$$\infty\cdot\infty=\infty.$$

设$x\in R$, $x<0$, 则规定

$$\infty\cdot x=x\cdot\infty=-\infty;$$

$$(-\infty)\cdot x=x\cdot(-\infty)=\infty;$$

表达式$\infty\cdot(-\infty)$, $(-\infty)\cdot\infty$及$(-\infty)\cdot(-\infty)$都没有定义.

根据开区间来定义R的开子集如下.

(6.2) **定义** 设有一个集$U\subset R$, 如果对于每个$x\in U$, 都有一个正实数ε, 使得$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$, 就说$U$是**开集**.

这样一来，就可以简单说成：设U是R的子集，如果对于其每个点x, 它含有充分靠近x的所有点y, （"充分靠近"这句话当然与x有关.）则U是开集. 很明显，凡开区间都是开集. R的开子集的某些重要性质表列在以下定理中.

(6.3) **定理** 命$\mathcal{O}$表示R的开子集全体所成的集族, 则:

(i) $\varnothing\in\mathcal{O}$, $R\in\mathcal{O}$;

(ii) 如果$\mathscr{U}$是$\mathscr{O}$的一个子族，那么$\cup\mathscr{U}\in\mathscr{O}$①；

(iii) 如果$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}\subset\mathscr{O}$，那么$U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n\in\mathscr{O}$。

读者可补出这个很简单的结论的证明.

定理(6.3)所列出的R中开集的性质，成为下面所定义的拓扑空间概念的基础.

(6.4) **定义** 设X是一个集，$\mathscr{O}$是X的一个子集族，并具有以下三个性质：

(i) $\varnothing\in\mathscr{O}$，$X\in\mathscr{O}$；

(ii) 如果$\mathscr{U}$是$\mathscr{O}$的一个子族，那么$\cup\mathscr{U}\in\mathscr{O}$；

(iii) 如果$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}\subset\mathscr{O}$，那么$U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n\in\mathscr{O}$。

（这就是说，$\mathscr{O}$对于任意并以及有限交运算是封闭的.）则称$\mathscr{O}$是X**的一个拓扑**，偶$(X,\mathscr{O})$叫做一个**拓扑空间**. 当不致产生混淆时，X本身就叫做一个拓扑空间. $\mathscr{O}$的元都叫做X的**开集**.

定义(6.4)本身颇为枯燥乏味.关于任意拓扑空间也并没有证明出多少令人振奋的定理. 但是，为了揭示各种拓扑概念之间的联系，以及显示象连续性这类概念的简单属性，可以用开集定义的某些实体却是相当重要的. 另外，只要附加两个公理，便得到一类拓扑空间，在其中运用许多分析方法殊为有益. 我们先看几个拓扑空间的例子.

(6.5) **例** (a) 自然，具有(6.2)及(6.3)所描述的拓扑的实直线R是一个拓扑空间. R的这一拓扑称为R的**通常拓扑**，除非特别作相反声明，我们总假定R赋以其通常拓扑.

(b) 试考察$R^\#$以及族$\mathscr{O}^\#$，这里$\mathscr{O}^\#$是具有以下四种形式之一的一切集所组成的：U，$U\cup]t,\infty]$，$U\cup[-\infty,s[$，$U\cup[-\infty,s[\cup]t,\infty]$，其中$U$是$R$的开子集，$s$，$t\in R$. 那么$(R^\#,\mathscr{O}^\#)$是一个拓扑空间；$\mathscr{O}^\#$叫做$R^\#$**的通常拓扑**.

(c) 设X是任意一个集，偶$(X,\mathscr{P}(X))$显然是一个拓扑空间.

---

①忆及空族的并等于$\varnothing$.

族$\mathscr{P}(X)$叫做X的**离散拓扑**．具有离散拓扑的集X常记作X_d①．

(d) 设X是任意一个集，$\mathscr{O}=\{X,\varnothing\}$．那么$\mathscr{O}$叫做$X$的**密着拓扑**（或叫做**具体拓扑**）．我们对这个拓扑没有多大兴趣．

从上述开集的基本概念出发，我们来定义各种拓扑概念．

(6.6) 定义 设X是一个拓扑空间．**点$x\in X$的一个邻域**是指X的含有x的任意一个开子集U．如果空间X的每对不同的点都有互不相交的邻域，则称X为**Hausdorff空间**．设有一个集$A\subset X$，如果$X\cap A'$是开集，就说A是**闭集**．设$x\in X$，$A\subset X$，如果对于x的每个邻域U，都有$(U\cap\{x\}')\cap A\neq\varnothing$，就说$x$是$A$**的一个极限点**．设$A\subset X$，$A$**的闭包**是指集$A^-=\cap\{F:F$是闭集，$A\subset F\subset X\}$；$A$**的内部**是指集$A^\circ=\cup\{U:U$是开集，$U\subset A\}$；$A$**的边界**是指集$\partial A=A^-\cap(A')^-$．

(6.7) 定理 设X是一个拓扑空间．

(i) X的任意一个闭子集的有限族之并仍然是闭集．

(ii) X的任意一个闭子集的非空族之交仍然是闭集．

(iii) X的子集A的闭包A^-是包含A的最小闭集，并且A为闭集的充要条件是$A=A^-$．

(iv) A的内部A°是包含于A的最大开集，并且A为开集的充要条件是$A=A^\circ$．

(v) X的子集A为闭集的充要条件是A包含其全部极限点．

设A，B是X的两个子集，则有：

(vi) $A^\circ=A'^{-\prime}$；

(vii) $\partial A=A^-\cap A^{\circ\prime}$；

(viii) $(A\cup B)^-=A^-\cup B^-$；

(ix) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$．

设$\{A_\iota\}$是X的任意一个子集族，则有

(x) $\cup A_\iota^-\subset(\cup A_\iota)^-$；

(xi) $\cap A_\iota^\circ\supset(\cap A_\iota)^\circ$．

---

①下标d为discrete（离散）一词的第一个字母．——译者注

最后

(xii) $\varnothing$及X都是闭集.

证 把De Morgan律(1.9.iii)和(1.9.iv)应用于开集公理(6.4.iii)和(6.4.ii)便直接得到断言(i)和(ii).

既然A^-是A的所有闭超集之交,由断言(ii)便可证实断言(iii).断言(iv)差不多是显然的.

我们来证明(v). 先设A是闭集. 那么A'便是A'中每一点的一个邻域,且$A'\cap A=\varnothing$,因此A'中没有点会是A的极限点,这就是说,A包含了它的所有极限点.反过来,如果A'中没有点会是A的极限点,那么对于每个$x\in A'$,必存在x的一个邻域U_x,适合$U_x\cap A=\varnothing$,因而$A'=\bigcup\{U_x:x\in A'\}$是开集,即$A$是闭集.

为了证明(vi),我们计算如下:

$$\begin{aligned}A'^{-\prime}&=[\bigcap\{F:F\text{是闭集},\ F\supset A'\}]'\\&=\bigcup\{F':F\text{是闭集},\ F\supset A'\}\\&=\bigcup\{F':F'\text{是开集},F'\subset A\}\\&=A^\circ.\end{aligned}$$

由(vi)及∂A的定义便直接得到断言(vii).

为了证明(viii),注意到$(A\cup B)^-$是包含A与B两个集的闭集,所以它必定包含A^-与B^-两个集. 于是得到

$$(A\cup B)^-\supset A^-\cup B^-.$$

但$A^-\cup B^-$是包含$A\cup B$的闭集,从而

$$(A\cup B)^-\subset A^-\cup B^-,$$

所以

$$(A\cup B)^-=A^-\cup B^-.$$

为了证明(ix),我们写成

$$\begin{aligned}(A\cap B)^\circ&=(A\cap B)'^{-\prime}=(A'\cup B')^{-\prime}\\&=(A'^-\cup B'^-)'=(A'^{-\prime}\cap B'^{-\prime})\\&=A^\circ\cap B^\circ.\end{aligned}$$

因为包含关系$A_{\iota_0}\subset\bigcup A_\iota$及$A_{\iota_0}^-\subset(\bigcup A_\iota)^-$对于一切指标$\iota_0$当然

都是成立的，由此便证实了断言(x)．由(x)，断言(xi)是显然的，由(6.4.i)及闭集定义，断言(xii)也是显而易见的．□

(6.8) 定义 设X是一个拓扑空间，如果$\varnothing$与X是X中仅有的既开又闭的子集，就说X是**连通的**.

(6.9) 定理 具有通常拓扑的空间R是连通的.

证 设A是R的一个既开又闭的非空子集．倘若$A\neq R$，命$c\in R\cap A'$．既然$A\neq\varnothing$，那么或有$A\cap\,]-\infty,c[\,\neq\varnothing$，或有$A\cap\,]c,\infty[\,\neq\varnothing$．假定$B=A\cap\,]-\infty,c[\,\neq\varnothing$，设$a$是这个集的上确界(5.33)．显然$a\leqslant c$．设$\varepsilon>0$，那么$a-\varepsilon$并不是$B$的一个上界，从而存在某个$x\in B$，满足$a-\varepsilon<x\leqslant a$．这就证明了$a$的每个邻域必与$A$相交．从而由于$A$是闭集，$a$便属于$A$．既然$A$又是开集，便有$\delta>0$，使$]a-\delta,a+\delta[\,\subset A$．任取$b\in R$，它满足$a<b<\min\{a+\delta,c\}$．（注意，$a\neq c$，因为$c\in A'$．）由此可见，$b\in A$，$b<c$，从而$b\in B$．不等式$b>a$与$a$是上确界相矛盾．如果$A\cap\,]c,\infty[\,\neq\varnothing$，同样引出矛盾．于是只能得出结论$A=R$．□

定义拓扑时可以不用全体开集，而只用某些开集，这个方法往往比较方便.

(6.10) 定义 设$(X,\mathscr{O})$是一个拓扑空间，族$\mathscr{B}\subset\mathscr{O}$．如果对于每个$U\in\mathscr{O}$，都存在某个子族$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，使得$U=\cup\mathscr{A}$，这就是说，每个开集是$\mathscr{B}$中一些集的并，则族$\mathscr{B}$叫做**拓扑$\mathscr{O}$的一个基**．设$\mathscr{S}$是$\mathscr{O}$的一个子族，如果$\mathscr{S}$中集的有限交全体所成的族是拓扑$\mathscr{O}$的一个基，则子族$\mathscr{S}$叫做**拓扑$\mathscr{O}$的一个次基**.

(6.11) 定理 设X是一个集，$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$．规定$\mathscr{O}=\{\cup\mathscr{A}:\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\}$．则当且仅当以下两个条件满足时，$(X,\mathscr{O})$是一个拓扑空间，并且$\mathscr{B}$是$\mathscr{O}$的一个基：

(i) $\cup\mathscr{B}=X$，

(ii) 如果$U,V\in\mathscr{B}$，$x\in U\cap V$，那么存在$W\in\mathscr{B}$，使得$x\in W\subset U\cap V$.

证 假定$\mathscr{O}$是X的一个拓扑．那么$X\in\mathscr{O}$，因而存在$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，满

足$X=\bigcup\mathscr{A}\subset\bigcup\mathscr{B}\subset X$，即(i)成立．其次设$U$，$V$是$\mathscr{B}$中的两个集，且$x\in U\cap V$．那么$U\cap V$在$\mathscr{O}$中，因而有某个$\mathscr{W}\subset\mathscr{B}$，满足$U\cap V=\bigcup\mathscr{W}$．于是对于某个$W\in\mathscr{W}$，有$x\in W\subset U\cap V$，这便证明了(ii)．

反过来，假定(i)和(ii)成立，须证$\mathscr{O}$是一个拓扑．设$\{U_\iota\}_{\iota\in I}$是$\mathscr{O}$的任意一个子族．那么根据$\mathscr{O}$的定义，对于每个ι，必存在$\mathscr{A}_\iota\subset\mathscr{B}$，满足$U_\iota=\bigcup\mathscr{A}_\iota$．（这里利用了选择公理，对于每个$\iota\in I$，只选取一个$\mathscr{A}_\iota$．）命$\mathscr{A}=\bigcup\limits_{\iota\in I}\mathscr{A}_\iota$．显然$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\limits_{\iota\in I}U_\iota$；于是$\mathscr{O}$对于任意并运算是封闭的．其次设$U$，$V$在$\mathscr{O}$中，那么存在$\mathscr{B}$的两个子族$\{U_\iota\}_{\iota\in I}$及$\{V_\eta\}_{\eta\in H}$，使$U=\bigcup\limits_{\iota\in I}U_\iota$，$V=\bigcup\limits_{\eta\in H}V_\eta$，于是对于每个$x\in U\cap V$，存在$\iota\in I$及$\eta\in H$，使$x\in U_\iota\cap V_\eta$，因此根据(ii)，$\mathscr{B}$中有一个$W_x$，使$x\in W_x\subset U_\iota\cap V_\eta\subset U\cap V$．命$\mathscr{A}=\{W_x: x\in U\cap V\}$．那么$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$（$\mathscr{A}$可能是空族！），$U\cap V=\bigcup\mathscr{A}\in\mathscr{O}$．于是$\mathscr{O}$对于有限交运算也是封闭的．根据(i)，$X$在$\mathscr{O}$中，而由于$\varnothing\subset\mathscr{B}$，便有$\varnothing=\bigcup\varnothing\in\mathscr{O}$．这证明了$\mathscr{O}$乃是$X$的一个拓扑．很明显，$\mathscr{B}$是$\mathscr{O}$的一个基．□

定义在$R\times R$上的函数$(x, y)\to|x-y|$显然是距离函数．有一类拓扑空间虽然比较特殊却很重要，其中的拓扑可用适当的距离函数来定义．以下是公理化定义．

(6.12) 定义 设X是一个集，ρ是$X\times X$到R内的一个函数，并满足下列条件：对于任意x，y，$z\in X$，有

(i) $\rho(x, y)\geqslant 0$；

(ii) $\rho(x, y)=0$的充要条件是$x=y$；

(iii) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$；

(iv) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$（**三角不等式**）．

则ρ叫做X的一个**度量**（或**距离函数**）；$\rho(x, y)$叫做x**到**y**的距离**，偶(X, ρ)叫做一个**度量空间**．在不致引起混淆时，便称X为一个度量空间．

(6.13) 例．(a) 设n是正整数，$X=R^n$或K^n，p为实数，$p\geqslant 1$．

对于X中的$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$及$\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_n)$，规定

$$\rho_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ρ_p显然具备性质（6.12.i）—（6.12.iii），而三角不等式(6.12.iv）乃是Minkowski不等式〔下文（13.7）将予以证明〕的特例.

度量ρ_2称为R^n或K^n上的**Euclid度量**.

(b) 设$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in R^n$或K^n，规定

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\max\{|x_j, y_j|: 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

不难验证（K^n，ρ）和（R^n，ρ）都是度量空间.

(c) 设X是任意一个集. 对于x，$y\in X$，规定$\rho(x,y)=1-\delta_{xy}$〔δ是Kronecker的δ记号，见(2.20)〕. 很明显ρ是一个度量，称之为X的**离散度量**.

(d) 考虑集N^N，这个集可具体设想成正整数序列$(a_k)_{k=1}^{\infty}$全体所成的集. 对于N^N中的$\boldsymbol{a}=(a_k)$，$\boldsymbol{b}=(b_k)$，规定

$$\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0，当\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b};$$

$$\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{1}{n}，当a_1=b_1，a_2=b_2，\cdots，a_{n-1}=b_{n-1}，而a_n\neq b_n.$$

那么（N^N，ρ）是一个度量空间.

(e) 设$D=\{z\in K: |z|\leqslant 1\}$是复平面内的闭单位圆盘，对于$z$，$w\in D$，规定

$$\rho(z,w)=\begin{cases}|z-w|, & 当\arg(z)=\arg(w)或z与w中有一个为零,\\ |z|+|w|, & 其余.\end{cases}$$

那么(D，ρ)是一个度量空间. 这个空间不妨称作“法国铁路空间”（French railroad space）或“美国首都华盛顿空间”(Washington D.C.space）. 要知道这样的称呼是有道理的，应该草

描一张图形①. 其实，这个看来有点象模拟的空间(本质上)乃是 c 维Hilbert空间中闭单位球的某个闭子集. 参看下文（16.54）.

(6.14) **定义** 设（X, ρ）是任意一个度量空间. 对于 $\varepsilon>0$，$x\in X$，命

$$B_\varepsilon(x)=\{y\in X:\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

集 $B_\varepsilon(x)$ 叫做 x **的 ε-邻域**或**以 x 为中心、ε 为半径的开球**.

(6.15) **定理** 设(X, ρ)是一个度量空间. 命

$$\mathscr{B}_\rho=\{B_\varepsilon(x):\varepsilon>0,\ x\in X\}.$$

则 $\mathscr{B}_\rho$ 是X的拓扑 $\mathscr{O}_\rho$ 的一个基. $\mathscr{O}_\rho$ 叫做**由 ρ 生成的拓扑**. $\mathscr{O}_\rho$ 的元叫做 ρ 开集.

证 只须证 $\mathscr{B}_\rho$ 符合（6.11.i）及（6.11.ii）.性质（6.11.i）显然. 设 $B_\varepsilon(x)$ 与 $B_\delta(y)$ 都在 $\mathscr{B}_\rho$ 中，命 $z\in B_\varepsilon(x)\cap B_\delta(y)$. 则有 $\rho(x,z)<\varepsilon$, $\rho(y,z)<\delta$. 规定

$$\gamma=\min\{\varepsilon-\rho(x,z),\ \delta-\rho(y,z)\}.$$

于是 γ 是正数，且对于 $u\in B_\gamma(z)$，有 $\rho(x,u)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,u)<(\varepsilon-\gamma)+\gamma=\varepsilon$, $\rho(y,u)\leqslant\rho(y,z)+\rho(z,u)<(\delta-\gamma)+\gamma=\delta$. 这就证明了 $B_\gamma(z)\subset B_\varepsilon(x)\cap B_\delta(y)$，从而 $\mathscr{B}_\rho$ 也符合（6.11.ii）. □

(6.16) **评注** 我们对（6.15）再稍作说明. （6.15）表明：一个集 $U\subset X$ 是 ρ 开集的充要条件是，对于每个 $x\in U$，必存在 $\varepsilon>0$，使得只要 $\rho(x,y)<\varepsilon$，就有 $y\in U$. 当陈述关于度量空间 X的拓扑性质时，如果未作相反的明确声明，总是就已知度量所生成的拓扑而言的.

(6.17) **习题** 设 n 是正整数，X 表示 R^n 或 K^n. 试证：(6.13.a）及（6.13.b）所定义的X的所有度量都恰生成X的同一个拓扑，

①美国首都华盛顿市区是经过精心设计的. 市区所有以州名来命名的重要街道都通向国会大厦，就象车轮上的辐条一样. 类似地，法国的铁路网也是以巴黎为中心向全国呈辐射状分布的.

——译者注

这就是说，其中任意两个度量产生相同开集.这个拓扑叫做$R^n(K^n)$**的通常拓扑**.

拓扑空间的任意子集可自然地作成一个拓扑空间.

(6.18) **定义** 设(X, $\mathscr{O}$)是一个拓扑空间，S是X的一个子集. **由$\mathscr{O}$诱导出来的S上的相对拓扑**指的是族$\{U\cap S:\ U\in\mathscr{O}\}$，具有这一拓扑的集$S$叫做$X$**的子空间**①. 于是，一个集$V\subset S$是**相对开集**的充要条件是对于某个$X$中的开集$U$，有$V=U\cap S$.

(6.19) **例** (a) 设$X=R$(具有通常拓扑)，$S=[0, 1]$. 则集$\left]\frac{1}{2},\ 1\right]$是相对于$[0, 1]$的开集，因为$\left]\frac{1}{2},\ 1\right]=\left]\frac{1}{2},\ 2\right[\cap[0, 1]$，而$\left]\frac{1}{2},\ 2\right[$是$R$中的开集. 但$\left]\frac{1}{2},\ 1\right]$显然不是$R$中的开集.

(b) 设$X=R, S=Q$.则$[\sqrt{2}, \sqrt{3}]\cap Q$是相对于$Q$的开集，因为$[\sqrt{2}, \sqrt{3}]\cap Q=]\sqrt{2}, \sqrt{3}[\cap Q$.

(c) 考虑集$L=\{(x, x): x\in R\}\subset\{(x,y): x\in R, y\in R\}=R^2$. 由于$R^2$赋以通常拓扑，$L$便具有$R$的通常拓扑②.

(d) 考虑集$C=\left\{\left(\frac{1}{x}\cos(x),\ \frac{1}{x}\sin(x)\right): x\in R, 0<x<\infty\right\}\subset R^2$. R^2(具有通常拓扑)中C的相对拓扑是$]0, \infty[$的通常拓扑. (自然认为C就是$]0, \infty[$.)

我们转到另外一些重要概念.

(6.20) **定义** 设D是拓扑空间X的一个子集，如果$D^-=X$，就说D**在**X**中稠密**. 如果空间X含有一个可数稠密子集，就说X是**可分的**. 如果空间X的拓扑有一个基，这个基是可数族，就说X具有一个**可数基**.

(6.21) **例** 具有通常拓扑的空间R^n是可分的，因为集$D=\{(x_1, \cdots, x_n): x_j\in Q,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$可数而且稠密. 但$R_d$不是可

---

①就是说，集S与这个相对拓扑一起叫做X的子空间. ——译者注

②这句话的意思是，L是R^2的子空间，换句话说，由R^2的通常拓扑诱导出来L上的通常拓扑. ——译者注

分的，因为R_d的每个可数子集（与所有子集一样）是闭集，而R不可数．法国铁路空间（6.13.e）也不是可分的．

(6.22) 定理 具有可数基的空间必可分．

证 设X是具有可数基$\mathscr{B}$的一个空间．对于每个非空集$B\in\mathscr{B}$，命$x_B\in B$．则集$D=\{x_B:B\in\mathscr{B}\}$可数而且稠密．□

(6.23) 定理 可分的度量空间必含有一个可数基．

证 设X是含有一个可数稠密子集D的度量空间．命

$$\mathscr{B}=\{B_r(x):x\in D,\ r\in Q,\ r>0\}.$$

那么$\mathscr{B}$可数．我们来证明$\mathscr{B}$是一个基．设U是开集，$z\in U$．那么存在$\varepsilon>0$，使$B_\varepsilon(z)\subset U$．既然$D$在$X$中稠密，便有$x\in B_{\varepsilon/3}(z)\cap D$．现取有理数$r$，适合$\frac{1}{3}\varepsilon<r<\frac{2}{3}\varepsilon$．那么只要$y\in B_r(x)$，就有

$$\rho(y,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(x,z)<r+\frac{1}{3}\varepsilon<\varepsilon,$$

所以$B_r(x)\subset B_\varepsilon(z)\subset U$．而

$$\rho(x,z)<\frac{1}{3}\varepsilon<r,$$

因此$z\in B_r(x)$．这样U便是$\mathscr{B}$的元之并．□

(6.24) 定义 设$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是拓扑空间X中的一个序列，如果对于元素$x\in X$的每个邻域U，都存在正整数n_0，使得只要$n\geqslant n_0$，就有$x_n\in U$，便说$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x，或者说**有极限**x．如果$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x，就记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或$x_n\to x$．

(6.25) 定理 度量空间X的一个子集A是闭集的充要条件是只要(x_n)是其值在A中的序列，而且(x_n)在X中有极限x，就有$x\in A$．

证 假定A是闭集，又设(x_n)是其值在A中的序列，且在X中有极限x．倘若x在A'中，那么A'就会是x的一个邻域，从而除有限

个x_n值以外，其余都落在A'中①——矛盾.

反过来，假定A不是闭集. 根据（6.7.v），A便有一个极限点x，而$x \notin A$. 对于每个$n \in N$，取$x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$. 那么$(x_n) \subset A$②，$x_n \to x$，而$x \notin A$. □

（6.26） **定理** 设X是一个Hausdorff空间. 假定$A \subset X$，且x是A的一个极限点. 则x的每个邻域都含有无穷多个A的点.

证 留作习题.

（6.27） **定理** 凡度量空间必是Hausdorff空间.

证 留作习题.

拓扑学中最重要的概念之一为紧性，这一概念有若干变型说法，下面我们来讨论它们.

（6.28） **定义** 如果(x_n)是一个序列，$\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$是正整数所成的一个无限集，则序列（$x_{n_k}$）（它定义为$k \to x_{n_k}$，$k \in N$）③叫做（$x_n$）**的子序列**.

（6.29）**定义** 设X是一个拓扑空间，如果X中的每个序列都有子序列收敛于X的某一点，就说X是**列紧的**.

（6.30） **定义** 设X是一个拓扑空间，如果X的每个无限子集在X中都有极限点，就说X是 **Fréchet 紧的**（或者说具有Bolzano-Weierstrass性质）.

列紧性和Fréchet紧性颇为有用，而这类概念中用处最大的当首推紧性——下面来定义它.

---

①可见定理中的（x_n）**基本上**在A中就行. 所谓序列(x_n)基本上在A中，指的是存在正整数m，使得只要$n \geqslant m$，就有$x_n \in A$. 参见J.L.Kelley《*General Topology*》第二章，引论. ——译者注

②"$(x_n) \subset A$"为记号的滥用. 意即"(x_n)的值在A中". 参看（2.18）译注. ——译者注

③这里的映射记号与本书前文（2.17）的记号$N \twoheadrightarrow N$有别. 参见J.Dieudonné《*Éléments d'analyse*》1，（1.8），（3.13.9）. ——译者注

(6.31) **定义** 设X是一个拓扑空间. **X的一个覆盖**是指X的一个子集族$\mathscr{A}$，它满足$\bigcup\mathscr{A}=X$. 其每个元都是开集的覆盖叫做**开覆盖**. 如果覆盖的子族仍是覆盖，那么这个子族叫做**子覆盖**.

(6.32) **定义** 设X是一个拓扑空间，如果X的每个开覆盖都有一个有限子覆盖，就说X是**紧的**.

(6.33) **定义** 如果一个集族的每个有限子族都有非空的交，就说这个集族具有**有限交性(质)**.

(6.34) **定理** 拓扑空间X是紧的，其充要条件是X的每个具有有限交性的闭子集族都有非空的交.

证 只要应用De Morgan律(1.9)就行了. 事实上，$\mathscr{U}$是X的开覆盖的充要条件是$\mathscr{F}=\{U':U\in\mathscr{U}\}$是具有空交集的闭集族. 于是每个开覆盖都包含有限子覆盖的充要条件是，每个具有空交集的闭集族都包含具有空交集的有限子族. □

(6.35) **定理** 凡紧拓扑空间都是Fréchet紧的.

证 设X是一个紧空间. 假定X有一个无穷子集A，它在X中没有极限点. 那么A是闭集(6.7.v). 而每个$a\in A$都有不含$A\cap\{a\}'$的点的邻域U_a. 于是$\{U_a:a\in A\}\cup\{A'\}$是X的开覆盖，但没有有限子覆盖. 这个矛盾便完成了证明. □

(6.36) **定理** 凡列紧度量空间都是可分的.

证 设X是一个列紧度量空间. Tukey引理(3.8)表明，对于每个正整数n，有X的极大子集A_n，它具有性质：对于每对互异点x，$y\in A_n$，有$\rho(x, y)\geqslant\frac{1}{n}$. 每个$A_n$是有限集，因为不然的话，对于某个$n$，$A_n$就该含有互异点所成的一个无限序列，它没有收敛子序列. 于是$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是可数集. 我们断言$A$在$X$中稠密. 设若不然，则存在$x\in X\cap A^{-\prime}$. 由于$A^{-\prime}$是开集，便有$\varepsilon>0$，使$B_\varepsilon(x)\subset A^{-\prime}$. 取$n\in N$，满足$\frac{1}{n}<\varepsilon$. 那么对于每个$y\in A_n$，有$\rho(x, y)\geqslant\varepsilon>\frac{1}{n}$. 而集$A_n\cup\{x\}$的存在性与$A_n$的极大性相矛盾. 由此可见$A^-=$

X. □

(6.37) **定理** 设X是一个度量空间，则以下三个断言是彼此等价的：

(i) X是紧的；

(ii) X是Fréchet紧的；

(iii) X是列紧的.

证 由(6.35)知道(i)蕴涵(ii). 假定(ii)成立，命(x_n)是其值在X中的序列.如果(x_n)仅有有限个互异项，那么显然存在一个无穷集$\{n_k: k\in N\}\subset N$，使得$n_1<n_2<\cdots$，且对于每个$k\in N$，$x_{n_k}=x_{n_1}$. 这时，子序列(x_{n_k})收敛于x_{n_1}. 因此假定(x_n)有无穷多个互异值. 于是集$\{x_n: n\in N\}$便有极限点$x\in X$. 命$x_{n_1}=x_1$. 假设$x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}$已经选好了.既然x的每个邻域含有无穷多个互异x_n，就取$x_{n_{k+1}}\in B_{\frac{1}{k+1}}(x)$，使$n_{k+1}>n_j$ ($1\leqslant j\leqslant k$). 那么子序列(x_{n_k})收敛于x. 这样一来，(ii)便蕴涵(iii).

再设(iii)成立. 根据(6.36)，X可分，从而由(6.23)，X含有一个可数基$\mathscr{B}$. 现设$\mathscr{U}$是X的任意一个开覆盖. 命

$$\mathscr{A}=\{B\in\mathscr{B}: 对于某个U\in\mathscr{U},\ B\subset U\}.$$

对于每个$B\in\mathscr{A}$，取$U_B\in\mathscr{U}$，适合$B\subset U_B$，又命

$\mathscr{V}=\{U_B: B\in\mathscr{A}\}$.显然$\mathscr{V}$是一个可数族. 如果$x\in X$，那么对于某个$U\in\mathscr{U}$，$x\in U$. 既然$\mathscr{B}$是一个基，便有$B\in\mathscr{B}$，使$x\in B\subset U$，于是$B\in\mathscr{A}$，$x\in B\subset U_B$. 我们得出结论：$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的一个可数子覆盖，枚举$\mathscr{V}$成为序列$\mathscr{V}=(V_n)$. 对于每个$k\in N$，命$W_k=\bigcup_{n=1}^{k}V_n$.为了证明(i)，只要证实对于某个$k\in N$，有$W_k=X$就可以了. 倘非如此，对于每个$k$，取$x_k\in X\cap W_k'$.那么$(x_k)$含有子序列$(x_{k_j})$，它收敛于某个$x\in X$. 既然$\mathscr{V}$是一个覆盖，就必存在$k_0\in N$，使$x\in V_{k_0}\subset W_{k_0}$. 这样一来，$W_{k_0}$是$x$的邻域，仅对于有限个$k$而言，它是包含$x_k$的. 这个矛盾证明了(iii)蕴涵(i). □

(6.38) **定理** 设X是一个Hausdorff空间，A是X的子空间，

而且A关于相对拓扑是紧的，则A是X的闭子集.

证 我们来证明A'是开集. 设$z\in A'$. 对于每个$x\in A$，可取不相交的两个开集U_x与V_x，使得$x\in U_x$，$z\in V_x$. 那么$\{U_x\cap A: x\in A\}$是A的开覆盖，因为A关于相对拓扑是紧的，从而必存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset A$，使得$A\subset\bigcup_{j=1}^{n} U x_j$. 命$V=\bigcap_{j=1}^{n} V x_j$，则$V$是$z$的邻域，$V\cap A=\varnothing$，也就是说$V\subset A'$. □

(6.39) 定理 设X是一个紧空间，A是X的闭子集. 则A是X的紧子空间.

证 设$\mathscr{F}$是A的任意一个具有有限交性的闭（对于相对拓扑而言）子集族. 那么$\mathscr{F}$的每个元是X中的闭集，从而由（6.34）推知$\cap\mathscr{F}\neq\varnothing$. 于是由（6.34）知道$A$是紧的. □

我们来阐明紧性的一个引人注目的特性，这一特性说明，在论证空间的紧性时，可以把注意力集中在一些很特别的开覆盖上.

(6.40) 定理（Alexander） 设X是一个拓扑空间，$\mathscr{S}$是X的拓扑的任意一个次基〔见(6.10)〕. 则以下两个断言是等价的：

(i) 空间X是紧的.

(ii) $\mathscr{S}$的子族所成的X的每个覆盖都有有限子覆盖.

证 显然(i)蕴涵(ii). 为了证明(ii)也蕴涵(i)，假定(ii)成立，但(i)不真. 试考虑没有有限子覆盖的X的一切开覆盖所成的族$\mathscr{K}$. 族$\mathscr{K}$被包含关系半序化. 显然$\mathscr{K}$中非空链的并是$\mathscr{K}$中的一个覆盖. 由 Zorn 引理（3.10）可知，$\mathscr{K}$含有一个极大覆盖$\mathscr{V}$. 这就是说，$\mathscr{V}$是X的开覆盖，$\mathscr{V}$没有有限子覆盖，而且如果U是任意一个不在$\mathscr{V}$中的开集，那么$\mathscr{V}\cup\{U\}$就有有限子覆盖. 命$\mathscr{W}=\mathscr{V}\cap\mathscr{S}$. 则$\mathscr{W}$的有限子族都不覆盖$X$，从而由(ii)推得$\mathscr{W}$不是$X$的覆盖. 设$x$是$X\cap(\cup\mathscr{W})'$中的一点，在覆盖$\mathscr{V}$中选取包含$x$的集$V$. 既然$\mathscr{S}$是次基，在$\mathscr{S}$中便有集$S_1, \cdots, S_n$，满足$x\in\bigcap_{j=1}^{n} S_j\subset V$. 因为$x\notin(\cup\mathscr{W})$，所以$S_j$不在$\mathscr{V}$中. 既然$\mathscr{V}$是极大覆盖，那么对于

每个j，必存在集A_j，它是$\mathscr{V}$中有限个集的并，并且满足$S_j\cup A_j=X$．所以

$$V\cup\bigcup_{j=1}^{n}A_j\supset\left(\bigcap_{j=1}^{n}S_j\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=X,$$

因此X是$\mathscr{V}$中有限个集之并．这与$\mathscr{V}$的选取相矛盾．□

另一类重要的拓扑空间是通过取已知拓扑空间族的Cartesian乘积而得到的．先要引进一个定义．

(6.41) 定义 设$\{X_\iota\}_{\iota\in I}$是一个非空拓扑空间族，$X=\underset{\iota\in I}{\times}X_\iota$〔见(3.1)〕．对于每个$\iota\in I$，在$X$上定义$\pi_\iota$为$\pi_\iota(x)=x_\iota$．函数$\pi_\iota$称为**$X$到$X_\iota$上的射影**．**集$X$上的积拓扑**定义为以形如$\pi_\iota^{-1}(U_\iota)$的集全体所成的族作为次基的拓扑，其中$\iota$取遍$I$，$U_\iota$取遍$X_\iota$的开集．于是积拓扑的基是开集的逆射影的有限交全体所成之族．积拓扑的基是形如$\underset{\iota\in I}{\times}U_\iota$的集全体所成的族，其中对于每个$\iota\in I$，$U_\iota$是$X_\iota$中的开集，并且除有限个$\iota$外，都有$U_\iota=X_\iota$．每当谈论拓扑空间族的Cartesian乘积时，这个乘积当然具有积拓扑，除非作相反说明．

(6.42) 习题 对于某个$n\in N$，命$I=\{1,2,\cdots,n\}$，又对于每个$\iota\in I$，命$X_\iota=R$（或K），这里R（或K）具有通常拓扑．显然$X=\underset{\iota\in I}{\times}X_\iota=R^n$（或$K^n$）．试证：$X$上的积拓扑就是$X$上的通常拓扑．

(6.43) Tihonov定理①．设$\{X_\iota\}_{\iota\in I}$是一个非空紧拓扑空间族．则这些空间的Cartesian乘积X（关于积拓扑）也是紧的．

证 根据Alexander定理（6.40），只考虑（6.41）所说的次基开集所成的X的开覆盖就行了．设$\mathscr{U}$是由次基开集所成的X的任意一个覆盖．对于每个$\iota\in I$，命$\mathscr{U}_\iota$表示满足$\pi_\iota^{-1}(U)\in\mathscr{U}$的开集$U\subset X_\iota$全体所成的族．我们断言：对于某个$\iota\in I$，$\bigcup\mathscr{U}_\iota=X_\iota$．设若不然，就会有一点$x\in X$，使对于任意$\iota\in I$，有$\pi_\iota(x)=x_\iota\in X_\iota$

①当每个X_ι是闭单位区间〔0，1〕时，A.Tihonov证明了本定理〔Math.Annalen 102，544-561(1930)〕．其一般情况是由E.Čech最先证明的〔Ann.of Math.(2)38，823—844(1937)〕．

$\cap(\cup\mathscr{U}_\iota)'$；所以对于一切$\pi_\iota^{-1}(U)\in\mathscr{U}$，都有$x\notin\pi_\iota^{-1}(U)$. 这就是说，$\mathscr{U}$就不会是$X$的覆盖了. 所以可选取（并且选好了）$\eta\in I$，适合$\cup\mathscr{U}_\eta=X_\eta$. 由于$X_\eta$是紧的，便存在有限族$\{U_1,\cdots U_n\}\subset\mathscr{U}_\eta$，使得$X_\eta=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n$. 显然$\{\pi_\eta^{-1}(U_j):j=1,\cdots,n\}$是$X$的覆盖$\mathscr{U}$的有限子覆盖. □

下面我们阐述R^n和K^n的紧子空间的特性.

(6.44) 定理（Heine-Borel-Bolzano-Weierstrass） 设$n\in N$，$A\subset R^n$（或K^n）. 则A（关于相对通常拓扑）是紧的，其充要条件是A为有界闭集①.

证 K到R^2上的映射$x+iy\to(x,y)$保持距离$|(x+iy)-(u+iv)|=((x-u)^2+(y-v)^2)^{\frac{1}{2}}=\rho((x,y),(u,v))$. 这样一来，作为拓扑空间而论，$K^n$和$R^{2n}$是不能区分的. 因此我们可只留意$A\subset R^n$的情况.

先考虑$n=1$及R中的有界闭区间$A=[a,b]$的情况. $[a,b]$的拓扑的一个次基是形如$[a,d[$或$]c,b]$（这里$c,d\in[a,b]$）的区间全体所成的族$\mathscr{S}$. 设$\mathscr{U}$是$\mathscr{S}$中的集所成的$[a,b]$的任意覆盖. 既然b被$\mathscr{U}$覆盖，$\mathscr{U}$中便有形如$]c,b]$的集. 命$c_0=\inf\{c:]c,b]\in\mathscr{U}\}$. 由于$c_0$被$\mathscr{U}$覆盖，便有区间$[a,d_1[\in\mathscr{U}$，适合$c_0<d_1$. 根据下确界定义，必有区间$]c_1,b]\in\mathscr{U}$，适合$c_1<d_1$. 于是$\{[a,d_1[,]c_1,b]\}\subset\mathscr{U}$，$[a,b]=[a,d_1[\cup]c_1,b]$. 由这一结论及Alexander定理（6.40），就推出$[a,b]$是紧的.

其次设n是任意正整数，并假定A是有界闭集. 既然A有界，便存在一个"立方体"$C=\bigtimes_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$，适合$A\subset C$. 上段结论和Tihonov定理（6.43）则表明C是紧的. 利用A是闭集这一事实，再引用（6.39），便看出A是紧的.

---

①所谓度量空间X的子集A是**有界的**，指的是存在$p\in X$及$\beta\in R$，使对于一切$x\in A$，都有$\rho(p,x)\leqslant\beta$.

反过来，假定A是紧的．由(6.38)，A是闭集．显然$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k(0)=R^n$，其中$B_k(0)$是$R^n$中以$0=(0,0,\cdots,0)$为中心、$k$为半径的**开球**．既然$A$是紧的，便存在$k_0\in N$，使得$A\subset B_{k_0}(0)$，这就是说，$A$是有界的．□

(6.45) **习题** 试证明以下命题：

(a) 度量空间的任意紧子集是有界的．

(b) 对任意度量空间而言，定理(6.44)不成立．

(c) R^n(或K^n)中的任意有界序列都有收敛子序列．

下面我们着手研究度量空间的紧性．

(6.46) **定义** 设(x_n)是度量空间X中的序列，如果对于每个$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使得只要$m,n\geqslant n_0$，就有$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$，就说$(x_n)$是一个**Cauchy序列**．如果度量空间$X$中的每个Cauchy序列都收敛于$X$的点，就说$X$是**完备的**．

(6.47) **例** 实直线R是完备的(5.25)，(5.35)．另外也不难看出，完备度量空间的子集为完备的，其充要条件是它为闭集．

(6.48) **定理** 凡紧度量空间都是完备的．

证 设X是一个紧度量空间，(x_n)是X中的Cauchy序列．那么(x_n)有一个子序列(x_{n_k})收敛于某个$x\in X$．设给定$\varepsilon>0$，取n_0，$k_0\in N$，使当$m,n\geqslant n_0$时$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon/2$，当$k\geqslant k_0$时$\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$．取$k_1\geqslant k_0$，使$n_{k_1}\geqslant n_0$．那么$n\geqslant n_{k_1}$时

$$\rho(x_n,x)\leqslant\rho(x_n,x_{n_{k_1}})+\rho(x_{n_{k_1}},x)$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，从而$X$是完备的．□

(6.49) **定理** 度量空间中的Cauchy序列都是有界序列．

证 设(x_n)是度量空间X中的Cauchy序列．取$n_0\in N$，使得$n\geqslant n_0$蕴涵$\rho(x_n,x_{n_0})<1$．命$\alpha=\max\{1,\rho(x_1,x_{n_0}),\cdots,\rho(x_{n_0-1},x_{n_0})\}$．那么对于每个$n\in N$，$\rho(x_n,x_{n_0})\leqslant\alpha$．□

(6.50) **定理** 设$n\in N$. 则关于Euclid度量，R^n和K^n都是完备的.

证 设$X=R^n$或$X=K^n$，$(\boldsymbol{x}_k)$是X中的Cauchy序列. 既然$(\boldsymbol{x}_k)$有界(6.49)，便存在一个实数β，使对于每个$k\in N$，$\rho(0,\boldsymbol{x}_k)\leqslant\beta$. 那么$(\boldsymbol{x}_k)$是紧度量空间$(B_\beta(0))^-$中的Cauchy序列(6.44)，所以$(\boldsymbol{x}_k)$收敛(6.48). □

(6.51) **定义** 设A是度量空间X中的非空有界集. 所谓A的**直径**指的是数值

$$\operatorname{diam}(A)=\sup\{\rho(x,y):x,y\in A\}.$$

(6.52) **定理**(Cantor) 设X是一个度量空间. 则X完备的充要条件是只要(A_n)是X的非空闭子集的递减序列，也就是说$A_1\supset A_2\supset\cdots$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_n)=0$，那么对于某个$x\in X$，就有$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\}$.

证 假设(A_n)是X的非空闭子集的递减序列，并且$\operatorname{diam}(A_n)\to0$. 对于每个$n\in N$，设$x_n\in A_n$. 那么$m\geqslant n$蕴涵$\rho(x_m,x_n)\leqslant\operatorname{diam}(A_n)\to0$. 所以$(x_n)$是Cauchy序列. 命$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 对于每个$m$，$x_n\in A_m$对于一切大$n$都成立，而$A_m$是闭集，所以$x\in A_m$. 于是$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 如果$x'\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，那么对于任意$n$，都有$\rho(x,x')\leqslant\operatorname{diam}(A_n)$. 因而$\rho(x,x')=0$. 由此$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\}$.

反过来，假设X具有递减闭集性. 设(x_n)是X中的Cauchy序列. 对于每个$n\in N$，命$A_n=\{x_m:m\geqslant n\}^-$. 那么$(A_n)$是递减闭集序列，既然$(x_n)$是Cauchy序列，便有$\operatorname{diam}(A_n)\to0$. 设$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\}$. 如果$\varepsilon>0$，则有$n_0\in N$，使$\operatorname{diam}(A_{n_0})<\varepsilon$. 但是$x\in A_{n_0}$，所以由$n\geqslant n_0$推出$\rho(x_n,x)<\varepsilon$. □

(6.53) **定义** 设X是一个拓扑空间. 所谓集$A\subset X$是**无处稠**

密的，指的是$A^{-\circ}=\varnothing$.所谓集$F\subset X$是**第一范畴集**，指的是F是可数个无处稠密集之并．称X的所有其他子集为**第二范畴集**．

(6.54) Baire范畴定理 设X是一个完备度量空间．假定$A\subset X$，而A是X中的第一范畴集．则$X\cap A'$在X中稠密．于是X（作为X本身的子集）是第二范畴集．

证 命$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，其中每个$A_n$在$X$中无处稠密．假定每个$A_n$是闭集（充其量这使$X\cap A'$变小）．设$V$是$X$的任意非空开子集．我们来证$V\cap A'\neq\varnothing$.取一个非空开集$U_1\subset V$，适合$\operatorname{diam}(U_1^-)<1$．比方说可取$U_1$为半径小于$\frac{1}{2}$的一个开球．那么$U_1$并不是$A_1$的子集，所以$U_1\cap A_1'$是非空开集．设$U_2$是一个非空开集，适合$U_2^-\subset U_1\cap A_1'$，$\operatorname{diam}(U_2^-)<\frac{1}{2}$．假设$U_1$，…，$U_n$已经选好了，满足：$U_{j+1}$是非空开集，$U_{j+1}^-\subset U_j\cap A_j'$以及对于$1\leqslant j\leqslant n-1$，有$\operatorname{diam}(U_{j+1}^-)<\frac{1}{j+1}$．那么$U_n\cap A_n'\neq\varnothing$，所以必存在非空开集$U_{n+1}$，适合$U_{n+1}^-\subset U_n\cap A'_n$，并且$\operatorname{diam}(U_{n+1}^-)<\frac{1}{n+1}$．因此得到一串递减非空闭集序列$(U_n^-)$，满足$\operatorname{diam}(U_n^-)\to 0$．既然$X$是完备的，所以必存在$x\in X$，使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n^-=\{x\}$．于是$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{n+1}^-\subset U_1\cap\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n'\subset V\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)'=V\cap A'$．既然$V$是任意的，可见$A'$在$X$中稠密．□

在整个分析学里，Baire范畴定理有着许多引人注目的重要应用．在后续内容里，此类应用屡见不鲜．这里暂且只举一个应用例子，这个例子虽然很有意思，但价值不大．

(6.55) 定义 设X是一个拓扑空间，$A\subset X$．如果集A是可数个开集之交，那么A叫做$\boldsymbol{G}_\delta$**集**；如果A是可数个闭集之并，那么A叫做$\boldsymbol{F}_\sigma$**集**．

(6.56) 定理 有理数集Q不是R中的G_δ集．

证 倘若$Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n$，其中每个$U_n$是$R$中的开集．则每个$U_n'$

无处稠密，这是因为U'_n是闭集，它并不包含有理数. 设$Q=(x_n)_{n=1}^{\infty}$是Q的一个枚举(4.22). 那么$R=\bigcup_{n=1}^{\infty}(U'_n\cup\{x_n\})$. 但是对于每个$n\in N$，$U'_n\cup\{x_n\}$无处稠密，而$R$是完备度量空间. 这就与(6.54)相矛盾. □

下面我们考察R的开子集与闭子集的结构.

(6.57) 定义 设A是$R^\#$的一个非空子集. 如果A在R中没有上（下）界，就说A的上（下）确界是$\infty(-\infty)$，并记作$\sup A=\infty$（$\inf A=-\infty$）.

(6.58) 评注 考虑到(5.33)及(6.57)，因此R的任意非空子集，在$R^\#$中既有上确界又有下确界.

(6.59) 定理 设U是R的一个非空开子集. 则R有一个且仅有一个两两不相交的开区间族$\mathscr{I}$，满足$U=\bigcup\mathscr{I}$. 又族$\mathscr{I}$可数，$\mathscr{I}$的元叫做U的**构成区间**（或**支区间**）. 对于每个$I\in\mathscr{I}$，I的端点都不属于U.

证 设$x\in U$，并规定$a_x=\inf\{t:]t, x]\subset U\}$，$b_x=\sup\{t: [x, t[\subset U\}$. 既然$U$是开集，在$R^\#$中$a_x$与$b_x$无疑是存在的. 首先我们断言$]a_x, b_x[\subset U$. 先证$]a_x, x]\subset U$. 如果$a_x\in R$，则命$x_n=a_x+\frac{1}{n}$；如果$a_x=-\infty$，则命$x_n=-n$. 在两种情况下，都有$a_x=\inf\{x_n: n\in N\}$. 根据$a_x$的定义推知：对于每个充分大的$n\in N$，存在实数$t_n$，适合$a_x\leqslant t_n<x_n$，$]t_n, x]\subset U$. 于是$]a_x, x]=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}]x_n, x]\subset\bigcup_{n=n_0}^{\infty}]t_n, x]\subset U$. 同样可证$[x, b_x[\subset U$，从而$]a_x, b_x[\subset U$.

其次证$a_x\notin U$，$b_x\notin U$. 倘若$b_x\in U$，既然U是开集，便有$\delta>0$，使$]b_x-\delta, b_x+\delta[\subset U$. 但另一方面却有$[x, b_x+\delta[=[x, b_x[\cup[b_x, b_x+\delta[\subset U$及$b_x+\delta>b_x$. 这就违背$b_x$的定义. 于是$b_x\notin U$. 同样可证$a_x\notin U$.

命$\mathscr{I}=\{]a_x, b_x[: x\in U\}$. 因为$x\in U$蕴涵$x\in]a_x, b_x[$，所以

有$U=\bigcup\mathscr{I}$. 现在来证明$\mathscr{I}$是一个两两不相交的族. 设x, $y\in U$, 并假定存在$u\in]a_x, b_x[\cap]a_y, b_y[$. 如果$a_x<a_y<u$, 那么$a_y\in U$; 如果$a_y<a_x<u$, 那么$a_x\in U$. 但是$a_x$, a_y都不属于U, 因而$a_x=a_y$. 同样可证$b_x=b_y$. 从而$\mathscr{I}$中任意两个区间或者不相交, 或者重合, 这就是说, $\mathscr{I}$是两两不相交的.

对于每个$I\in\mathscr{I}$, 存在一个有理数$r_I\in I$. 既然$\mathscr{I}$是两两不相交的, 所以$\mathscr{I}$到Q内的映射$f:I\to r_I$是1-1的, 从而$\overline{\overline{\mathscr{I}}}\leqslant\overline{\overline{Q}}=\operatorname{card}N$. 于是$\mathscr{I}$可数.

尚需证明$\mathscr{I}$是唯一的. 为此, 假定$U=\bigcup\mathscr{J}$, 其中$\mathscr{J}$是一个两两不相交的开区间族. 设$]a, b[\in\mathscr{J}$. 倘若$a\in U$,则存在区间$]c,d[\in\mathscr{J}$, 使$a\in]c, d[$. 于是$]a, b[\neq]c, d[$, 但$]a, b[\cap]c, d[=]a, \min\{b, d\}[\neq\varnothing$. 这一矛盾说明$a\notin U$. 同样可证$b\notin U$. 设$x\in]a, b[$. 那么$]a, x]\subset U$, $[x, b[\subset U$, 所以$]a, b[\subset]a_x, b_x[\subset U$. 既然$a\notin U$, $b\notin U$, 则必有$]a, b[=]a_x,b_x[\in\mathscr{I}$. 因此$\mathscr{J}\subset\mathscr{I}$. 倘若存在$]a_x, b_x[\in\mathscr{I}\cap\mathscr{J}'$, 那么$x\in U$, 而$x\notin\bigcup\mathscr{J}=U$, 矛盾, 因而$\mathscr{I}=\mathscr{J}$. □

(6.60) **评注** R中的开集具有简单的结构, 但在维数大于1的Euclid空间中却没有与之类似的结构. 比如说, 在平面R^2中, 开圆盘所起的作用与直线上开区间所起的作用是一样的——它们都是开集的构造单元, 即拓扑的基. 但是, 显而易见, 开正方形$\{(x, y):0<x<1, 0<y<1\}$并不是不相交的开圆盘之并. 因为倘若它是这样的并, 那么对角集$\{(x, x):0<x<1\}$就会是(一个以上)不相交的开区间之并, 而这与(6.59)的唯一性结论相矛盾.

R的闭子集也没有象开子集那么简单的结构. 以下几段要阐明, 这一颇为复杂的结构, 先引进一个定义.

(6.61) **定义** 设X是一个拓扑空间, $A\subset X$, 点$a\in A$. 如果a不是A的极限点, 也就是说, 如果存在a的一个邻域U, 使得$U\cap A=\{a\}$, 则a叫做**A的孤立点**. 集A说是**完全的**, 是指它是闭集, 且没有孤立点, 就是说A等于它自己的极限点集.

现在我们来构造$[0, 1]$内很广泛的一类无处稠密的完全子集.

(6.62) 定义 从$[0, 1]$的中间去掉任意一个长度小于1的开区间$I_{1,1}$.这时剩下两个不相交的闭区间$J_{1,1}$和$J_{1,2}$,每一个的长度$<\frac{1}{2}$. 这就完成了构造过程的第一步. 设已完成了构造过程的第n步,剩下2^n个不相交的闭区间$J_{n,1}$, $J_{n,2}\cdots$, $J_{n,2^n}$(从左到右编号),每一个的长度$<\frac{1}{2^n}$,则施行第$n+1$步截取手续如下:从$J_{n,k}$的中间去掉长度小于$J_{n,k}$长度的任意一个开区间$I_{n+1,k}$($1\leqslant k\leqslant 2^n$).这时剩下$2^{n+1}$个闭区间$J_{n+1,1}$, $J_{n+1,2},\cdots,J_{n+1,2^{n+1}}$,每一个的长度$<\frac{1}{2^{n+1}}$. 命$V_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$, $P_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$($n\in N$). 又命$P=\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n=[0,1]\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right)'$. 照以上方法所构造的任意一个集$P$都称为**Cantor型集**. 如果$I_{1,1}=\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, $I_{n+1,k}$的长度刚好等于$J_{n,k}$长度的$\frac{1}{3}$(对于一切k, $n\in N$, $1\leqslant k\leqslant 2^n$),这时所得到的集$P$称为**Cantor三分点集**(或简称**Cantor集**).在后一种情况, $J_{1,1}=\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $J_{1,2}=\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $I_{2,1}=\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$, $I_{2,2}=\left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[$, $J_{2,1}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$等等.

(6.63) 定理 设P是任意一个Cantor型集. 则P是R中的无处稠密的紧集, P还是完全集.

证 我们沿用(6.62)的记号. 显然每个P_n是闭集,所以P是有界闭集,因而是紧集(6.44). 因为P_n不含有长度$\geqslant\frac{1}{2^n}$的区间,且对于每个$n\in N$,有$P\subset P_n$,可见P不含有区间.这样一来,$P^{-\circ}=$ $=P^\circ=\varnothing$;也就是说,P在R中无处稠密.

其次设$x\in P$. 对于每个$n\in N$,我们有$x\in P_n$,所以存在k_n,使$x\in J_{n,k_n}$. 于是,给定$\varepsilon>0$,就有$n\in N$,使$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,因此$J_{n,k_n}$的端点都属于$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. 但这些端点都是属于$P$的。所以$x$乃是$P$的一个极限点. 我们得出结论:$P$是完全集. □

(6.64) **定理** 设P是Cantor三分点集. 则

$$P=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}: 对于每个\ n\in N,\ x_n\in\{0,\ 2\}\right\},$$

因此有$\overline{\overline{P}}=\mathfrak{c}$.

证 每个数$x\in[0,\ 1]$具有形如$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$(其中每个$x_n$是0, 1或2)的三进制展开式. 这个展开式是唯一的, 只除去一种情况: 对于若干$a,\ m\in N$(这里$0<a<3^m$, 3不能除尽a)$x=\frac{a}{3^m}$. 这时x具有形如$x=\frac{x_1}{3}+\cdots+\frac{x_m}{3^m}$的有限展开式, 其中$x_m=1$[$a\equiv 1(\mathrm{mod}3)$时]或$x_m=2$[$a\equiv 2(\mathrm{mod}3)$时]. 当$x_m=2$时, 就用$x$的这一有限展开式, 但当$x_m=1$时, 我们宁可采用展开式$x=\frac{x_1}{3}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{3^{m-1}}+\frac{0}{3^m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$. 我们留给读者来验证这些断言[参见(5.40)]. 这样一来, 我们指定了每个$x\in[0,\ 1]$的唯一三进制展开式. 根据归纳法看出, $P_n=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1,\ \{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset\{0,\ 2\}\}$. 例如$P_1=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$, $P_2=\left[0,\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\ 1\right]$(记作$\frac{1}{3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}$). 于是, 当且仅当对于每个$n\in N$, 有$x_n\in\{0,2\}$时, $x\in P=\bigcap_{n=1}^{\infty}P_n$. 显然, 映射$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\to(x_n)$是$P$与$\{0,2\}^N$之间的1-1对应关系. 因此$\overline{\overline{P}}=2^{\mathrm{card}N}=\mathfrak{c}$. □

鉴于以下定理, Cantor集具有基数$\mathfrak{c}$则并不是偶然的.

(6.65) **定理** 设X是一个完备度量空间, A是X的一个非空完全子集. 则$\overline{\overline{A}}\geqslant\mathfrak{c}$.

证 我们来构造$\{0,1\}^N$到A内的一个1-1映射. 既然A非空, 它便有一个极限点, 因而A是无限集(6.26). 设在A中$x_0\neq x_1$. 命$\varepsilon_1=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\rho(x_0,\ x_1)\right\}$, 并规定$A(0)=\{x\in A: \rho(x_0,x)\leqslant\varepsilon_1\}$,

$A(1)=\{x\in A: \rho(x_1, x)\leqslant\varepsilon_1\}$. 那么$A(0)$, $A(1)$是直径$\leqslant 1$的不相交的无限闭集. 假定n是正整数,又假定对于每个n元组$(a_1,\cdots,a_n)\in\{0, 1\}^n$, 都有$A$的一个无限闭子集$A(a_1, \cdots,a_n)$, 且直径$\leqslant\frac{1}{n}$,而这些集的任意两个都没有公共点. 设$(a_1,\cdots,a_n)\in\{0,1\}^n$, 在$A(a_1, \cdots,a_n)$中取$x(a_1, \cdots, a_n, 0)\neq x(a_1, \cdots, a_n, 1)$, 又命$\varepsilon_{n+1}=\min\left\{\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{3}\rho(x(a_1, \cdots, a_n, 0), x(a_1, \cdots, a_n, 1))\right\}$. 规定$A(a_1, \cdots, a_n, j)=\{x\in A(a_1, \cdots, a_n): \rho(x(a_1, \cdots, a_n, j), x)\leqslant\varepsilon_{n+1}\}(j=0, 1)$. 那么$\{A(a_1, \cdots, a_{n+1}): (a_1, \cdots, a_{n+1})\in\{0, 1\}^{n+1}\}$是两两不相交的无限闭集所成的集族, 而每个集的直径$\leqslant\frac{1}{n+1}$. 于是对于每个$\boldsymbol{a}=(a_n)\in\{0, 1\}^N$, 便有$A$的一个无限闭子集所成的递减序列$(A(a_1, \cdots, a_n))_{n=1}^{\infty}$, 其直径趋于零. 所以, 根据Cantor定理(6.52), 必存在一点$x(\boldsymbol{a})\in A$, 使得$\bigcap_{n=1}^{\infty} A(a_1,\cdots,a_n)=\{x(\boldsymbol{a})\}$. 假设在$\{0,1\}^N$中$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 那么, 对于某个$n_0$, 就有$a_{n_0}\neq b_{n_0}$, 所以$x(\boldsymbol{a})\in A(a_1, \cdots, a_{n_0})$, 而$x(\boldsymbol{b})\notin A(a_1, \cdots, a_{n_0})$, 因之$x(\boldsymbol{a})\neq x(\boldsymbol{b})$. 由此可见,映射$\boldsymbol{a}\to x(\boldsymbol{a})$是1-1的. 于是$\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{\{0, 1\}^N}}=\mathfrak{c}$. □

以下介绍闭集的结构定理.

(6.66) **定理** (Cantor-Bendixson) 设X是一个拓扑空间, 并具有其拓扑的一个可数基$\mathscr{B}$, 又设A是X的任意一个闭子集. 则X含有一个完全子集P以及一个可数子集C, 适合$A=P\cup C$.

证 一个点$x\in X$叫做A的**凝点**, 是指对于x的每个邻域U,$U\cap A$是不可数集. 命$P=\{x\in X: x是A的凝点\}$, 又命$C=A\cap P'$. 由于凡凝点都是极限点, 由此推知$P\subset A$. 显然$A=P\cup C$. 因为C的点不是A的凝点, 所以每个$x\in C$有一个邻域$V_x\in\mathscr{B}$, 使得$A\cap V_x$可数. 但$\mathscr{B}$可数, 所以$C\subset\bigcup\{A\cap V_x: x\in C\}$, 从而$C$可数.

其次设$x\in P$, U是x的一个邻域. 那么$U\cap A$不可数, 而$U\cap C$可数, 所以$U\cap P=(U\cap A)\cap(U\cap C)'$不可数, 从而$x$是$P$的一个极限点. 这样$P$便没有孤立点. 为了证实$P$是闭集, 设$x\in P'$. 那么$x$

有一个邻域V，使得$V\cap A$可数，倘若存在一个$y\in V\cap P$，那么V是y的一个邻域，而且y还是A的一个凝点，所以$V\cap A$就不可数了．由此可见$V\cap P=\varnothing$，因此x并不是P的极限点，从而P含有它的全部极限点，这就是说，P是闭集．我们得出结论，P是完全集．□

(6.67) 评注 鉴于(6.21)及(6.23)，凡 Euclid 空间都满足(6.66)的所设条件．

现在简要研究一下连续性．

(6.68) 定义 设X和Y是两个拓扑空间，f是X到Y内的一个函数．称f**在一点**$x\in X$**连续**，是指对于$f(x)$的每个邻域V，存在x的邻域U，适合$f(U)\subset V$．称函数f**在**X**上连续**，是指f在X的各点都连续．

(6.69) 定理 X，Y及f如(6.68)所设．则f在X上连续的充要条件是只要V是Y中的开集，$f^{-1}(V)$就是X中的开集．

证 假设f在X上连续，V是Y中的开集．须证$f^{-1}(V)$是X中的开集．对于$x\in f^{-1}(V)$，因为已知f在x连续，所以存在x的邻域U_x，使$f(U_x)\subset V$，也就是说，$U_x\subset f^{-1}(V)$．由此可见，$f^{-1}(V)=\bigcup\{U_x: x\in f^{-1}(V)\}$，右边是开集之并，所以$f^{-1}(V)$是开集．

反过来，假设只要V是Y中的开集，则$f^{-1}(V)$就是X中的开集．命$x\in X$，而V是$f(x)$的一个邻域．那么$f^{-1}(V)$就是x的一个邻域，并且$f(f^{-1}(V))\subset V$．于是f在x连续．既然x是任意的，f便在X上连续．□

(6.70) 定理 X，Y及f如(6.68)所设．假定$\mathscr{S}$是Y的拓扑的一个次基，并假定对于任意的$S\in\mathscr{S}$，$f^{-1}(S)$是X中的开集．则f在X上连续．

证 设$\mathscr{B}$是形如$B=\bigcap_{j=1}^{n}S_j$（其中$\{S_1, \cdots, S_n\}$是$\mathscr{S}$的有限子族）的集全体所成的集族．那么$\mathscr{B}$是Y的拓扑的一个基(6.10)，又对于任意$B\in\mathscr{B}$，$f^{-1}(B)=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-1}(S_j)$是开集，因为它是开集

的有限交. 其次，设V是Y中的开集。那么对于某个族$\{B_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{B}$，有$V=\bigcup_{i\in I}B_i$. 由此$f^{-1}(V)=f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$是$X$中的开集，因为它是开集之并. □

(6.71) **定理** X,Y及f如(6.68)所设. 假定X是一个度量空间，$x\in X$. 则f在x连续的充要条件是只要(x_n)是X中的序列，且$x_n\to x$，就有$f(x_n)\to f(x)$.

证 假设只要$x_n\to x$，就有$f(x_n)\to f(x)$，并假定f在x不连续. 那么便有$f(x)$的邻域V，而并没有x的一个邻域U，能满足$f(U)\subset V$. 对于每个$n\in N$，取$x_n\in B_{\frac{1}{n}}(x)$，使$f(x_n)\notin V$. 那么$x_n\to x$，但$f(x_n)$不收敛于$f(x)$. 这一矛盾证明了$f$在$x$连续.

反过来，假定f在x连续，设(x_n)是X中适合$x_n\to x$的任意序列. 又设V是$f(x)$的任意邻域. 则有x的邻域U，适合$f(U)\subset V$. 既然$x_n\to x$，便存在$n_0\in N$，使当$n\geqslant n_0$时，有$x_n\in U$. 那么当$n\geqslant n_0$时，就有$f(x_n)\in f(U)\subset V$. 于是$f(x_n)\to f(x)$. □

(6.72) **定理** X，Y及f如(6.68)所设. 假定X是紧的，f在X上连续. 则$f(X)$是Y的紧子空间.

证 设$\mathscr{V}$是$f(X)$的任意开覆盖. 那么$\{f^{-1}(V):V\in\mathscr{V}\}$是$X$的开覆盖，所以存在$V_1,\cdots,V_n\in\mathscr{V}$，使$X=\bigcup_{k=1}^{n}f^{-1}(V_k)=f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{n}V_k)$. 由此可见$f(X)\subset\bigcup_{k=1}^{n}V_k$. □

(6.73) **推论** 设X是一个紧空间，f是X上的一个连续实值函数. 那么f有界〔就是说，$f(X)$是有界集〕，且X中存在两点a，b，使$f(a)=\sup\{f(x):x\in X\}$，$f(b)=\inf\{f(x):x\in X\}$.

证 根据(6.72)，$f(X)$是R的紧子空间. 于是$f(X)$是有界闭集(6.44). 命$\alpha=\sup f(X)$，$\beta=\inf f(X)$. 既然$f(X)$有界，便有α，$\beta\in R$，既然$f(X)$还是闭集，又有α，$\beta\in f(X)$. 取$a\in f^{-1}(\{\alpha\})$，$b\in f^{-1}(\{\beta\})$. □

(6.74) **定理** 设A，B和C都是拓扑空间. 又设f是A到B内的

一个函数，g是B到C内的一个函数，$x\in A$. 假定f在x连续，g在$f(x)$连续，则$g\circ f$在x也连续.

证 设W是$g\circ f(x)=g(f(x))$的任意一个邻域.那么有$f(x)$的邻域V，适合$g(V)\subset W$. 既然f在x连续，便有x的邻域U,适合$f(U)\subset V$. 这样就找到了x的邻域U，适合$g\circ f(U)=g(f(U))\subset g(V)\subset W$. □

(6.75) **推论** A, B, C, f及g如(6.74)所设. 假定f在A上连续，g在B上连续，则$g\circ f$在A上也连续.

(6.76) **定理** 设X, Y是两个拓扑空间，f是X到Y内的一个连续函数. 又设$S\subset X$. 则函数f（其定义域限制在S上）是S（具有相对拓扑）到Y内的连续函数.

证 设$x\in S$, V是$f(x)$的邻域. 那么有x的邻域U（X中的开集），使$f(U)\subset V$. 但另一方面，在S上的相对拓扑中，$U\cup S$是x的邻域，并且$f(U\cap S)\subset f(U)\subset V$. □

以下论述局部紧空间. 后面研究测度论时，这些空间具有极其重要的意义.

(6.77) **定义** 拓扑空间X说是**局部紧的**，是指每个点$x\in X$都有一个邻域U，使得U^-是紧的①.

(6.78) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间.又设$x\in X$，U是x的邻域. 则存在x的一个邻域V，使得V^-是紧的，且$V^-\subset U$.

证 设W是满足W^-是紧的x的任意一个邻域. 命$G=U\cap W$. 那么G是x的邻域；由于G^-是W^-的闭子集，由(6.39)推知G^-是紧的. 我们有$G\subset U$，但不能辨别是否$G^-\subset U$. 忆及(6.7.vii)，$\partial G=G^-\cap G^{0\prime}=G^-\cap G'$. 于是$\partial G$是紧的(6.39). 如果$\partial G=\varnothing$，则不妨设$V=G$. 因此假定$\partial G\neq\varnothing$. 对于每个$y\in\partial G$，分别选取$x$和$y$的邻域$V_y$和$H_y$，适合$V_y\cap H_y=\varnothing$. 不妨设$V_y\subset G$，因为另一种

---

①许多作者定义局部紧如下："拓扑空间X说是**局部紧的**，是指每个点$x\in X$都有一个紧邻域."不难明白，在Hausdorff空间中，这一定义等价于定义(6.77). ——译者注

情况是与G相交. 于是$\{H_y: y\in\partial G\}$是∂G的一个开覆盖, 而根据紧性, 必存在$y_1, \cdots, y_n\in\partial G$, 使$\partial G\subset H_{y_1}\cup\cdots\cup H_{y_n}=H$. 命$V=V_{y_1}\cap\cdots\cap V_{y_n}$. 那么$V$是$x$的一个邻域, 且$V\cap H=\varnothing$. 显然有$V\subset G$, 所以$V^-\subset G^-$, 从而$V^-$是紧的. 此外$V\subset H'$, 而$H'$是闭集, 因此$V^-\subset H'$. 这样一来, $V^-\subset G^-\cap H'\subset G^-\cap(\partial G)'=G$. □

(6.79) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间, A是X的一个紧子空间. 假定U是X的开子集, 它满足$A\subset U$. 则存在一个开集$V\subset X$, 满足$A\subset V\subset V^-\subset U$, 并且$V^-$是紧的.

证 把(6.78)应用于每个$x\in A$. 则对于每个$x\in A$, 存在x的一个邻域V_x, 使得V_x^-是紧的, 且$V_x^-\subset U$. 因为族$\{V_x: x\in A\}$乃是A的开覆盖, 所以存在$x_1, \cdots, x_n\in A$, 适合$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}V_{x_k}=V$. 那么$V^-=\bigcup_{k=1}^{n}V_{x_k}^-\subset U$(6.7.viii), 既然$V^-$是有限个紧集之并, 它显然是紧的. □

以下Urysohn引理的局部紧说法, 已能满足我们的需要.

(6.80) 定理 (Urysohn) 设X是一个局部紧Hausdorff空间, A是X的一个紧子空间, 又设U是开集, $A\subset U$. 则存在X到$[0, 1]$内的一个连续函数f, 使对于任意$x\in A$, $f(x)=1$, 而对于任意$x\in U'$, $f(x)=0$.

证 命$D_0=\{0,1\}$, 又对于每个$n\in N$, 规定$D_n=\{\frac{a}{2^n}: a\in N, a$是奇数, $0<a<2^n\}$. 命$D=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n$. 于是$D$是$[0, 1]$内二进有理数全体所成的集. 通过施归纳于$n$来定义$X$的子集链$\{U_t\}_{t\in D}$. 先设$U_1=A$, $U_0=U$. $n=1$时, $D_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, 又利用(6.79), 得到一个开集$U_{\frac{1}{2}}$, 它满足$U_1^-\subset U_{\frac{1}{2}}\subset U_{\frac{1}{2}}^-\subset U_0$. 再设$n\geqslant 2$, 并假定对于一切$t\in\bigcup_{k=1}^{n-1}D_k$定义好了开集$U_t$, 使得在$\bigcup_{k=0}^{n-1}D_k$中$s<t$蕴涵$U_t^-\subset$

U_s. 对于$t=\frac{a}{2^n}\in D_n$，命$t'=\frac{a-1}{2^n}$，$t''=\frac{a+1}{2^n}$，并注意到$U_{t'}$和$U_{t''}$也定义好了($a-1$，$a+1$都是偶数)．再利用(6.79)得到一个开集U_t，它满足$U_{t''}^-\subset U_t\subset U_t^-\subset U_{t'}$．这样一来，我们就得到所要求的族$\{U_t\}_{t\in D}$，而且只要在$D$中$s<t$，就有$U_t^-\subset U_s$.

然后在X上规定f如下：$x\in U_0'$时，$f(x)=0$；$x\in U_0$时，$f(x)=\sup\{t\in D: x\in U_t\}$．显然对于任意$x\in A=U_1$，都有$f(x)=1$．尚需证明$f$是连续的．为此，设$0\leqslant\alpha<1$，$0<\beta\leqslant 1$．显然当且仅当对于某个$t>\alpha$，$x\in U_t$时，$f(x)>\alpha$,因而$f^{-1}(]\alpha,1])=\cup\{U_t: t\in D, t>\alpha\}$，它还是开集．同样，当且仅当对于任意$s<\beta$，$x\in U_s$时，$f(x)\geqslant\beta$，因而$f^{-1}([\beta, 1])=\cap\{U_s: s\in D, s<\beta\}=\cap\{U_t^-: t\in D, t<\beta\}$，它还是闭集，取余集便看出$f^{-1}([0, \beta[)$是开集．这些事实以及(6.70)说明$f$是连续的．□

现在我们研究实数列的上极限和下极限概念.

(6.81) **定义** $R^\#$中的**非减**(**非增**)序列指的是这样的序列$(x_n)\subset R^\#$①，即当$m\leqslant n$时有$x_m\leqslant x_n(x_m\geqslant x_n)$．序列$(x_n)\subset R^\#$说是有极限$\infty(-\infty)$，是指对于每个$\alpha\in R$，都对应着$n_\alpha\in N$，使当$n\geqslant n_\alpha$时有$x_n\geqslant\alpha(x_n\leqslant\alpha)$，并记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$)，或记作$x_n\to\infty(x_n\to-\infty)$．一个序列，如果它或是非减的，或是非增的，便叫做**单调的**.

(6.82) **定理** $R^\#$中的单调序列在$R^\#$中必有极限.

证 设(x_n)是非减的，命$x=\sup\{x_n: n\in N\}$．那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

□

(6.83) **定义** 设(x_n)是$R^\#$中的任意一个序列．(x_n)**的上极限**规定为广义实数

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\inf_{k\in N}(\sup_{n>k}x_n),$$

(x_n)**的下极限**则规定为广义实数

①参看(2.18)译注.——译者注

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\sup_{k\in N}(\inf_{n\geq k} x_n).$$

显而易见，序列$(\sup_{n\geq k} x_n)_{k=1}^{\infty}$和$(\inf_{n\geq k} x_n)_{k=1}^{\infty}$都是单调的，而$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$和$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$刚好就是它们各自的极限．因此也经常用另外的记法：

$\limsup_{n\to\infty} x_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$，$\lim_{n\to\infty}\inf x_n=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

(6.84) **定理** 设(x_n)是$R^{\#}$中的一个序列，$L=\{x\in R^{\#}$：x是(x_n)的某个子序列的极限$\}$．则$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$和$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$都属于$L$，并且$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\inf L$，$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\sup L$.

证 我们只证明关于上极限的断言，因为另一个显然是对偶论证．命$x=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$，而对于每个$k\in N$，则命$y_k=\sup\{x_n: x\geq k\}$．那么$x=\inf\{y_k: k\in N\}$.

第一种情况：$x=\infty$．这时对于每个$k\in N$，$y_k=\infty$，因此对于每个$m\in N$，就有无穷多个$n\in N$，使$x_n>m$．取n_1，使得$x_{n_1}>1$．当n_1，…，n_m取好了，则取$n_{m+1}>n_m$，使$x_{n_{m+1}}>m+1$．那么$(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$是(x_n)的子序列，且$\lim_{m\to\infty} x_{n_m}=\infty$．这样，$x=\infty\in L$，从而显然有$x=\infty=\sup L$.

第二种情况：$x\in R$．我们有$x=\inf\{y_k: k\in N\}$．于是对于每个$\beta>x$，必存在$y_k<\beta$，因而仅对于有限个n（$n<k$），才成立$x_n>\beta$．这就证明L中没有元素能大于x．另一方面，因为对于任意k，$y_k\geq x$，所以对于每个$m\in N$，存在充分①大的n，能使$x_n>x-\frac{1}{m}$．我们得出结论：对于每个$m\in N$，$\{n\in N$：$x-\frac{1}{m}<x_n<x+\frac{1}{m}\}$是无限集．从而如同第一种情况，必能选取$(x_n)$的一个子序列$(x_{n_m})$，使$\lim_{m\to\infty} x_{n_m}=x$．因此$x\in L$.

第三种情况：$x=-\infty$．第二种情况已证得L中没有元素能大

---

①原书为arbitrarily（一般指"任意"），为确切起见，译文改为"充分"．——译者注

于x. 但对于每个$m\in N$，存在y_k，使$y_k<-m$. 这样，除了有限个$n\in N$外，对于其余$n\in N$都有$x_n\leqslant -m$；从而$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=-\infty=x$. □

(6.85) **习题** 设(X, ρ)是一个度量空间. 试证：

(a) 存在一个完备度量空间$(\overline{X},\overline{\rho})$以及$X$到$\overline{X}$内的一个函数，使得$f(X)$在$\overline{X}$中稠密，且对于一切$x,y\in X$，都有$\overline{\rho}(f(x), f(y))=\rho(x, y)$〔$(\overline{X}, \overline{\rho})$叫做$(X, \rho)$**的完备化**〕；

(b) $(\overline{X}, \overline{\rho})$在下述意义上是唯一的：如果$(Y,\sigma)$是完备度量空间，$g$是$X$到$Y$内的函数，且$g(X)$在$Y$中稠密，又对于一切$x,y\in X$，都有$\sigma(g(x), g(y))=\rho(x, y)$，那么存在一个$\overline{X}$到$Y$上的函数$h$，使对于一切$\alpha$, $\beta\in\overline{X}$都有$\sigma(h(\alpha), h(\beta))=\overline{\rho}(\alpha, \beta)$.（象$f$,$g$和$h$这样保持距离的函数叫做**等距**.）

〔提示 命$\mathfrak{C}$表示X中Cauchy序列全体所成的集. $\rho(x_n, y_n)\to 0$时，规定$(x_n)\sim(y_n)$. 设$\overline{X}$是等价类集，规定$\overline{\rho}(\alpha, \beta)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)$，其中$(x_n)\in\alpha$, $(y_n)\in\beta$.（参看§5有序域的完备化）.〕

(6.86) **习题** 设(X, ρ)是一个度量空间. 对于X的每个非空子集A以及每个$x\in X$，规定

$$\rho(x, A)=\inf\{\rho(x, a):a\in A\}.$$

数值$\rho(x, A)$叫做**x到A的距离**. 试证下列命题：

(a) 如果$\varnothing\neq A\subset X$，那么$A^-=\{x\in X: \rho(x, A)=0\}$.

(b) 如果$\varnothing\neq A\subset X$, x, $y\in X$，那么$|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leqslant\rho(x, y)$. 于是$X$上由$f(x)=\rho(x, A)$规定的函数$f$在$X$上连续.

(c) 如果A, B是X的两个非空不相交的闭子集，那么X上由

$$h(x)=\frac{\rho(x,B)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$$

规定的函数h在X上连续. 又$h(A)=\{1\}$, $h(B)=\{0\}$. 注意，这里提供了当X是度量空间时(6.80)的一个简便证法.

(6.87) **习题** 设(X, ρ)是一个度量空间，A和B是X的两个非空子集. **A到B的距离**规定为数值

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(a,b):a\in A,b\in\varepsilon\}.$$

试证下列断言：

(a) 如果A是紧的，那么存在一点$a\in A$，使$\rho(a,B)=\rho(A,B)$.

(b) 如果A和B都是紧的，那么存在两点$a\in A$，$b\in B$，使$\rho(a,b)=\rho(A,B)$.

(c) 如果A是紧集，B是闭集，那么$\rho(A,B)=0$的充要条件是$A\cap B\neq\varnothing$.

(d) 如果X是一个非紧度量空间，且没有孤立点，那么X含有两个非空不相交的闭集A，B，满足$\rho(A,B)=0$.

(6.88) **习题** 设X是一个非空完备度量空间. 假定f是X到X内的函数，且对于某个常数$c\in\,]0,1[$，以及对于一切x，$y\in X$，都有

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant c\rho(x,y)^{①}.$$

试证：存在唯一的一点$u\in X$，使得$f(u)=u$.〔命$x\in X$，并考虑序列x，$f(x)$，$f(f(x))$，…〕.本题结果即所谓的**Banach不动点定理**. 由这一定理可推出微分方程和积分方程理论中的若干存在性定理.

(6.89) **习题** 试证明闭区间$[0,1]$不能表成一族两两不相交的闭（非退化的）区间（每一个长度都小于1）之并.

(6.90) **习题** 假设：X是拓扑空间；Y是度量空间；f是X到Y内的函数. 对于每个$x\in X$，规定

$$\omega(x)=\inf\{\mathrm{diam}(f(U)):U\text{是}x\text{的邻域}\}.$$

函数ω叫做f**的振动函数**. 试证下列命题：

(a) 函数f在x连续的充要条件是$\omega(x)=0$.

(b) 对于每个实数α，$\{x\in X:\omega(x)<\alpha\}$是$X$中的开集.

(c) 集$\{x\in X:f\text{在}x\text{连续}\}$是$G_\delta$集.

(d) 不存在定义在R上的实值函数f，能使$\{x\in R:f\text{在}x\text{连续}\}$

---

①这时称f为**压缩映射**. ——译者注

$=Q$.

(e) 存在R上的实值函数f，使$\{x\in R: f$在x间断$\}=Q$.

(6.91) **习题** 试证明凡局部紧Hausdorff空间（作为自身的子集）都是第二范畴集.〔可仿照Baire范畴定理(6.54)的证法，构造一个适当的递减紧集序列.〕

(6.92) **习题** 设X是拓扑空间，Y是度量空间. 假定f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是X到Y内的函数，其中各个f_n都连续，且对于每个$x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. 命

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in X:\rho(f_m(x),f_n(x))\leqslant\frac{1}{k}\right\}\right]^{\circ}.$$

试证:

(a) f在A的各点都连续;

(b) $X\cap A'$是X中的第一范畴集; ①

(c) 如果X（本身）是第二范畴集，那么$\{x\in X: f$在x连续$\}$在X中稠密;

(d) 对于每个开集$V\subset Y$而言，$f^{-1}(V)$是F_σ集$\left[\text{可证明 } f^{-1}(V)=\right.$

$$\left.\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in X:\rho(f_n(x),V')\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right];$$

(e) 函数ξ_Q不是R上的连续实值函数序列的点态极限. ②

(f) 对于任意$x\in R$，试证$\xi_Q(x)=\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty}\{\cos(m!\ \pi x)\}^{2n}]$.

(g) 对于任意$x\in R$，试证$\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(nx)$.

(h) 对于任意$x\in R$，试证$1-\xi_Q(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{sgn}\{\sin^2(m!\ \pi x)\}$.

(6.93) **习题** 命$l_\infty'(N)$表示有界实数序列$x=(x_n)$全体所成的集. 设x, $y\in l_\infty'(N)$，规定$d(x, y)=\sup\{|x_n-y_n|: n\in N\}$.

---

①先证明：如果$(E_m)_{m=1}^{\infty}$是X的任意子集序列，那么

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m^-\subset\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m\right)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m^-\cap E_m'\right).$$

②忆及ξ_Q是Q的特征函数(2.20).

试证下列命题:

(a) 函数d是$l_\infty(N)$的度量.

(b) 度量空间$l_\infty(N)$不是可分的.

(c) 如果(X, ρ)是任意一个可分度量空间,那么存在一个X到$l_\infty(N)$内的等距,也就是说,对于任意$x, y \in X$,都有$d(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.〔设$(p_n)_{n=1}^\infty$在$X$中稠密,并规定$f(x) = (\rho(x, p_n) - \rho(p_n, p_1))_{n=1}^\infty$.〕

(6.94) **习题** 试证:如果X是一个紧度量空间,f是X到X内的一个等距,那么f映满X.

(6.95) **习题** 设X是一个局部紧Hausdorff空间,D是X的一个稠密子集,并且D关于相对拓扑是局部紧的.试证D是X中的开集.

(6.96) **习题** 设X是一个线性有序集.所谓X**的序拓扑**是指X上的这样一个拓扑,即它是由形如$\{x \in X: c < x\}$和$\{x \in X: x < d\}$(其中$c, d \in X$)的集全体所成的集族作为次基而得到的.试证:具有序拓扑的X是紧的,其充要条件是X的任意非空子集在X中既有上确界又有下确界.〔如同(6.44)的证明,可利用(6.40).〕

(6.97) **习题** (a) 试利用(6.96)证明:良序集(关于序拓扑)是紧的,其充要条件是它含有一个最大元素.

(b) 试利用(6.96)证明:具有通常拓扑的$R^\#$(6.5.b)是紧的.

(6.98) **习题** 试证:具有序拓扑(6.96)的可数序数〔参见(4.49)〕全体所成的集P_Ω是列紧的,但不是紧的.

(6.99) **习题** 设P是Cantor三分点集,并设$X = \{0,1\}^N$具有积拓扑,其中$\{0, 1\}$具有离散拓扑.对于$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in X$,规定$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$.根据(6.64),$\varphi$是把$X$映满$P$的1-1映射.试证$\varphi$和$\varphi^{-1}$都连续.

(6.100) **习题** 试证:如果Y是一个紧度量空间,P是Cantor三分点集,那么存在P到Y上的一个连续函数f.〔设$\{V_n\}_{n=1}^\infty$是Y的

拓扑的一个可数基. 对于每个$n\in N$，命$A_{n,0}=V_n^-$，$A_{n,1}=Y\cap V_n'$. 对于P中的一点$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n}$，集$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,x_n}$或者是空集，或者刚好含有一个点. 命$B=\left\{x\in P:\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,x_n}\neq\varnothing\right\}$，又对于每个$x\in B$，设$g(x)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,x_n}$. 证明$g$是$B$到$Y$上的连续函数. 然后证$B$是$P$中的闭集，并存在$P$到$B$上的一个连续函数$h$. 最后命$f=g\circ h$. 〕

(6.101) **习题**(Banach) 设f是$[a,b]\subset R$上的一个连续实值函数.

(a) 对于每个正整数n，命$F_n=\left\{x:\ x\in[a,b]，对于某个x'\geqslant x+\frac{1}{n},\ f(x')=f(x)\right\}$. 试证$F_n$是闭集.

(b) 命$E=[a,b]\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}F'_n$. 试证$f$是$E$上的1-1函数，且$f(E)=f([a,b])$. 事实上，每个$x\in E$等于$\sup\{y:\ y\in[a,b],\ f(y)=f(x)\}$. 注意，$E$是$G_\delta$集.

(6.102) **习题** 设f是一个实值函数，定义域是R，且在R的每一点都有相对极小值，也就是说，对于每个$a\in R$，存在数$\delta(a)>0$，使当$|t-a|<\delta(a)$时，有$f(t)\geqslant f(a)$.

(a) 试证$f(R)$是可数集.

(b) 试给出一个如上所述的函数，它无界，同时在含0的区间上不是单调的.

(6.103) **习题** 考虑一个函数f，它有定义域R，值域在R中，满足$f\circ f=f$，试全面表述f. 如果f还是连续的，还可表述什么？〔忆及R和$f(R)$都是连通的(6.9)，从而$f(R)$是一个区间. 〕如果f又是可微的，怎样呢？

(6.104)' **习题** 试证以下两个命题：

(a) 连通空间的连续象是连通的.

(b) Cartesian乘积$\underset{\iota\in I}{\times}X_\iota$是连通的，其充要条件是每个$X_\iota$都

是连通的.

§7 连续函数空间

函数——实值的和复值的——是本书主要研究对象. 已知一个集X以及定义在X上的一个函数集$\mathfrak{F}$，我们往往不仅对$\mathfrak{F}$中的某些个别函数f感兴趣，而且也关心作为一个实体或空间的$\mathfrak{F}$本身. $\mathfrak{F}$一般含有一个自然拓扑（或若干自然拓扑）——其本身以及对于证明有关$\mathfrak{F}$的一些事实都是很重要的. $\mathfrak{F}$还往往是K或R上的向量空间，而向量空间概念在研究关于$\mathfrak{F}$的解析问题时大有用处. 本节论述一类简单的函数空间——连续函数空间——以及这些空间的某个简单拓扑. 后文还要研究许多别的函数空间.

先引进几个定义和某些记号.

(7.1) **定义** 设X是任意一个非空集（尚无拓扑），并考虑定义在X上的复值函数全体所成的集K^X，对于f, $g\in K^X$，设$f+g$是K^X中如下所定义的函数

(i) 对于一切$x\in X$，成立$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

设fg定义为

(ii) 对于一切$x\in X$，成立$(fg)(x)=f(x)g(x)$;

对于$f\in K^X$, $\alpha\in K$，设αf定义为

(iii) 对于一切$x\in X$，成立$(\alpha f)(x)=\alpha(f(x))$.

对于$f\in K^X$，设$|f|$是适合以下条件的函数:

(iv) 对于一切$x\in X$，成立$|f|(x)=|f(x)|$,

而$\bar{f}$是适合以下条件的函数:

(v) 对于一切$x\in X$，成立$\bar{f}(x)=\overline{f(x)}$.

这就是说，我们**点态**定义了X上函数的和、积、纯量倍数、绝对值和复共轭. 显然可以把X上实值函数全体所成的集R^X看作K^X的一个子集，因此定义(i), (ii), (iii)（就实数α而言），(iv)及(v)（当且仅当$f\in R^X$时，$f=\bar{f}$），不仅对于K^X，而且对于R^X也是适

用的．此外，R^X还可有一个自然半序关系．对于f，$g\in R^X$，如果

(vi) 对于一切$x\in X$，成立$f(x)\leqslant g(x)$，

便记作$f\leqslant g$（或记作$g\geqslant f$）．定义$\max\{f, g\}$和$\min\{f, g\}$为

(vii) 对于一切$x\in X$，成立$\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，

(viii) 对于一切$x\in X$，成立$\min\{f,g\}(x)=\min\{f(x), g(x)\}$．

某些场合还必须研究X上的广义实值函数．对于$\mathfrak{D}\subset(R^\#)^X$，定义$\sup\{f:f\in\mathfrak{D}\}$为

(ix) $\sup\{f:f\in\mathfrak{D}\}(x)=\sup\{f(x):f\in\mathfrak{D}\}$，

它可以是$R^\#$的任意一个元素，而$\inf\{f:f\in\mathfrak{D}\}$则定义为

(x) $\inf\{f:f\in\mathfrak{D}\}(x)=\inf\{f(x):f\in\mathfrak{D}\}$．

这样一来，我们**点态**定义了所论及的所有函数运算以及函数之间的关系．

最后，对于K^X的子集$\mathfrak{F}$，定义$\mathfrak{F}^r$为

(xi) $\mathfrak{F}^r=\{f\in\mathfrak{F}$：对于一切$x\in X$，$f(x)\in R\}$

$=\mathfrak{F}\cap R^X$，

而$\mathfrak{F}^+$则定义为

(xii) $\mathfrak{F}^+=\{f\in\mathfrak{F}^r$：对于一切$x\in X$，$f(x)\geqslant 0\}$．

就$\mathfrak{F}\subset(R^\#)^X$来说，也可以定义集$\mathfrak{F}^+$．

(7.2) **评注** (a) 设$\alpha\in K$，ψ是K^X中的一个函数．如果对于任意$x\in X$，都有$\psi(x)=\alpha$，则称ψ为**有值α的常值函数**或**恒等于α的函数**．这个函数是与数α截然不同的实体．当需要写出这个函数时，使用另外的特殊记号（比如说$C_{\alpha,X}$）就很不方便了．因此就干脆用α来简记恒等于α的函数，这要依靠读者的良好辨别能力，以避免产生混淆．

(b) 不难验证，K^X是K上的一个向量空间，而R^X是R上的一个向量空间．这些空间还是交换环——具有（乘法）单位元常值函数1．此外，显然对于任意函数f，g和纯量α，都有

(i) $\alpha(fg)=(\alpha fg)=f(\alpha g)$．

这就是说，K^X和R^X分别是**K和R上的代数**．〔设有域F上的一个向

量空间，如果它还是一个环，并且在其上(i)式成立，则称之为F**上的代数**.)

(c) 显而易见，R^X中的关系$\leqslant$满足(2.7.i)—(2.7.iii)，换句话说，$\leqslant$是一个真实的半序关系．当$\overline{\overline{X}}>1$时，$\leqslant$并不是线性序关系．容易看出，$(R^X,\ \leqslant)$是一个**格**：即对于$f,\ g\in R^X$，必存在唯一的$h\in R^X$，满足$h\geqslant f$，$h\geqslant g$，并且当$h'\geqslant f$，$h'\geqslant g$时，有$h\leqslant h'$；也就是说，$h$乃是$f$和$g$的最小**强函数**．同样，存在$f$和$g$的最大**弱函数**$k$．显然，$h=\max\{f,\ g\}$，$k=\min\{f,\ g\}$．

(d) 半序集R^X具有较(c)强得多的性质，设$\mathfrak{F}$是R^X的任意一个非空子集，它由函数$\varphi\in R^X$所上界定，即对于一切$f\in\mathfrak{F}$，都有$f\leqslant\varphi$．那么$\mathfrak{F}$必含有一个最小强函数，它在$x\in X$处的值自然是$\sup\{f(x):f\in\mathfrak{F}\}$．对于含有弱函数的集$\mathfrak{F}\subset R^X$也成立类似断言．

虽然K^X和R^X的代数结构对于专家们饶有兴味，但是就无限集X而言，代数K^X和R^X是太大了，在分析学中没有多大用处，因此我们先来限制一下，便得到一个可度量化空间．

(7.3) **定义** 设X是一个非空集．命$\mathfrak{B}(X)$表示满足以下条件的函数$f\in K^X$全体所成的集：

(i) $\sup\{|f(x)|:x\in X\}$

是有限数．则称此类函数是**有界的**．数值(i)记为$\|f\|_u$，叫做f的**一致范数**．

(7.4) **定理** 设X是一个非空集，并考虑$f,\ g\in\mathfrak{B}(X)$及$\alpha\in K$．则下列关系式成立：

(i) $\|0\|_u=0$，而当$f\neq 0$时$\|f\|_u>0$；

(ii) $\|\alpha f\|_u=|\alpha|\ \|f\|_u$；

(iii) $\|f+g\|_u\leqslant\|f\|_u+\|g\|_u$；

(iv) $\|fg\|_u\leqslant\|f\|_u\|g\|_u$．

对$f,\ g\in\mathfrak{B}^r(X)$及$\alpha\in R$，则成立同样断言．

证 留作简单练习．

赋以范数$\| \|_\infty$的线性空间$\mathfrak{B}(X)$是分析-代数研究对象的一类重要例子，我们将不断地研究并应用这一空间.

(7.5) **定义** 设E是K（或R）上的一个线性空间，假定存在一个函数$x\to\|x\|$，有定义域E和包含在R中的值域，并且满足下列三个条件：

(i) $\|0\|=0$，而当$x\neq0$时有$\|x\|>0$；

(ii) 对于任意$x\in E$和$\alpha\in K$（或$\alpha\in R$），有$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

(iii) 对于任意x，$y\in E$，有$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

则偶$(E, \|\ \|)$叫做**复（或实）赋范线性空间**，$\|\ \|$叫做**范数**①

如果E是一个赋范线性空间，并且还是K（或R）上的代数，又

(iv) 对于任意x，$y\in E$，有$\|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$，

则E叫做**复（或实）赋范代数**. 如果一个赋范代数具有乘法单位元u，我们则假设

(v) $\|u\|=1$.②

(7.6) **定理** 设E是一个复或实赋范线性空间，ρ是如下定义的$E\times E$上的函数：

(i) $\rho(x, y)=\|x-y\|$.

则ρ是E上的一个度量.

证 显然.

(7.7) **定义** 如果一个复（实）赋范线性空间按照度量$\|x-y\|$是完备的，则称之为**复（实）Banach空间**. 同时又是赋范代数的复（实）Banach空间叫做**Banach代数**.

Banach空间在现代分析中极其重要；许多基本定理都可以抽

---

①在不致引起混淆的情况下，通常就称E本身为赋范线性空间.

②由于$\|x\|=\|ux\|\leqslant\|u\|\,\|x\|$，倘若没有假设(v)，则$\|u\|\geqslant1$. 此外，一个具有单位元的赋范代数还可再次赋范，使得单位元有范数1. 这并无本质变化. 请参看后面习题(7.42).

象地表述成关于某种Banach空间的命题．在全书中，我们要举出这种表述方法的不少实例（特别参见§14）．这里先介绍本节的主要研究对象，以及本书要研讨的一类重要课题．

(7.8) 定义 设X是一个非空拓扑空间．命$\mathfrak{C}(X)$表示$\mathfrak{B}(X)$中所有X上的连续复值函数全体所成的集．

(7.9) 定理 按照代数运算(7.1.i)-(7.1.iii)以及(7.3)中的范数$\|\ \|_u$，$\mathfrak{C}(X)$成为具有单位元的交换复Banach代数．

证 只证明按照这个一致度量，$\mathfrak{C}(X)$的完备性就行了，其余都是显而易见的．设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{C}(X)$中的一个函数序列，它满足

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|_u=0. \tag{1}$$

这就是说，

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[\sup\{|f_n(x)-f_m(x)|:x\in X\}\right]=0. \tag{2}$$

对于任意固定的$x\in X$，由(2)推知

$$\lim_{m,n\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|=0,$$

从而$(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$是K中的Cauchy序列．既然K是完备的[利用(6.50)$n=1$的结论]，序列$(f_n(x))$在K中便有极限，此极限记作$f(x)$．因此映射$x\to f(x)$是K^X中的一个元素．我们断言$f\in\mathfrak{C}(X)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_u=0. \tag{3}$$

其实，首先不难证明(3)成立．设ε是任意正实数，又设整数p（仅与ε有关）充分大，使对于任意m，$n\geqslant p$，都有

$$\|f_n-f_m\|_u<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

现在考虑一个任意取定的$x\in X$，并选m（与x和ε都有关）充分大，使$m\geqslant p$，同时有

$$|f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

结合(4)和(5)，我们看出对于一切$n\geqslant p$，都有

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqslant |f_m(x)-f_n(x)| + |f_m(x)-f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{2}{3}\varepsilon. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

既然p与x无关，(6)中的x又是任意的，所以可对(6)取上确界，当$n\geqslant p$时，得到

$$
\begin{aligned}
\|f_n-f\|_u &= \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in X\} \\
&\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

就是说(3)成立.

尚需证明$f\in \mathfrak{C}(X)$. 取n，使$\|f-f_n\|_u<1$. 则对于任意$x\in X$，显然有$|f(x)|<|f_n(x)|+1$，从而$\|f\|_u$是存在的，而且不超过$\|f_n\|_u+1$. 我们来证明f连续. 设x是X中任意一点，ε是正数，并设n充分大，使$\|f_n-f\|_u<\frac{\varepsilon}{3}$. 又设$U$是$x$的一个邻域，它满足：对于任意$y\in U$，成立

$$|f_n(y)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于$y\in U$，则得出

$$
\begin{aligned}
|f(y)-f(x)| &\leqslant |f(y)-f_n(y)| + |f_n(y)-f_n(x)| + |f_n(x)-f(x)| \\
&\leqslant \|f-f_n\|_u + |f_n(y)-f_n(x)| + \|f_n-f\|_u \\
&< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这正是f在x连续所规定的特征(6.68). □

(7.10) **评注** 某些拓扑空间X并不含有非常值的连续实值或

复值函数，如果X是无限集，$\mathscr{O}$是由$\varnothing$以及具有有限余集的X的子集全体组成的，则$(X,\ \mathscr{O})$就是一个简单平凡的例子．这种空间对于本书并没有什么价值．但是，假如$\overline{\overline{X}}>1$，而$X$是一个局部紧Hausdorff空间，正如定理(6.80)所表明的，$\mathfrak{C}(X)$则包含许多非常值函数．目前看来，局部紧Hausdorff空间不仅是表述分析学的经典定理，而且也是表述积分理论的一种理想工具．因此本节主要研究这些空间．

(7.11) **习题** 许多（不是全部）非紧拓扑空间含有无界连续复值函数．我们不详细研究一个拓扑空间上所有连续函数所成的空间，但是在本习题里，要求读者考虑到某些可能情况，并证明下列断言．

(a) 凡非紧度量空间都含有一个无界连续实值函数．

(b) 设P_Ω是(4.49)所规定的良序集．又设$\mathscr{B}$是形如$\{0\}$或$\{\gamma\in P_\Omega:\alpha<\gamma\leqslant\beta\}$（其中$\alpha<\beta<\Omega$）的集全体所成的集族．则$\mathscr{B}$是$P_\Omega$的序拓扑的一个基〔参看(6.96)，(6.98)〕．拓扑空间P_Ω是一个局部紧Hausdorff空间；事实上，各个子空间$\{\gamma\in P_\Omega:\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta\}$都是紧的．虽然$P_\Omega$既是列紧的，又是Fréchet紧的，但它仍是非紧的．〔还请参看(6.96)，(6.98)．〕

(c) 凡P_Ω上的连续复值函数f是终归常值函数，这指的是：存在一个序数$\alpha\in P_\Omega$和一个复数t，使对于任意$\gamma\geqslant\alpha$，都有$f(\gamma)=t$．从而凡P_Ω上的连续复值函数都是有界的．

(d) 设X是一个拓扑空间，命$\mathfrak{C}_a(X)$表示X上有界或无界连续复值函数全体所成的集．如果$\mathfrak{C}_a(X)$包含无界函数，我们就不能把一致范数$\|\ \|_u$强加于$\mathfrak{C}_a(X)$．不过，类似(7.9)的结论还是成立的．设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{C}_a(X)$中的一个函数序列，并且所有函数差f_n-f_m都是有界的，又设

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|_u=0,$$

则存在一个$f\in\mathfrak{C}_a(X)$，使得所有$f-f_n$都有界，并且

$$\lim_{n\to\infty} \| f-f_n \|_u = 0 .$$

我们返回来研究局部紧Hausdorff空间上的函数空间.

(7.12) **定义** 设X是一个非空局部紧 Hausdorff 空间. 命$\mathfrak{C}_{00}(X)$是$\mathfrak{C}(X)$的子集，它由满足以下条件的所有$f\in\mathfrak{C}(X)$组成：就X的某个紧子集F（与f有关）来说，$f(x)=0$对于所有$x\in F'\cap X$都成立. 命$\mathfrak{C}_0(X)$是$\mathfrak{C}(X)$的子集，它由满足以下条件的所有$f\in\mathfrak{C}(X)$组成：对于任意正数ε，总存在X的一个紧子集F（与f与ε都有关），使对于所有$x\in F'\cap X$，都有$|f(x)|<\varepsilon$. 我们称$\mathfrak{C}_{00}(X)$中的函数**在无穷大的一个邻域内等于零**，而称$\mathfrak{C}_0(X)$中的函数**在无穷大处等于零**①：这两种说法固然并不严格，但富于表现力.

(7.13) **习题** 试证：

(a) 包含关系$\mathfrak{C}_{00}(X)\subset\mathfrak{C}_0(X)\subset\mathfrak{C}(X)$成立. 如果$X$是非紧的，那么$\mathfrak{C}_0(X)\subsetneqq\mathfrak{C}(X)$. 对于(7.11.b)的空间$P_\Omega$，则有$\mathfrak{C}_{00}(X)=\mathfrak{C}_0(X)$. 如果$X$是紧的，那么$\mathfrak{C}_{00}(X)=\mathfrak{C}_0(X)=\mathfrak{C}(X)$.

(b) 设X是一个任意的局部紧Hausdorff空间，并把$\mathfrak{C}(X)$和$\mathfrak{B}(X)$看作按照一致度量$\| f-g \|_u$作成的度量空间. 空间$\mathfrak{C}_0(X)$是$\mathfrak{B}(X)$中的闭集〔从而也是$\mathfrak{C}(X)$中的闭集〕：如果$f_n\in\mathfrak{C}_0(X)$，$f\in\mathfrak{B}(X)$，又$\lim_{n\to\infty}\| f_n-f \|_u=0$，那么$f\in\mathfrak{C}_0(X)$. $\mathfrak{C}_0(X)$作为一个度量空间还是完备的. 〔回忆(6.47). 〕空间$\mathfrak{C}_{00}(X)$一般说来不是闭集：它的闭包乃是$\mathfrak{C}_0(X)$. 〔可按下面(7.41)所提示的方法证明最后一个命题. 〕

本书研究积分论时，要用到若干与连续性密切相关的（但不是等价的）概念. 现介绍如下.

(7.14) **定义** 设X和Y是分别具有度量ρ和σ的两个度量空间. 设有映射φ，它有定义域X和含于Y的值域，如果对于任意$\varepsilon>0$，

---

①按定义的内涵，vanish(等于零)一词也可译为“消失”。——译者注

总存在$\delta>0$，使当$\rho(x, x')<\delta$时，就有$\sigma(\varphi(x),\varphi(x'))<\varepsilon$，则称$\varphi$是**一致连续的**．

(7.15) **评注** (a) 由(6.71)不难看出，一致连续映射必连续．

(b) 有一种一致连续概念，要比(7.14)所定义的更具一般性，它建立在所谓**一致空间**的基础之上．但是我们并不需要这个概念，因此略之．①

(7.16) **习题** (a) 考虑定义在K上的函数exp(5.56)．试证：exp连续但不一致连续．

(b) 设X是一个非空集，ρ是X上的离散度量(6.13.c)．试证：把(X,ρ)映入一个度量空间的任意映射一致连续．

(c) 试求一个度量空间含有连续但不一致连续实值函数的合理的充要条件．

(d) 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是度量空间X上的一个复值一致连续函数序列，并满足条件：所有函数差f_n-f_m都有界，且

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|_u=0\ .$$

试证：极限函数f(7.11.d)一致连续．

(7.17) **定理** X，Y如(7.14)所设，又设φ是把X映入Y的一个连续映射，并具有性质：对于任给的$\varepsilon>0$，总存在X的一个紧子集A_ε，使对于$A'_\varepsilon\cap X$中的任意x,x'，都有$\sigma(\varphi(x),\varphi(x'))<\varepsilon$．则$\varphi$一致连续．

证 设ε是任意正数，A_ε是定理中所说的紧子集：如果x,x'属于$A'_\varepsilon\cap X$，那么

$$\sigma(\varphi(x),\varphi(x'))<\varepsilon. \qquad (1)$$

试考察任意一点$y\in A_\varepsilon$．既然φ连续，便有正数η_y(与y有关)，满足

①有兴趣的读者可参阅，比如J.L.Kelly：《一般拓扑学》，中译本p.167．——译者注

$$z\in B_{2\eta_y}(y)\text{蕴涵}\sigma(\varphi(z),\varphi(y))<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

〔记号如(6.14)所设．〕现考虑集族$\{B_{\eta_y}(y):y\in A_\varepsilon\}$．这个集族是$A_\varepsilon$的一个开覆盖，从而根据(6.32)及(6.18)，便有一个有限子族$\{B_{\eta_{y_1}}(y_1),\ \cdots,\ B_{\eta_{y_m}}(y_m)\}$覆盖$A_\varepsilon$．数值$\min\{\eta_{y_1},\ \eta_{y_2},\ \cdots,\ \eta_{y_m}\}$记为$\delta$．我们断言：对于给定的$\varepsilon$，这个$\delta$就满足(7.14)．如果$x$和$x'$都属于$A'_\varepsilon\cap X$，那么利用(1)就行了．如果$x$和$x'$至少一个属于$A_\varepsilon$，不妨设$x\in A_\varepsilon$．那么$x$必定属于某个$B_{\eta_{y_k}}(y_k)$．当$\rho(x,x')<\delta$时，便有

$$\begin{aligned}\rho(y_k,x')&\leqslant\rho(y_k,x)+\rho(x,x')\\&<\eta_{y_k}+\delta\\&\leqslant2\eta_{y_k}.\end{aligned}$$

这就是说，x'属于$B_{2\eta_{y_k}}(y_k)$，从而由(2)便得到$\sigma(\varphi(x'),\ \varphi(y_k))<\frac{\varepsilon}{2}$．由于$x$也属于$B_{2\eta_{y_k}}(y_k)$，再由(2)又得到$\sigma(\varphi(x),\ \varphi(y_k))<\frac{\varepsilon}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi(x),\varphi(x'))&\leqslant\sigma(\varphi(x),\varphi(y_k))+\sigma(\varphi(y_k),\varphi(x'))\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以φ一致连续．□

(7.18) **推论** 如果X是一个局部紧度量空间，则$\mathfrak{C}_0(X)$中的任意函数都是一致连续的．如果X是一个紧度量空间，则$\mathfrak{C}(X)$中的任意函数都是一致连续的．

证 见(7.17)．□

(7.19) **评注**① 以下见解是针对拓扑空间X上的实值函数f来说的．f在$x_0\in X$的连续性定义可以（有点不大自然地）分成

① "评注"二字是译者加的．——译者注

两部分：对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在x_0的一个邻域U，使对于一切$x\in U$，有

(i) $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，

以及对于一切$x\in U$，有

(ii) $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

(i)和(ii)则分别定义了很有用处的函数类. 对广义实值函数持这种见解也是可取的.

(7.20) **定义** 设X是一个拓扑空间，f是定义在X上的一个广义实值函数，但假定不取值$-\infty$，就是说，对于任意$x\in X$，$f(x)$是实数或∞. 如果下列条件成立，就称函数f **在$x_0\in X$是下半连续的**：若$f(x_0)<\infty$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在x_0的一个邻域U，使对于一切$x\in U$，都有$f(x)>f(x_0)-\varepsilon$；若$f(x_0)=\infty$，则对于任给的正数α，总存在x_0的一个邻域U，使对于一切$x\in U$，都有$f(x)>\alpha$. 假如函数f在X的各点都下半连续，就称f **下半连续**. X上的下半连续函数全体所成的集记作$\mathfrak{M}(X)$. 类似地，如果X上的函数f在$]-\infty,\infty]$内取值，并且在X的各点①x_0附近下列条件成立：$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$〔$f(x_0)$有限时〕或$f(x)<-\alpha$〔$f(x_0)=-\infty$时〕，就称f **上半连续**. X上的上半连续函数全体所成的集记为$\mathfrak{N}(X)$.

(7.21) **习题** 试证：

(a) 如果拓扑空间X有一个开集U，满足$\varnothing\subsetneqq U\subsetneqq X$，则$X$上必存在非常值的半连续函数. 又特征函数$\xi_U$是下半连续的，而$\xi_{U'}$则是上半连续的.

(b) 函数f下半连续的充要条件是$-f$上半连续〔回忆$-(\infty)=-\infty$及$-(-\infty)=\infty$(6.1).〕这样一来，如果证明了有关下半连续函数的结论，就肯定成立有关上半连续函数的对偶结论.（因之，我们通常只阐述有关下半连续函数的断言.）

(c) 在x_0的下半连续的定义可以换个说法：对于任意实数

① "在X的各点"这几个字是译者加的. ——译者注

$\alpha<f(x_0)$，总存在x_0的一个邻域U，使对于一切$x\in U$，都有$f(x)>\alpha$。这一说法同时涉及$f(x_0)<\infty$及$f(x_0)=\infty$两种情况.

(d) X到$]-\infty,\infty]$内的函数f下半连续的充要条件是对于任意$t\in R$，$f^{-1}(]t,\infty])$是X中的开集.（这一特征描述往往很有用处.）

(7.22) **定理** 设X是一个拓扑空间.

(i) 如果$f\in\mathfrak{M}(X)$，α是非负实数，则$\alpha f\in\mathfrak{M}(X)$.

(ii) 如果$f,g\in\mathfrak{M}(X)$，则$\min\{f,g\}\in\mathfrak{M}(X)$.

(iii) 如果$\mathfrak{D}$是$\mathfrak{M}(X)$的一个非空子集，则$\sup\{f:f\in\mathfrak{D}\}$是$\mathfrak{M}(X)$中的函数.

(iv) 如果$f,g\in\mathfrak{M}(X)$，则$f+g\in\mathfrak{M}(X)$.

(v) 假定X是一个局部紧Hausdorff空间.则当$f\in\mathfrak{M}^+(X$时)，就有$f=\sup\{\varphi:\varphi\in\mathfrak{C}_{00}^+(X),\ \varphi\leqslant f\}$.

证 断言(i)，(ii)和(iv)差不多显而易见，证明留给读者．现在证明(iii)．函数$\sup\{f:f\in\mathfrak{D}\}$记为$g$．设有一个任意固定的点$x_0\in X$．对于每个实数$\alpha<g(x_0)$，上确界定义(5.32)表明，存在$f\in\mathfrak{D}$，满足$\alpha<f(x_0)\leqslant g(x_0)$.〔这同时适用于$g(x_0)<\infty$和$g(x_0)=\infty$两种情况；应当注意，当$g(x_0)=\infty$时，$f(x_0)$可能是有限值，也可能是无穷大〕．既然$f$属于$\mathfrak{M}(X)$，便有$x_0$的一个邻域$U$，使对于一切$x\in U$，

$$f(x)>\alpha$$

（这同时适用于$f(x_0)<\infty$和$f(x_0)=\infty$两种情况〕.对于一切$x\in U$，自然成立

$$g(x)\geqslant f(x)>\alpha.$$

因此g满足(7.21.c)，从而证明了(iii).

我们利用Urysohn定理(6.80)来证明(v)．假如$f=0$，就无须证明了．假如对于某个$x_0\in X$，$f(x_0)>0$，则考虑满足$0<\alpha<f(x_0)$的任意实数α．这时存在x_0的一个邻域U，使对于一切$x\in U$，都有$f(x)>\alpha$．根据(6,80)，便有一个函数$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}^+(X)$，满足

$\varphi(X)\subset[0,\alpha]$，$\varphi(x_0)=\alpha$及$\varphi(U')\subset\{0\}$. 显然有$\varphi\leqslant f$，而由于$\alpha$可以任意接近$f(x_0)$〔$f(x_0)<\infty$时〕或者可以任意大〔$f(x_0)=\infty$时〕，便得到$f(x_0)=\sup\{\varphi(x_0):\varphi\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(X),\ \varphi\leqslant f\}$. 既然$x_0$是任意的，(v)得证. □

(7.23) 习题 (a) 试叙述并证明类似于(7.22)的关于上半连续函数的命题.

(b) 设X是含有一个非闭开集的拓扑空间.试证：$\mathfrak{M}^r(X)$（X上的实值下半连续函数全体）并不作成线性空间. 如果X的每个开子集都同时是闭集，试证$\mathfrak{M}^r(X)$是一个线性空间.

(c) 试证：$\mathfrak{M}^r(X)$中序列的一致极限必属于$\mathfrak{M}^r(X)$.

(7.24) 评注① 现在我们来学习一个著名的至关重要的逼近定理. 德国数学家K.Weierstrass（1815—1897）于1885年证明了：实系数多项式在空间$\mathfrak{C}^r([0,1])$中关于由一致度量生成的拓扑是稠密的. 我们要证明这一定理的一个影响深远的推广形式，它归功于当代美国数学家M.H.Stone. Stone-Weierstrass定理的各种证明方法都需要某种“繁难的”分析. 以下定理中所介绍的证明方法，仅用到少量的这类分析知识. 我们所证得的结果要比后文所需要的稍多一些.

(7.25) 定理 对于任意实数α，命$\binom{\alpha}{0}=1$，而命

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n=1,2,\cdots)$$

则对于任意$x\in\,]-1,1[$，无穷级数

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

收敛. 如果$\alpha>0$，则级数

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$$

---

① “评注“二字是译者加的. ——译者注

收敛，而级数(i)在$[-1,1]$内则一致收敛并且绝对收敛. 最后，对于$x\in]-1,1[$以及任意实数α，成立

$$\text{(iii)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha.$$

如果$\alpha>0$，则对于任意$x\in[-1,1]$，(iii)成立.

证 我们利用检比法来证明(i). 如果α是非负整数，那么数$\binom{\alpha}{n}$中除有限个外，其余皆为0，从而(i)显然收敛. 如果α不是非负整数，那么当$|x|<1$，且$n=0,1,2,\cdots$时，得到

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right|=\frac{|\alpha-n|}{n+1}|x|\to|x|<1.$$

所以当$|x|<1$时，级数(i)绝对收敛. 其次我们来证(ii). α是非负整数的情况(ii)显然仍收敛. 设α不是非负整数，命$a_n=\left|\binom{\alpha}{n}\right|$. 则有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{|\alpha-n|}{n+1}=\frac{n-\alpha}{n+1},$$

末尾等式当$n\geqslant[\alpha]+1$时是成立的（这里$[\alpha]$是不超过α的最大整数）. 因此$n\geqslant[\alpha]+1$时，得$(n+1)a_{n+1}=na_n-\alpha a_n$，从而

$$na_n-(n+1)a_{n+1}=\alpha a_n>0. \qquad (1)$$

这样，$n\geqslant[\alpha]+1$时，(na_n)乃是递减序列，从而有极限；设$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\gamma\geqslant0$.现在考察级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(na_n-(n+1)a_{n+1})$.这个级数的第$p$个部分和为$-(p+1)a_{p+1}$,它收敛于$-\gamma$.因此级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(na_n-(n+1)a_{n+1})$收敛，而根据(1)，由于对于充分大的$n$，成立

$$a_n=\frac{1}{\alpha}(na_n-(n+1)a_{n+1}),$$

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也收敛；即级数(ii)收敛．因为当 $|x|\leqslant 1$ 时，$|\binom{\alpha}{n}x^n|\leqslant|\binom{\alpha}{n}|$，所以级数(i)在〔$-1,1$〕内绝对收敛且一致收敛，从而在〔$-1,1$〕上级数(i)定义了一个连续函数．

现在我们来证明(iii)．对于 $x\in\,]-1,1[$ 及 $\alpha\in R$，命 $f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$．既然幂级数在其收敛开区间内可以逐项微分，于是得到

$$f'_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n.$$

利用恒等式 $(n+1)\binom{\alpha}{n+1}=\alpha\binom{\alpha-1}{n}$，便得出

$$f'_\alpha(x)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n=\alpha f_{\alpha-1}(x). \tag{2}$$

其次有

$$\begin{aligned}(1+x)f_{\alpha-1}(x)&=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=f_\alpha(x),\end{aligned}$$

也就是

$$(1+x)f_{\alpha-1}(x)=f_\alpha(x). \tag{3}$$

结合(2)和(3)．我们推得对于任意的 $x\in\,]-1,1[$，成立

$$(1+x)f'_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x)=0.$$

还成立

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f_\alpha(x)(1+x)^{-\alpha}]&=(1+x)^{-\alpha-1}((1+x)f'_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x))\\&=0.\end{aligned}$$

可见$\frac{f_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha}$是$]-1,1[$内的常值函数．命$x=0$，便知道这个常值函数的值为1；也就是说，当$|x|<1$时，$f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$．如果$\alpha>0$，那么这个级数在$x=\pm1$也收敛，从而恒等式(iii)对于$x$的这两个值也成立．（两个连续复值函数，如果在它们的公共定义域的一个稠密子集上相等，它们就处处相等．）□

(7.26) **评注** (a) 证明重要定理(7.27)时，我们只用到(7.25.iii)当$\alpha=\frac{1}{2}$时的特殊情况，即只需要恒等式

(i)
$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

以及这一级数当$|x|\leqslant1$时绝对收敛和一致收敛的结论．

(b) Stone-Weierstrass定理终归依赖于就一个紧Hausdorff空间X而言空间$\mathfrak{C}^r(X)$的序性质，显而易见，如果f,g属于$\mathfrak{C}^r(X)$，$\max\{f,g\}$和$\min\{f,g\}$就必定连续，这一简单事实殊为有用．以下定理把多项式与极大、极小联系起来．

(7.27) **定理** 设X是任意一个非空集（没有拓扑），又设ψ和φ是$\mathfrak{B}^r(X)$中的两个函数．则对于任意$\varepsilon>0$，总存在一个实系数多项式$P=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{jk}\psi^j\varphi^k$，满足

(i)
$$\|\max\{\psi,\varphi\}-P\|_u<\varepsilon.$$

对于$\min\{\psi,\varphi\}$也成立同样的断言．

证 对于任意实数t，显然成立恒等式

$$|t|=(1+t^2-1)^{\frac{1}{2}}.$$

当$|t^2-1|\leqslant1$即$|t|\leqslant2^{\frac{1}{2}}$时，得到

$$(1+t^2-1)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(t^2-1)^n,$$

而当$|t|\leqslant2^{\frac{1}{2}}$时级数绝对收敛和一致收敛(7.26)．对于任意正整

数 p 以及合于 $|t|\leqslant 2^{\frac{1}{2}}$ 的一切实数 t，则有

$$\left|\,|t|-\sum_{n=0}^{p}\binom{\frac{1}{2}}{n}(t^2-1)^n\right|\leqslant\sum_{n=p+1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|; \qquad (1)$$

只要 p 充分大，（1）式右边就可以任意小．现考察 $\mathscr{B}^r(X)$ 中的任意非零函数 ψ，为写起来方便，数 $\|\psi\|_u$ 记作 β．对于 $x\in X, p\in N$，应用（1）便得出

$$\left|\,|\psi(x)|-\sum_{n=0}^{p}\beta\binom{\frac{1}{2}}{n}\left[\frac{\psi^2(x)}{\beta^2}-1\right]^n\right|$$

$$=\beta\left|\beta^{-1}|\psi(x)|-\sum_{n=0}^{p}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left[\frac{\psi^2(x)}{\beta^2}-1\right]^n\right|$$

$$\leqslant\beta\sum_{n=p+1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|.$$

由此可见，对于 $\psi\in\mathscr{B}^r(X)$ 及 $\varepsilon>0$，存在函数 1 和 ψ^2 的实多项式 Q（指的是 1，ψ^2，ψ^4，…的实系数线性组合），Q 的系数只与 β 和 ε 有关，且 Q 适合

$$\|\,|\psi|-Q\,\|_u<2\varepsilon. \qquad (2)$$

若 $\varphi=\psi$，关系式(i)是显然的．若 $\varphi\neq\psi$，则 $\psi-\varphi$ 不是零函数，这时可应用（2）式，以 $\psi-\varphi$ 代替 ψ，就有

$$\|\,|\psi-\varphi|-Q(\psi-\varphi)\,\|_u<2\varepsilon.$$

注意到(5.36)的结果，即成立恒等式

$$\max\{\psi,\varphi\}=\frac{1}{2}(\,|\psi-\varphi|+(\psi+\varphi)).$$

从而有

$$\|\max\{\psi,\varphi\}-\frac{1}{2}(Q(\psi-\varphi)+\psi+\varphi)\,\|_u<\varepsilon.$$

命$P(\psi,\varphi)=\frac{1}{2}(Q(\psi-\varphi)+\psi+\varphi)$，便得到(i). 为了证明当用"min"代替"max"时(i)仍成立，只要注意到$\min\{\psi,\varphi\}=-\max\{-\psi,-\varphi\}$就行了. □

(7.28) **定义** 设X是一个集，$\mathfrak{S}$是定义在X上而其值在某个集Y中的函数所成的函数族. 假如对于任意两个不同的$x,y\in X$，总存在函数$f\in\mathfrak{S}$，使$f(x)\neq f(y)$，则称$\mathfrak{S}$为**X上的分离函数族**①. 另设$\mathfrak{S}$是X上的实值函数族. **$\mathfrak{S}$中函数的实多项式**是指一些函数$\alpha f_1^{n_1}f_2^{n_2}\cdots f_l^{n_l}$的任意有限和，其中系数$\alpha$为实数，指数$n_j$都是正整数. 一个等价的说法是，$\mathfrak{S}$中函数的实多项式是指含有$\mathfrak{S}$的$R^X$的最小子代数. 可完全类似地定义$K^X$中复多项式.

现在证明Stone-Weierstrass定理的一种变型说法.

(7.29) **定理** 设X是一个非空紧Hausdorff空间，又设$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{C}^r(X)$的一个子集，它满足以下条件：

(i) $\mathfrak{S}$是分离族；

(ii) $\mathfrak{S}$含有函数1；

(iii) $f\in\mathfrak{S}$及$\alpha\in R$蕴涵$\alpha f\in\mathfrak{S}$；

(iv) $f,g\in\mathfrak{S}$蕴涵$f+g\in\mathfrak{S}$；

(v) $f,g\in\mathfrak{S}$蕴涵$\max\{f,g\}\in\mathfrak{S}$.

则$\mathfrak{S}$在$\mathfrak{C}^r(X)$中关于由一致度量生成的拓扑是稠密的. ②

证 设有$f_0\in\mathfrak{C}^r(X)$. 如果f_0是常值函数，逼近则是显然的. 否则，便有

$$c=\inf\{f_0(x):x\in X\}<d=\sup\{f_0(x):x\in X\}.$$

命$f=\frac{2}{d-c}(f_0-d)+1$，因此$f(X)\subset[-1,1]$，且$\inf f=-1$，$\sup f=1$. 很明显，只要证明f在$\mathfrak{S}$的闭包中就行了. 试考虑两

---

①这时也称$\mathfrak{S}$**分离X的点**. 见(7.37)，(7.40)，(14.34)等.
——译者注

②要注意，本定理的前提多了一点：如果X含有一个分离连续实值函数族，那么X无疑是一个Hausdorff空间.

个非空紧集 $E=\left\{x\in X: f(x)\leqslant -\frac{1}{3}\right\}$和 $F=\left\{x\in X: f(x)\geqslant\frac{1}{3}\right\}$. 对于每个$x\in E$及$y\in F$,都存在$g_{x,y}\in\mathfrak{S}$，使$g_{x,y}(x)\neq g_{x,y}(y)$. 规定

$$h_{x,y}=\frac{4}{3(g_{x,y}(y)-g_{x,y}(x))}(g_{x,y}-g_{x,y}(y))+\frac{2}{3}.$$

则有$h_{x,y}(x)=-\frac{2}{3}$, $h_{x,y}(y)=\frac{2}{3}$. 由于$\mathfrak{S}$是线性空间，显然有$h_{x,y}\in\mathfrak{S}$. 既然$h_{x,y}$连续，则对于每个$x\in X$和$y\in F$，便存在x的一个邻域U_x，使对于任意$w\in U_x$，都成立$h_{x,y}(w)<-\frac{1}{3}$. 既然E是紧的，而$\bigcup\limits_{x\in E}U_x\supset E$，所以必有点$x_1$，$x_2$，…，$x_m\in E$，使

$$U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_m}\supset E.$$

命$\varphi_y=\min\{h_{x_1,y},h_{x_2,y},\cdots,h_{x_m,y}\}$.因为$\min\{a,b\}=-\max\{-a,-b\}$，条件(v)则表明$\varphi_y\in\mathfrak{S}$. 显而易见，$\varphi_y(y)=\frac{2}{3}$，且对于一切$x\in E$，$\varphi_y(x)<-\frac{1}{3}$. 注意，对于每个固定的$y\in F$，已经定义好了函数$\varphi_y$.

重复以上方法，便求得点y_1，y_2，…，$y_n\in F$以及函数φ_{y_1}，φ_{y_2}，…，$\varphi_{y_n}\in\mathfrak{S}$，适合：对于一切$x\in E$,$\varphi_{y_j}(x)<-\frac{1}{3}$；又适合对于每个$x\in F$,某个$\varphi_{y_j}(x)$大于$\frac{1}{3}$. 由此函数$\psi=\max\{\varphi_{y_1}$，$\varphi_{y_2}$，…，$\varphi_{y_n}\}$属于$\mathfrak{S}$，并满足下列不等式：对于一切$x\in E$，成立$\psi(x)<-\frac{1}{3}$,而对于一切$x\in F$,则成立$\psi(x)>\frac{1}{3}$. 现规定$w_1$为

$$w_1=\min\left\{\max\left\{\psi,\ -\frac{1}{3}\right\},\ \frac{1}{3}\right\}.$$

很清楚，$w_1\in\mathfrak{S}$，$w_1(E)=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$，$w_1(F)=\left\{\frac{1}{3}\right\}$，$w_1(X)\subset\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$，$E$和$F$的定义表明

$$\|f-w_1\|_u=\frac{2}{3}.$$

函数$\frac{3}{2}(f-w_1)$属于$\mathfrak{C}^r(X)$，并有极小值-1和极大值1．构造w_1的方法可以再次用来逼近$\frac{3}{2}(f-w_1)$．这样便存在$w_2\in\mathfrak{S}$，满足

$$\left\|\frac{3}{2}(f-w_1)-w_2\right\|_u=\frac{2}{3}.$$

乘以$\frac{2}{3}$，便得到

$$\left\|f-w_1-\frac{2}{3}w_2\right\|_u=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

我们的证明思路已很清楚了．下一步，就用$\mathfrak{S}$中的一个适当函数w_3逼近

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(f-w_1-\frac{2}{3}w_2\right),$$

得到等式

$$\left\|f-w_1-\frac{2}{3}w_2-\left(\frac{2}{3}\right)^2w_3\right\|_u=\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

一般说来，如果n是任意正整数，则存在函数w_1，…，w_n，满足

$$\left\|f-w_1-\frac{2}{3}w_2-\cdots-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}w_n\right\|_u=\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

其中每个w_j都属于$\mathfrak{S}$．既然$\mathfrak{S}$是线性空间，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$，至此便完成了证明．□

由(7.27)和(7.29)不难证明逼近定理的标准说法．

(7.30) Stone-Weierstrass定理 设X是一个非空紧Hausdorff空间，又设$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{C}^r(X)$中的一个分离函数族，并含有函数1．则$\mathfrak{S}$中函数的实系数多项式是$\mathfrak{C}^r(X)$的关于由一致度量生成的拓扑的一个稠密子代数．

证 设$\mathfrak{P}$是$\mathfrak{S}$中函数的实系数多项式全体所成的集，命$^-$是$\mathfrak{C}^r(X)$中的闭包运算. 显然$\mathfrak{P}$是$\mathfrak{C}^r(X)$的子代数. 假定f和g都属于$\mathfrak{P}^-$,并且

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_u=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|_u=0,$$

其中f_n和g_n都属于$\mathfrak{P}$. 定理(7.27)的结果表明$\max\{f_n,g_n\}$属于$\mathfrak{P}^-$. 由(5.36)不难看出

$$\|\max\{f_n,g_n\}-\max\{f,g\}\|_u\leqslant\|f_n-f\|_u+\|g_n-g\|_u,$$

从而$\max\{f,g\}$属于$(\mathfrak{P}^-)^-=\mathfrak{P}^-$. 这样$\mathfrak{P}^-$就满足(7.29)中对$\mathfrak{S}$所加的全部条件，因而由(7.29)便推得$(\mathfrak{P}^-)^-=\mathfrak{P}^-$正是$\mathfrak{C}^r(X)$. □

(7.31) **推论** (Weierstrass) 设X是R的一个紧子集，$f\in\mathfrak{C}^r(X)$. 则存在一个实多项式$P=P(x)$，使得$\|f-p\|_u$任意小.

证 本推论无非是(7.30)当$\mathfrak{S}=\{\iota,1\}$的情况，这里对于一切$x\in X$，$\iota(x)=x$. □

(7.32) **评注** 定理(7.29)和(7.30)中$\mathfrak{S}$是分离函数族的条件显然是必要的. 设X是至少含有两个点的紧Hausdorff空间. 倘若$\mathfrak{F}$是$\mathfrak{C}^r(X)$的一个非空子集，并满足条件：对于某两个不同的$a,b\in X$，$f(a)=f(b)$对于一切$f\in\mathfrak{F}$都成立. 那么$P(a)=P(b)$对于$\mathfrak{F}$中函数的任意多项式P也就成立. 由此可见，$\mathfrak{F}$中函数的多项式不可能在$\mathfrak{C}^r(X)$中稠密. 其实，这样的函数是不存在的，即它在a和b有不同的值,而又能用$\mathfrak{F}$的函数的多项式任意一致地逼近,同时定理(6.80)表明，的确存在一个$\varphi\in\mathfrak{C}^r(X)$，它满足$\varphi(a)=1$及$\varphi(b)=0$. Stone-Weierstrass定理的美妙之处就在于这样的一个事实，即定理的条件——它的必要性是显然的——也是充分的. 今后我们会不断地引用Stone-Weierstrass定理，它乃是分析学家的一项基本工具.

(7.33) **例** (a) 设X是Cantor三分点集(6.62)，我们把它表成数$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{3^k}$全体所成的集，其中各个$y_k$为0或1. 对于$n\in N$，设

φ_n是X上的函数，它适合

$$\varphi_n\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{3^k}\right)=(-1)^{y_n}.$$

对于$n_1<n_2<\cdots<n_l$，命$\varphi_{n_1,n_2,\cdots,n_l}=\prod_{j=1}^{l}\varphi_{n_j}$

于是每个φ_n在X上连续，集$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$是$X$上的分离族，并且$\varphi_n^2=1$．所以$\mathfrak{C}^r(X)$中每个函数被函数1和$\varphi_{n_1,n_2,\cdots,n_l}$的线性组合任意一致逼近.

(b)　(5.56)所定义的函数exp是R上的实值函数，中学生都知道，它满足不等式：$x_1<x_2$时，$\exp(x_1)<\exp(x_2)$. 所以单元素族$\{\exp\}$是R上的分离族，并且对于R的任意紧子集X，exp和1的多项式所成的族在$\mathfrak{C}^r(X)$中稠密. 这些多项式刚好就是形如$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\exp(n_kx)$的函数$P$全体，这里$a_k$都是实数，$n_k$都是非负整数，$n=1,2,3,\cdots$.

(c)　余弦函数和1的多项式都在$\mathfrak{C}^r([0,\pi])$中稠密.对于任意$n\in N$，$\cos^n(x)$可以写为形如$\cos(kx)$和1的项的线性组合（这一事实可通过施归纳于n来证实）．因此,函数1,$\cos(x)$，$\cos(2x)$，…的线性组合全体所成的族在$\mathfrak{C}^r([0,\pi])$中稠密.

(d)　考虑$\mathfrak{C}^r([0,1])$以及含有1及函数$\iota[\iota(x)=x]$并满足(7.29.iii)—(7.29.v)的$\mathfrak{C}^r([0,1])$的最小子集$\mathfrak{S}$.不难看出，$\mathfrak{S}$正是由$[0,1]$上一切分段线性的、连续的、实值函数f组成的线性格.这就是说，存在有限个子区间$[0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{n-1},1]$，满足$0<x_1<\cdots<x_{n-1}<1$，并且在每个$[x_{k-1},x_k]$上f是线性的. 定理(7.29)表明，$\mathfrak{S}$在$\mathfrak{C}^r([0,1])$中稠密.

人们想必期望Stone-Weierstrass定理具有复变型，其实也确有这种变型. 不过，在复情况下，需要附加某个前提.

(7.34)　**定理**　设X是一个非空紧Hausdorff空间. 又设$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{C}(X)$中的一个分离函数族，它含有函数1，并满足条件：只要

$f\in\mathfrak{S}$，就有$\bar{f}\in\mathfrak{S}$．则$\mathfrak{S}$中函数的复系数多项式在$\mathfrak{C}(X)$中关于由一致度量生成的拓扑是稠密的．

证 设g属于$\mathfrak{C}(X)$．我们要证明，实值连续函数$\mathrm{Re}g$和$\mathrm{Im}g$可以用属于$\mathfrak{S}$的函数的多项式来逼近．设$f\in\mathfrak{S}$，则有$\mathrm{Re}f=\dfrac{f+\bar{f}}{2}$，$\mathrm{Im}f=\dfrac{f-\bar{f}}{2i}$，从而$\mathrm{Re}f$和$\mathrm{Im}f$是$\mathfrak{S}$中函数的多项式．对于$f\in\mathfrak{S}$，设由一切$\mathrm{Re}f$和$\mathrm{Im}f$组成的函数族记为$\mathfrak{S}_0$，那么$\mathfrak{S}_0$是$X$上的分离族，这是因为，如果$x,y\in X$，$f(x)\neq f(y)$，则或有$\mathrm{Re}f(x)\neq\mathrm{Re}f(y)$，或有$\mathrm{Im}f(x)\neq\mathrm{Im}f(y)$．$\mathfrak{S}_0$还包含函数1．定理(7.30)表明，对于任意$\varepsilon>0$，总存在$\mathfrak{S}_0$中函数的多项式$P$和$Q$，满足

$$\|P-\mathrm{Re}g\|_u<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\|Q-\mathrm{Im}g\|_u<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

从而

$$\|P+iQ-g\|_u<\varepsilon.\quad\square$$

(7.35) **例** (a) 命$X=\{z\in K:|z|\leqslant 1\}$，$\mathfrak{S}=\{\iota\}$，这里$\iota(z)=z$．$\iota$和1的多项式的一致极限在开单位圆盘$\{z\in K:|z|<1\}$上解析，而在闭单位圆盘$\{z\in K:|z|\leqslant 1\}$上连续．单位圆盘上的非解析的连续函数当然是有的，因而$\mathfrak{S}$中函数的多项式在$\mathfrak{C}(X)$中并非稠密．这样一来，在复Stone-Weierstrass定理中，附加某个前提就是必要的了．W.Rudin业已找到关于X的一些条件，在这些条件下，定理对于无附加前提的$\mathfrak{C}(X)$是成立的．①

(b) 命$T=\{z\in K:|z|=1\}$，并考虑T上由$\iota(z)=z$所给定的函数ι．对于任意$z\in T$，我们知道$z=\exp(ix)=\cos(x)+i\sin(x)$对于刚好一个$x\in[0,2\pi[$是成立的．所以$\iota(\exp(ix))=\exp(ix)$，我们看出$\{\iota\}$就$T$而言是分离族．又有$\overline{\iota(z)}=\overline{\iota(\exp(ix))}=\cos(x)$

①参见Proc.Amer.Math.Soc.8，39—42(1957)．

$-i\sin(x)=\cos(-x)+i\sin(-x)=\exp(-ix)$. 忆及$\exp(ix)^n=\exp(inx)$，$n=1,2,\cdots$. 族$\{\iota,\bar{\iota},1\}$满足定理(7.34)的条件. 现在设$f\in\mathfrak{C}(T)$，$\varepsilon>0$. 由上所述，存在函数

$$\exp(ix)\to\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\exp(ikx),$$

使对于一切$x\in[0,2\pi[$，都成立

$$\left|\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\exp(ikx)-f(\exp(ix))\right|<\varepsilon$$

（其实，它对于一切$x\in R$都成立）. 这一结果在三角级数理论中很重要〔见(16.34)〕，而且就我们所知，这是最简洁的证明方法.

(7.36) **习题** (a) 设X是R的任意一个非紧子集. 试求出$\mathfrak{C}^r(X)$中的一个分离族$\mathfrak{S}$，使得族$\mathfrak{S}\cup\{1\}$的多项式在$\mathfrak{C}^r(X)$中不是稠密的. 须详细考虑一切可能情况. 试问：基数$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$最小能小到什么程度？

(b) 设A是一个非空有限的离散空间. 试就此集证明Stone-Weierstrass定理的加强形式，要求证明时不利用(7.30).

(7.37) **习题** 除(7.29)和(7.30)之外，Stone-Weierstrass定理还有如下的几个变型. 试利用(7.30)证明之.

(a) 设X是一个紧Hausdorff空间. $\mathfrak{C}^r(X)$的分离点的闭子代数$\mathfrak{A}$或是$\mathfrak{C}^r(X)$，或是$\{f\in\mathfrak{C}^r(X):f(x_0)=0\}$（对于一个定点$x_0\in X$）. 如果$\mathfrak{C}^r(X)$的子代数$\mathfrak{A}$分离点，并且不在$X$的点恒等于零，则$\mathfrak{A}$在$\mathfrak{C}^r(X)$中稠密. 〔这一命题与(7.30)不同之处在于$\mathfrak{A}$并不需要含有函数1. 〕

(b) 设X是一个局部紧Hausdorff空间. $\mathfrak{C}_0^r(X)$的分离点的闭子代数$\mathfrak{A}$或是$\mathfrak{C}_0^r(X)$，或是$\{f\in\mathfrak{C}_0^r(X):f(x_0)=0\}$（对于一个定点$x_0\in X$）. 如果$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{C}_0^r(X)$的一个分离子代数，它不在$X$的点恒等于零，则$\mathfrak{A}$在$\mathfrak{C}_0^r(X)$中稠密.

(c) 叙述并证明(a)与(b)的复变型.

(7.38) **习题** 定理(7.29)和(7.30)从下述意义上说是不能比较的：$\mathfrak{C}^r(X)$的子代数不一定是子格，子格不一定是子代数.

(a) 设P和Q是$[0,1]$上的两个实多项式.试证：$\max\{P,Q\}$为多项式的充要条件是$P\geqslant Q$或$Q\geqslant P$. 再证：如果P_1，Q_1，P_2及Q_2都是多项式，并且$P_1\leqslant P_2$，$P_1\leqslant Q_2$，$Q_1\leqslant P_2$及$Q_1\leqslant Q_2$，那么存在一个多项式Φ,适合条件：$\max\{P_1, Q_1\}\leqslant\Phi\leqslant\min\{P_2,Q_2\}$.

(b) (7.33.d)所定义的$\mathfrak{C}^r([0,1])$的子格$\mathfrak{S}$不是$\mathfrak{C}^r([0,1])$的子代数. 试证：如果f和f^2都属于$\mathfrak{S}$，那么f必为常数. 试问：当$\mathfrak{S}$中的f和g满足怎样的充要条件时，才能使fg属于$\mathfrak{S}$？

(7.39) **习题** 设X是R^n的一个非空紧子集，其中$n\in N$.对于$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)\in X$以及非负整数的有限序列$(k_1, \cdots, k_n)$，考虑函数

$$\boldsymbol{x}\to x_1{}^{k_1}x_2{}^{k_2}\cdots x_n{}^{k_n},$$

试证：这些函数的线性组合在$\mathfrak{C}^r(X)$中稠密.叙述并证明关于$X\subset k^n$和$\mathfrak{C}(X)$的类似命题.

我们介绍Stone-Weierstrass定理的一个重要应用，来结束本节.

(7.40) **Tietze开拓定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，Y是X的一个非空紧子空间，又设U是满足$Y\subset U\subset X$的一个开集. 则$\mathfrak{C}(Y)$中的任意函数都可以开拓成$\mathfrak{C}_{00}(X)$中的在$X\cap U'$上等于零的一个函数.

证 鉴于(6.79)，不失一般性，可假定U^-是紧集. 显然只要证明以下事实就够了：$\mathfrak{C}^r(Y)$中的任意函数f在$\mathfrak{C}^r(X)$中能有一个开拓f^t，使对于一切$x\in X\cap U'$，成立$f^t(x)=0$. 设$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{C}^r(Y)$中能有这种开拓f^t的函数f全体所成的集. $\mathfrak{S}$显而易见是$\mathfrak{C}^r(Y)$的子代数，我们来证明$\mathfrak{S}$分离Y的点. 对于$a\neq b$且$a,b\in Y$，存在a的一个邻域W，使$b\notin W$. 根据(6.79)可知，存在a的一个邻域V，适合$V^-\subset U\cap W$，而且V^-是紧集. 由(6.80)，存在一个X到$[0,1]$内的连续函数φ，使$\varphi(V^-)=\{1\}$，$\varphi((U\cap W)')=\{0\}$. 于是

$\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=0$，$\varphi(X\cap U')\subset\{0\}$，而$\varphi$对定义域$Y$的限制自然是属于$\mathfrak{S}$的．这就是说，$\mathfrak{S}$分离$Y$的点．定理(6.80)又表明，$Y$上的一切常值函数都属于$\mathfrak{S}$．

其次考虑任意$f\in\mathfrak{S}$，并记$\alpha=\max\{f(y):y\in Y\}$，$\beta=\min\{f(y):y\in Y\}$．显然有$\|f\|_u=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$．设$f$在$X$上的一个连续实值开拓为$f^{\dagger}$，它满足$f^{\dagger}(X\cap U')\subset\{0\}$．又设$\alpha^{\dagger}=\max\{\alpha,0\}$，$\beta^{\dagger}=\min\{\beta,0\}$．然后在$X$上定义函数$\varphi$为

$$\varphi=\min\{\max\{f^{\dagger},\beta^{\dagger}\},\alpha^{\dagger}\}$$

很清楚，φ属于$\mathfrak{C}^r(X)$，也不难看出：对于$x\in Y$，成立$\varphi(x)=f(x)$；$\alpha^{\dagger}=\max\{\varphi(x):x\in X\}$；$\beta^{\dagger}=\min\{\varphi(x):x\in X\}$；对于$x\in X\cap U'$，成立$\varphi(x)=0$．这样一来，$\varphi$便是我们所要求的$f$的适合$\|\varphi\|_u=\|f\|_u$的这类开拓．就是说，如果$f\in\mathfrak{S}$，那么$f$能有一个开拓$f^{\dagger}$，适合$\|f^{\dagger}\|_u=\|f\|_u$．

现设g是$\mathfrak{C}^r(Y)$中的一个函数，它是$\mathfrak{S}$中一个函数序列$(f_n)_{n=1}^{\infty}$在Y上的一致极限．选取一个子序列$(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，使$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_u<2^{-k}$，并记$g_k=f_{n_k}-f_{n_{k+1}}$（$k=1,2,3,\cdots$）．则有

$$g-f_{n_1}=\sum_{k=1}^{\infty}g_k,$$

这里无穷级数在Y上一致收敛，且$\|g_k\|_u<2^{-k}$．现设g_k在X上的一个连续开拓为$g_k^{\dagger}$，它满足条件：$g_k^{\dagger}$在U'上等于零，$\|g_k^{\dagger}\|_u=\|g_k\|_u<2^{-k}$．无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}g_k^{\dagger}$在$X$上一致收敛到$\mathfrak{C}^r(X)$中的一个函数，它在$U'$上等于零．因此$g-f_{n_1}$属于$\mathfrak{S}$，从而$g$本身也就属于$\mathfrak{S}$．

因而我们已证得$\mathfrak{S}$满足(7.30)的假设条件，并且在$\mathfrak{C}^r(Y)$中是一致闭的．所以$\mathfrak{S}$乃是$\mathfrak{C}^r(Y)$全体．□

(7.41) **习题** 设X是一个局部紧Hausdorff空间．$\mathfrak{C}_0(X)$中的每个函数f都可以用$\mathfrak{C}_{00}(X)$中的函数任意一致逼近．〔提示：可考虑一个紧集，f在其外部为任意小，并利用(7.40)．〕

(7.42) **习题** 设E是具有乘法单位元u的实或复赋范代数。对于$x\in E$，命

$$|\!|\!| x |\!|\!| = \sup\{ \| yx \| : y\in E, \| y \| \leqslant 1 \}.$$

试证：

(a) $|\!|\!| u |\!|\!| = 1$；

(b) $\frac{1}{\| u \|} \| x \| \leqslant |\!|\!| x |\!|\!| \leqslant \| x \|$对于一切$x\in E$成立；

(c) 赋以范数$|\!|\!| \quad |\!|\!|$的代数E是(7.5)意义下的赋范代数；

(d) 如果E关于度量$\rho(x,y)=\| x-y \|$是完备的，则E关于度量$|\!|\!| x-y |\!|\!|$也是完备的.

(7.43) **习题** 设X是一个非空紧Hausdorff空间，又设$\mathfrak{L}$是X上实值连续函数所成的格，也就是说，$f,g\in\mathfrak{L}$蕴涵$\max\{f,g\}\in\mathfrak{L}$及$\min\{f,g\}\in\mathfrak{L}$. 假定$\varphi$是$X$上的一个实值连续函数，并具有性质：对于每个$\varepsilon>0$以及每对点$x,y\in X$，总存在一个函数$f\in\mathfrak{L}$，使得$|\varphi(x)-f(x)|<\varepsilon$及$|\varphi(y)-f(y)|<\varepsilon$. 试证：对于每个$\varepsilon>0$，存在一个函数$h\in\mathfrak{L}$，使得$\| \varphi-h \|_u<\varepsilon$.

(7.44) **习题**（R.I.Jewett） 命I表示区间$[0,1]$. 函数族$\mathfrak{F}$如果满足下列三个条件，就说$\mathfrak{F}$具有性质V：

(i) 对于某个集X，$\mathfrak{F}\subset I^X$，

(ii) $f\in\mathfrak{F}$蕴涵$(1-f)\in\mathfrak{F}$，

(iii) $f,g\in\mathfrak{F}$蕴涵$fg\in\mathfrak{F}$.

I^X赋以一致收敛拓扑（这一拓扑是由一致度量生成的）. 试证以下断言(a)—(k).（本习题颇为难做.）

(a) 如果X是一个集，$\mathfrak{A}\subset I^X$，那么$\mathfrak{A}$包含在具有性质V的I^X的一个最小子族（闭子族）中.（横切一个族总类.）

假设X是一个拓扑空间，命$\mathfrak{D}(X)=I^X\cap\mathfrak{C}(X)$. 对于$n\in N$，设$\mathfrak{P}_n$是具有性质$V$的$\mathfrak{D}(I^n)$的最小子族，并含有$n$个射影

$$(x_1,\cdots,x_n)\to x_k \quad (k=1,\cdots,n).$$

(b) 如果$\mathfrak{F}$具有性质V，$\{f_1,\cdots,f_n\}\subset\mathfrak{F}$，$p\in\mathfrak{P}_n$，那么$X$上

由

$$f(x)=p(f_1(x),\cdots,f_n(x))$$

定义的函数 f 必属于$\mathfrak{F}$.〔考虑使结论成立的$p\in\mathfrak{D}(I^n)$全体所成的集.〕

(c) 对于任意 $\varepsilon>0$,总存在$\mathfrak{P}_1$中的函数p和q,使得在I上$p<\varepsilon$，且$q>1-\varepsilon$.〔考虑$p(x)=x^m(1-x)^m$.〕

(d) 如果 $\varepsilon>0$，$0<a<b<1$,那么存在一个函数$p\in\mathfrak{P}_1$,使得

$$在[0,a]上成立p>1-\varepsilon,$$

$$在[b,1]上成立p<\varepsilon.$$

〔对于适当的$m,n\in N$，取$p(x)=(1-x^m)^n$.〕

(e) 如果$\{a_1,\cdots,a_n\}\cup\{b_1,\cdots,b_n\}\subset I$，那么

$$\left|\prod_{k=1}^n b_k-\prod_{k=1}^n a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|b_k-a_k|.$$

(施归纳于n.)

(f) 如果$(a,b)\in I^2=I\times I$，又ε,δ都是正实数，那么存在一个函数$p\in\mathfrak{P}_2$，使对于$(x,y)\in I^2$，有

$$p(x,y)>1-\varepsilon，当(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\delta^2,$$

$$p(x,y)<\varepsilon\qquad 当(x-a)^2+(y-b)^2\geqslant(4\delta)^2.$$

〔取$p(x,y)=(1-p_1(x))p_2(x)(1-p_3(y))p(y)$，其中$p_j$都是利用(d)所得到的.〕

(g) 设A和B是I^2的两个不相交的紧子集，考虑任意$\varepsilon>0$及$p\in\mathfrak{P}_2$. 那么存在$q\in\mathfrak{P}_2$，使得

$$q\geqslant p\qquad(在I^2上),$$

$$q>1-\varepsilon\quad(在A上),$$

$$q<p+\varepsilon\quad(在B上).$$

〔命$4\delta=\mathrm{dist}(A,B)$.①利用紧性和(f)，综合成$q_0\in\mathfrak{P}_2$，它满足条

①dist(A，B)表示子集A到子集B的距离，即dist(A，B)=ρ(A，B)，见(6.87).——译者注

件：在B上靠近1，而在A上靠近0．然后设$q=1-(1-p)q_0$．〕

(h) 在I^2上规定φ及ψ为$\varphi(x,y)=\max\{x,y\}$及$\psi(x,y)=\min\{x,y\}$．对于每个$\varepsilon>0$，存在函数$r,q\in\mathfrak{P}_2$，满足

$$\|\varphi-r\|_u<\varepsilon$$

及

$$\|\psi-q\|_u<\varepsilon.$$

〔命$8\delta=\varepsilon<1$．设$C=\{(x,y)\in I^2:\delta\leqslant\psi(x,y)\leqslant 1-\delta\}$，并取$m\in N$，使在$C$上$(xy)^m<\delta$．设$p(x,y)=1-(xy)^m$．则$p\in\mathfrak{P}_2$，且在$C$上$1-\delta<p<1$．对于$k\geqslant 0$，设$A_k=\{(x,y)\in C:p^k(x,y)\leqslant\psi(x,y)\}$，$B_k=\{(x,y)\in C:p^k(x,y)\geqslant\psi(x,y)\}$．取$n\in N$，使$B_n=\varnothing$．注意，对于一切$k$，都有$A_{k-1}\cap B_k=\varnothing$．对于$k=1,2,\cdots,n$，利用(g)求出$q_k\in\mathfrak{P}_2$，使在$I^2$上$q_k\geqslant p$，在$A_{k-1}$上$q_k>1-\frac{\delta}{n}$，在$B_k$上$q_k<p+\frac{\delta}{n}$．命$q'=q_1q_2\cdots q_n$．证明在$B_k\cap B'_{k+1}$上，$0\leqslant p^k-\psi<\delta$，并利用(e)证明在$C$上，$|p^k-q'|<3\delta$ ($k=1,\cdots,n-1$)．这样便得出结论：在C上$|\psi-q'|<4\delta$．再利用(g)求出$q''\in\mathfrak{P}_2$，使在I^2上$q''\geqslant q'$，当$\psi\geqslant 1-\delta$时$q''>1-\delta$，当$\psi\leqslant 1-2\delta$时$q''<q'+\delta$．注意，当$\psi\geqslant\delta$时$|\psi-q''|<6\delta$．将(g)稍作变形，用来求出$q\in\mathfrak{P}_2$，使在I^2上$q\leqslant q''$，当$\psi\leqslant\delta$时$q<\delta$，当$\psi\geqslant 2\delta$时$q>q''-\delta$．于是在I^2上$|q-\psi|<8\delta=\varepsilon$．〕

(i) 设X是一个非空集，$\mathfrak{F}$是I^X的一个闭子族，并具有性质V．则$\mathfrak{F}$是一个格．〔利用(b)，(h)．〕

(j) 设X是一个紧Hausdorff空间，$\mathfrak{F}$是$\mathfrak{D}(X)$的一个闭分离子集，并具有性质V．命$S=\{x\in X$：对于一切$f\in\mathfrak{F}$，$f(x)\in\{0,1\}\}$．则$\mathfrak{F}=\{f:f\in\mathfrak{D}(X)$，$f(S)\subset\{0,1\}\}$．〔利用(7.43)，(i)，(b)，(d)．〕

(k) 设$n\in N$，又设$\mathfrak{F}$是$\mathfrak{D}(I^n)$的一个闭子族，它具有性质V，并含有某个恒不为0或1的函数，还含有n个射影．则$\mathfrak{F}=\mathfrak{D}(I^n)$．

(7.45) **习题** **四元数代数**① H 定义为 R 上的四维向量空间，它具有一个基，通常记作 $\{1,i,j,k\}$，并具有以下乘法表：

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

假定 H 是 R 上的一个结合代数，依此规定乘积 $(a1+bi+cj+dk)(a'1+b'i+c'j+d'k)$（实系数！）．试证：

(a) 对于每个 $a1+bi+cj+dk\in H$，成立

$(a1+bi+cj+dk)(a1-bi-cj-dk)=(a^2+b^2+c^2+d^2)1$.

(b) 对于乘法来说，集 $H\cap\{01+0i+0j+0k\}'$ 是一个非 Abel 群.

(c) 设 $x=a1+bi+cj+dk\in H$，则有 $x-ixi-jxj-kxk=4a1$.

(d) 对于 $x=a1+bi+cj+dk\in H$，命 $\|x\|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$

试证：$\|\quad\|$ 是 H 上的一个范数(7.5)，且对于一切 x，$y\in H$，都有 $\|xy\|=\|x\|\|y\|$.

(e) 设 X 是一个拓扑空间，$\mathfrak{C}(X,H)$ 是把 X 映入 H 的连续映射 f 全体所成的集（借助于范数，把 H 作成度量空间，从而作成拓扑空间），且 $\|f\|_u=\sup\{\|f(t)\|:t\in X\}$ 为有限．试证：$\mathfrak{C}(X,H)$ 是 R 上的一个具有乘法单位元的非交换Banach代数，这里所有运算皆为点态的.

(f) (J.C.Holladay). 设 X 是一个紧Hausdorff空间，并设

---

①四元数是由爱尔兰数学家W.R.Hamilton爵士(1805—1865)发现的.

$\mathfrak{A}$是分离点并含有1的$\mathfrak{C}(X,H)$的任意子代数（特别说来，对于乘以所有常值函数的乘法是封闭的）．试证：$\mathfrak{A}$在$\mathfrak{C}(X,H)$中稠密．〔把$\mathfrak{C}(X,R)$看作$\mathfrak{C}(X,H)$的子环，利用(c)和(7.30)．〕

第三章　Lebesgue积分

根据某种观点，积分乃是函数的一种平均方法．正是本着这种精神，我们要引进积分概念，并展开讨论．把平均方法应用于一个实值或复值函数类$\mathfrak{F}$，相应于每个$f\in\mathfrak{F}$便给定了一个数值$I(f)$．如果$I(f)$约定是一个平均值，那么它无疑该满足以下两个条件：对于f，$g\in\mathfrak{F}$，$\alpha\in R$，成立

$$I(f+g)=I(f)+I(g),$$
$$I(\alpha f)=\alpha I(f).$$

I还具有一个性质，即当$f\geqslant 0$时，$I(f)\geqslant 0$．这一性质虽不象前两个那么重要，但往往是可取的．在若干个场合下，根据这三个性质完全可以鉴别平均方法．

我们来看这种平均方法的几个例子．比如说，假定$\mathfrak{F}$是有限集$\{1,2,3,\cdots,n\}$上的实值函数全体，即$\mathfrak{F}=R^n$，并规定

$$e_j(k)=\begin{cases}1, & 当j=k,\\ 0, & 当j\neq k;\end{cases}$$

也就是$e_j(k)=\delta_{jk}$．对于每个$f\in\mathfrak{F}$，有

$$f=\sum_{j=1}^{n}f(j)e_j.$$

对于任意"积分"I，必有

$$I(f)=\sum_{j=1}^{n}f(j)I(e_j).$$

其实，如果任意选定了数$I(e_1)$，$I(e_2)$，$\cdots$，$I(e_n)$，那么对于任意$f\in\mathfrak{F}$来说，满足头两个条件的积分I，就由上述和数所确定．因此，这时积分无非是这样的一个有限和，即对于函数定义域内的点

给定了某些权. 为了满足第三个性质，只须要求 $I(e_j)\geqslant 0$.

如果$\mathfrak{F}=\mathfrak{C}([0,1])$，$I(f)=\int_0^1 f(x)dx$（Riemann 积分），那么 I 就是$\mathfrak{F}$的一种平均方法. 对于定义在 $x=\frac{1}{2}$处的任意函数类有定义的平均值，是由 $I(f)=f(\frac{1}{2})$ 给出的，这个平均值清楚易懂. 这两种平均方法都具有第三个性质：当 $f\geqslant 0$ 时，$I(f)\geqslant 0$.

设$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是可数无限集C的一个枚举，(α_n)是一个复数序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty$，并设$\mathfrak{F}$是定义在$C$上的有界复值函数全体所成的集. 那么，$\mathfrak{F}$上由 $I(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f(x_n)$规定的 I 就是一个平均值. 当且仅当对于所有 n 都成立$\alpha_n\geqslant 0$ 时，这个平均值具有第三个性质.

最后一个例子. 设 C为上例中的集，又设 C上的复值函数 f 满足条件：$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|^2<\infty$，命$\mathfrak{F}$是这种函数 f 的全体. 对于给定的 $g\in\mathfrak{F}$，命$I_g(f)=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)\overline{g(x_n)}$. 根据 Cauchy 不等式(13.13)，即

$$|I_g(f)|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g(x_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

可知上述级数绝对收敛.

本章首先讨论连续函数的平均值，然后将这一方法开拓到更广泛的函数类. 特别说来，我们要开拓平均意义下的Riemann积分，由此得到Lebesgue积分.

以下先简要复习一下Riemann-Stieltjes积分——这是在区间$[a, b]$上平均连续函数的一种经典方法.

§ 8 Riemann-Stieltjes积分

(8.1) **定义** 设A是R的一个子集，α是定义在A上的一个广义实值函数. 如果只要$x<y$（$x, y\in A$），就有$\alpha(x)\leqslant\alpha(y)$，则称$\alpha$在$A$上**非减**. 如果只要$x<y$（$x, y\in A$），就有$\alpha(x)<\alpha(y)$，则称$\alpha$在$A$上**严格递增**. 可完全类似地定义**非增**和**严格递减**这两个述语. 一个函数如果或是非减的，或是非增的，则称它是**单调的**①.

(8.2) **定义** 设$[a, b]$是R中任意一个闭区间，$[a, b]$的一个**细分**指的是形如

$$\Delta=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$$

的任意一个有限（有序）集$\Delta\subset[a, b]$. $[a, b]$的细分全体所成的族记作$\mathscr{D}([a, b])$.

(8.3) **定义** 设$[a, b]$是R中一个闭区间，α是$[a, b]$上的一个实值非减函数，f是$[a, b]$上的一个有界实值函数. 对于每个$\Delta=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}\in\mathscr{D}([a, b])$，规定

$$L(f,\alpha,\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\inf\{f(x):x\in[t_{j-1},t_j]\}\cdot(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})),$$

$$U(f,\alpha,\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\sup\{f(x):x\in[t_{j-1},t_j]\}\cdot(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})).$$

这两个数分别叫做**Darboux下和**及**Darboux上和**. 假如对于任意$\varepsilon>0$，总存在一个$\Delta\in\mathscr{D}([a, b])$（依赖于$f$，$\alpha$及$\varepsilon$），使

---

①本定义显然推广了(6.81)对于序列所给出的定义：在(8.1)中只要取$A=N$，便得出(6.81).

$$U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta)<\varepsilon,$$

就说 f 在$[a, b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的.

(8.4) **引理** $[a, b]$, f 和 α 如(8.3)所设. 假定Δ, $\Delta^*\in\mathscr{D}([a, b])$, $\Delta\subset\Delta^*$. 则成立

(i) $L(f,\alpha,\Delta)\leqslant L(f,\alpha,\Delta^*)\leqslant U(f,\alpha,\Delta^*)$
$\leqslant U(f,\alpha,\Delta)$.

证 (i)中间的不等式显然成立. 我们来证明$L(f,\alpha,\Delta)\leqslant L(f, \alpha, \Delta^*)$. 先设$\Delta^*$只比$\Delta$多一个点. 设多出的点是$u$. 这样, 如果$\Delta=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$, 那么对于某个$k$,

$$\Delta^*=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<u<t_k<\cdots<t_n=b\}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&L(f,\alpha,\Delta^*)-L(f,\alpha,\Delta)\\
&\quad=\inf\{f(x):x\in[t_{k-1},u]\}\cdot(\alpha(u)-\alpha(t_{k-1}))\\
&\qquad+\inf\{f(x):x\in[u,t_k]\}\cdot(\alpha(t_k)-\alpha(u))\\
&\qquad-\inf\{f(x):x\in[t_{k-1},t_k]\}\cdot(\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1}))\\
&\quad=(\inf\{f(x):x\in[t_{k-1},u]\}-\inf\{f(x):x\in[t_{k-1},t_k]\})\\
&\qquad(\alpha(u)-\alpha(t_{k-1}))+(\inf\{f(x):x\in[u,t_k]\}\\
&\qquad-\inf\{f(x):x\in[t_{k-1},t_k]\})(\alpha(t_k)-\alpha(u))\\
&\quad\geqslant 0
\end{aligned}$$

所以$L(f,\alpha,\Delta^*)\geqslant L(f,\alpha,\Delta)$. 当$\Delta^*$比$\Delta$多若干个点时, 显然可作归纳论证. 同样, 因为在一个区间的子区间上, 上确界不增, 所以(i)中最右边不等式也成立. □

(8.5) **引理** 如果Δ, Δ^*都在$\mathscr{D}([a,b])$中, 则

$$L(f,\alpha,\Delta)\leqslant U(f,\alpha,\Delta^*).$$

证 根据(8.4)得到$L(f,\alpha,\Delta)\leqslant L(f,\alpha,\Delta\cup\Delta^*)\leqslant U(f,\alpha,\Delta^*)$. □

(8.6) **定理** 设 f 在$[a,b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的. 则存在唯一的一个实数γ, 使对于任意$\Delta\in\mathscr{D}([a,b])$, 都有

$$L(f,\alpha,\Delta)\leqslant\gamma\leqslant U(f,\alpha,\Delta).$$

实际上,

$$\gamma=\sup\{L(f,\alpha,\Delta):\Delta\in\mathscr{D}([a,b])\}$$
$$=\inf\{U(f,\alpha,\Delta):\Delta\in\mathscr{D}([a,b])\}.$$

定理中的数 γ 叫做 f **在** $[a,b]$ **上关于** α **的 Riemann-Stieltjes 积分**. 这个积分历史上记作 $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, 但本书写为 $S_\alpha(f:[a,b])$. 对于每个 $x\in[a,b]$, 当 $\alpha(x)=x$ 时, 称 γ 为 f 在 $[a,b]$ **上的 Riemann 积分**, 并记作 $S(f:[a,b])$.

证 命 $\gamma=\sup\{L(f,\alpha,\Delta):\Delta\in\mathscr{D}([a,b])\}$, $\delta=\inf\{U(f,\alpha,\Delta):\Delta\in\mathscr{D}([a,b])\}$. 由(8.5)可知 γ 和 δ 都是实数, 且 $\gamma\leqslant\delta$. 只要证明 $\gamma=\delta$ 就行了. 假定 $\gamma<\delta$. 既然 $\delta-\gamma>0$, 可积性定义(8.3)则表明, 存在一个 $\Delta\in\mathscr{D}([a,b])$, 使

$$U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta)<\delta-\gamma.$$

于是

$$\delta\leqslant U(f,\alpha,\Delta)=(U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta))+L(f,\alpha,\Delta)<(\delta-\gamma)+\gamma=\delta,$$

分明矛盾. 可见 $\gamma=\delta$. □

(8.7) **定理** $[a,b]$, f 和 α 如(8.3)所设. 如果在 f $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 是 Riemann-Stieltjes 可积的.

证 设给定了 $\varepsilon>0$. 由于 $[a,b]$ 是紧集(6.44), 函数 f 在 $[a,b]$ 上便一致连续(7.18). 于是存在 $\delta>0$, 使得只要 x, $y\in[a,b]$, 且 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}.$$

选取 $\Delta=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$, 使对于 $j=1,2,\cdots,n$, 成立 $t_j-t_{j-1}<\delta$. 挑选 x_j, $y_j\in[t_{j-1},t_j]$, 使对于 $j=1,2,\cdots,n$, 成立

$$f(x_j)=\sup\{f(x):x\in[t_{j-1},t_j]\},$$
$$f(y_j)=\inf\{f(x):x\in[t_{j-1},t_j]\}.$$

[根据(6.73)知道，这种挑选是可以办到的.]因此得到 $|x_j-y_j|\leqslant t_j-t_{j-1}<\delta$，从而

$$0\leqslant f(x_j)-f(y_j)<\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}.$$

于是又得到

$$U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(f(x_j)-f(y_j))(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))$$
$$<\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))$$
$$=\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}(\alpha(b)-\alpha(a))<\varepsilon.\square$$

(8.8) **定理** 如果f_1和f_2都在$[a,b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的，则f_1+f_2 也在$[a,b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的，并且

$$S_\alpha(f_1+f_2;[a,b])=S_\alpha(f_1;[a,b])+S_\alpha(f_2;[a,b]).$$

证 设给定了$\varepsilon>0$. 取Δ_j，使对于$j=1,2$，成立

$$U(f_j,\alpha,\Delta_j)-L(f_j,\alpha,\Delta_j)<\frac{\varepsilon}{2},$$

并设$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$. 利用(8.4)以及两个简单不等式

$$\inf(f_1+f_2)\geqslant\inf f_1+\inf f_2,$$
$$\sup(f_1+f_2)\leqslant\sup f_1+\sup f_2$$

（对于任意非空集上的任意两个有界实函数，这两个不等式都成立），便得到

$$L(f_1,\alpha,\Delta_1)+L(f_2,\alpha,\Delta_2)$$
$$\leqslant L(f_1,\alpha,\Delta)+L(f_2,\alpha,\Delta)$$

$$\leqslant L(f_1+f_2,\alpha,\Delta)$$
$$\leqslant U(f_1+f_2,\alpha,\Delta)$$
$$\leqslant U(f_1,\alpha,\Delta)+U(f_2,\alpha,\Delta)$$
$$\leqslant U(f_1,\alpha,\Delta_1)+U(f_2,\alpha,\Delta_2)$$
$$<L(f_1,\alpha,\Delta_1)+L(f_2,\alpha,\Delta_2)+\varepsilon.$$

由此可见$U(f_1+f_2,\ \alpha,\ \Delta)-L(f_1+f_2,\ \alpha,\ \Delta)<\varepsilon$，所以$f_1+f_2$可积.

再设$S_\alpha(f_j;[a,b])=\gamma_j$，并设$\Gamma_j$满足条件：

$$|L(f_j,\alpha,\Gamma_j)-\gamma_j|<\frac{\varepsilon}{6}, \tag{1}$$

及

$$|U(f_j,\alpha,\Gamma_j)-\gamma_j|<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{2}$$

由此推知，对于$j=1,2$，成立$0\leqslant U(f_j,\alpha,\Gamma_j)-L(f_j,\alpha,\Gamma_j)<\frac{\varepsilon}{3}$. 命$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，便得到

$$L(f_1,\alpha,\Gamma_1)+L(f_2,\alpha,\Gamma_2)$$
$$\leqslant L(f_1,\alpha,\Gamma)+L(f_2,\alpha,\Gamma)$$
$$\leqslant L(f_1+f_2),\alpha,\Gamma)$$
$$\leqslant U(f_1+f_2),\alpha,\Gamma)$$
$$\leqslant U(f_1,\alpha,\Gamma)+U(f_2,\alpha,\Gamma)$$
$$\leqslant U(f_1,\alpha,\Gamma_1)+U(f_2,\alpha,\Gamma_2)$$
$$<L(f_1,\alpha,\Gamma_1)+L(f_2,\alpha,\Gamma_2)+\frac{2\varepsilon}{3},$$

由此看出

$$L(f_1+f_2,\alpha,\Gamma)-L(f_1,\alpha,\Gamma_1)-L(f_2,\alpha,\Gamma_2)<\frac{2\varepsilon}{3}, \tag{3}$$

$$U(f_1,\alpha,\Gamma_1)+U(f_2,\alpha,\Gamma_2)-U(f_1+f_2,\alpha,\Gamma)<\frac{2\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

由(1)和(3)得出

$$|L(f_1+f_2,\alpha,\Gamma)-(\gamma_1+\gamma_2)|<\varepsilon,$$

而由(2)和(4)则得出

$$|U(f_1+f_2,\alpha,\Gamma)-(\gamma_1+\gamma_2)|<\varepsilon. \quad \square$$

(8.9) 定理 如果 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 是 Riemann-Stieltjes可积的，又 $c\in R$，则 cf 也在 $[a,b]$ 上关于 α 是 Riemann-Stieltjes可积的，并且

$$S_\alpha(cf;[a,b])=cS_\alpha(f;[a,b]).$$

证 留作习题.

(8.10) 定理 $[a,b]$，f 和 α 如(8.3)所设. 如果 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 是Riemann-Stieltjes 可积的，且 $f\geqslant 0$，则 $S_\alpha(f;[a,b])$ 非负.

证 显然.

(8.11) 定理 设 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 是 Riemann-Stieltjes 可积的，且 $a<c<b$. 则 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上关于 α 都是 Riemann-Stieltjes可积的，并且

$$S_\alpha(f;[a,b])=S_\alpha(f;[a,c])+S_\alpha(f;[c,b]).$$

证 设给定了 $\varepsilon>0$. 取 $\Delta\in\mathscr{D}([a,b])$，使

$$U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta)<\varepsilon.$$

鉴于(8.4)，不妨设 $c\in\Delta$；比如说

$$\Delta=\{a=t_0<\cdots<t_m=c<t_{m+1}<\cdots<t_n=b\}.$$

命

$$\Delta_1=\{a=t_0<\cdots<t_m=c\}\in\mathscr{D}([a,c]),$$
$$\Delta_2=\{c=t_m<\cdots<t_n=b\}\in\mathscr{D}([c,b]).$$

那么

$$(U(f,\alpha,\Delta_1)-L(f,\alpha,\Delta_1))+(U(f,\alpha,\Delta_2)-L(f,\alpha,\Delta_2))$$

$$=U(f,\alpha,\Delta)-L(f,\alpha,\Delta)<\varepsilon.$$

由此可见，f在$[a,c]$和$[c,b]$上都是可积的．命$S_\alpha(f;[a,c])=\gamma_1$，$S_\alpha(f;[c,b])=\gamma_2$．很明显$0\leqslant U(f,\alpha,\Delta_1)-\gamma_1<\varepsilon$，$0\leqslant U(f,\alpha,\Delta_2)-\gamma_2<\varepsilon$．把这两个不等式相加，就得到

$$0\leqslant U(f,\alpha,\Delta)-(\gamma_1+\gamma_2)<2\varepsilon.$$

因为对于$L(f,\alpha,\Delta)$也成立同样的不等式，所以得出结论：$S_\alpha(f;[a,b])=\gamma_1+\gamma_2$．　□

(8.12) **定理**　设α是定义在R上的一个实值非减函数．对于$f\in\mathfrak{C}_{00}^r(R)$，规定$S_\alpha(f)=S_\alpha(f;[a,b])$，其中$[a,b]$是$R$中的任意一个闭区间，但$f$在$[a,b]$的外部等于零．则对于每个$f\in\mathfrak{C}_{00}^r([a,b])$，$S_\alpha(f)$的定义是非二义性的．函数$S_\alpha$还具有以下三个性质：

(i)　$S_\alpha(f+g)=S_\alpha(f)+S_\alpha(g)$；

(ii)　$S_\alpha(cf)=cS_\alpha(f)(c\in R)$；

(iii)　$f\in\mathfrak{C}_{00}^+(R)$时，$S_\alpha(f)\geqslant 0$．

证　设$f\in\mathfrak{C}_{00}^r(R)$，并假定在$[a,b]$和$[a',b']$的外部都有$f=0$．命$a''=\min\{a,a'\}$，$b''=\max\{b,b'\}$．根据(8.11)得到

$$\begin{aligned}S_\alpha(f;[a'',b''])&=S_\alpha(f;[a'',a])+S_\alpha(f;[a,b])+S_\alpha(f;[b,b''])\\&=0+S_\alpha(f;[a,b])+0\\&=S_\alpha(f;[a,b]).\end{aligned}$$

同样可以看出，$S_\alpha(f;[a'',b''])=S_\alpha(f;[a',b'])$．因此$S_\alpha(f;[a,b])=S_\alpha(f;[a',b'])$，从而$S_\alpha(f)$是完全确定的．定理的其余断言则是上述诸结果的平凡推论．　□

(8.13) **定理**　α如(8.12)所设．对于$f\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，规定$S_\alpha(f)$为$S_\alpha(\mathrm{Re}f)+iS_\alpha(\mathrm{Im}f)$．则对于$f,g\in\mathfrak{C}_{00}(R)$及$c\in K$，成立

(i) $S_\alpha(f+g)=S_\alpha(f)+S_\alpha(g)$,

(ii) $S_\alpha(cf)=cS_\alpha(f)$,

(iii) $f\in\mathfrak{C}_{00}^+$时，$S_\alpha(f)\geqslant 0$.

这一简单计算留给读者.

(8.14) **定义** 对于定义在R上的任意函数f及任意$t\in R$，设在R上f_t定义为$f_t(x)=f(x+t)$. 函数f_t叫做由t产生的f的**平移**(translate of f by t). 设在R上规定$f^\star$为$f^\star(x)=f(-x)$. 函数$f^\star$则叫做f的**反射**(reflection of f).

(8.15) **定理** 设S是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的Riemann积分，即$S=S_\alpha$，这里对于任意$x\in R$，有$\alpha(x)=x$. 则S具有下列性质：

(i) $S(f+g)=S(f)+S(g)$;

(ii) 对于任意$c\in K$，有$S(cf)=cS(f)$;

(iii) 当$f\in\mathfrak{C}_{00}^+(R)$，且$f\neq 0$时，$S(f)>0$;

(iv) 对于任意$t\in R$，有$S(f_t)=S(f)$;

(v) $S(f^\star)=S(f)$.

证 (8.13)已含有结论(i)和(ii). 为了证明(iii)，设$f\in\mathfrak{C}_{00}^+(R)$，而$f$不是零函数. 那么必存在$u\in R$，使$f(u)>0$. 既然$f$在$u$连续，便有$u$的某个邻域$]u-\delta,u+\delta[$，使得只要$u-\delta<x<u+\delta$，就有$f(x)>\frac{1}{2}f(u)$. 假定$f$在$[a,b]$的外部等于零，这里$a<u-\delta<u+\delta<b$，并设$\Delta=\{a, u-\delta, u+\delta, b\}$. 那么$S(f)=S(f;[a,b])\geqslant L(f,\alpha,\Delta)\geqslant\frac{1}{2}f(u)(2\delta)>0$.

(iv)和(v)的证明留给读者. □

8.16 **评注** 函数S(如果不计正倍数)乃是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上满足(8.15.i)—(8.15.iv)的仅有的复值函数，这就是说，假如S'是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上满足(8.15.i)—(8.15.iv)的另一个复值函数，那么对于某个正实数γ，必有$S'=\gamma S$. 在后文掌握了更多的分析方法后，我们要证明这一事实[参看(19.50)].

定理(8.13)表明，对于定义在R上的每个非减函数α，Riemann-Stieltjes积分S_α是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的一种平均方法. 稍后(19.50)我们将看到，凡$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的平均方法，都对于某个α，具有S_α的形式. 以下定理给出了两个不同的α能产生$\mathfrak{C}_{00}(R)$上同一个平均方法的充分条件.

(8.17) **定理** 设α和β是定义在R上的两个实值非减函数，并假定存在$c\in R$，使集$D=\{x\in R: \alpha(x)=\beta(x)+c\}$在$R$中稠密. 则对于$\mathfrak{C}_{00}(R)$中的任意$f$，都有$S_\alpha(f)=S_\beta(f)$.

证 鉴于(8.13)，显然只考虑实值函数f就可以了. 因此设$f\in\mathfrak{C}_{00}^r(R)$. 在$D$中取$a<b$，使得$f$在$[a,b]$的外部等于零. 要注意，只要$x$，$y\in D$，就有$\alpha(x)-\alpha(y)=\beta(x)-\beta(y)$. 设给定了$\varepsilon>0$. 由于$f$在$R$上一致连续，便有$\delta>0$，使得只要$|x-y|<\delta$，就有$|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}$. 因为$D$在$R$中稠密，所以必存在一个细分$\Delta=\{a=t_0<\cdots<t_n=b\}\subset D$，使对于$j=1, 2, \cdots, n$，有$t_j-t_{j-1}<\delta$. 如同(8.7)的证明，由此推得

$$U(f, \alpha, \Delta)-L(f, \alpha, \Delta)<\varepsilon.$$

既然$\Delta\subset D$，便得到$U(f, \beta, \Delta)=U(f, \alpha, \Delta)$，$L(f, \beta, \Delta)=L(f, \alpha, \Delta)$. 因而$|S_\beta(f)-S_\alpha(f)|<\varepsilon$〔参看(8.6)〕. ε既是任意的，便证明了定理. □

以下我们来仔细研究非减函数的几个引人注目的性质. 为此，先引进一个定义.

(8.18) **定义** 设$]a,b[$是实直线上的一个开区间，f是定义在$]a,b[$上的一个复值函数. 如果存在一个复数$f(a+)$〔或$f(b-)$〕，它满足条件：对于每个$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使得只要$x\in]a,b[$，且$x-a<\delta$〔或$b-x<\delta$〕，就有

$$|f(x)-f(a+)|<\varepsilon〔或|f(x)-f(b-)|<\varepsilon〕,$$

就说f在a的右极限是$f(a+)$〔或f**在b的左极限**是$f(b-)$〕，并

记作

$$\lim_{x\downarrow a} f(x)=f(a+) \ \text{〔或}\lim_{x\uparrow b} f(x)=f(b-)\text{〕}.$$

又假定f定义在〔a，b〕上．如果$\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)=f(a)$〔或$\lim\limits_{x\uparrow b} f(x)=f(b)$〕，就说$f$**在**$a$**右连续**〔或$f$**在**$b$**左连续**〕.

(8.19) **定理** 设α是定义在R上的一个实值非减函数．则α在R的所有点都存在有限右极限和有限左极限，并且除R的一个可数点集外，α在R的其余各点都连续.

证 设$x\in R$，命$\alpha(x+)=\inf\{\alpha(t):\ x<t\}$．既然只要$x<t$，就有$\alpha(x)\leqslant\alpha(t)$，所以这个下确界在$R$中的存在性是没问题的．对于$\varepsilon>0$，$\alpha(x+)+\varepsilon$并不是$\{\alpha(t):\ x<t\}$的一个下界，因此必存在$\delta>0$，使$\alpha(x+\delta)<\alpha(x+)+\varepsilon$．由此可见，如果$x<t<x+\delta$，那么$\alpha(x+)\leqslant\alpha(t)\leqslant\alpha(x+)+\varepsilon$，这就是说$\lim\limits_{t\downarrow x}\alpha(t)=\alpha(x+)$．类似可证

$$\lim_{t\uparrow x}\alpha(t)=\sup\{\alpha(t);t<x\}=\alpha(x-).$$

命$D=\{x\in R:\ \alpha\text{在}x\text{间断}\}$．显而易见，当且仅当$\alpha(x-)<\alpha(x+)$时，$x\in D$．而如果在$D$中$x<y$，那么$\alpha(x+)\leqslant\alpha(y-)$．这样一来，族$\mathscr{I}=\{]\alpha(x-),\ \alpha(x+)[:x\in D\}$便是$R$的两两不相交非空开区间族．根据(6.59)的证明，$\mathscr{I}$可数，从而D也可数．□

(8.20) **评注** (a) 设α是R上的一个实值非减函数．β定义为：$\beta(x)=\alpha(x-)-\alpha(0-)$，$x\in R$．那么$\beta$也非减，$\beta(0)=0$，而且$\beta$在$R$的每一点左连续．此外，由于除在一个可数集上外，$\alpha$是连续的，那么在$R$的一个稠密子集上便有$\beta(x)=\alpha(x)-\alpha(0-)$．因此，由(8.17)知道，对于任意$f\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，都有$S_\beta(f)=S_\alpha(f)$．由于这些事实，就$\mathfrak{C}_{00}(R)$上构造Riemann-Stieltjes积分而言，将问题中的函数α**正规化**为左连续的且在0处等于零的函数，就无关紧要了．但是必须指出，这种正规化可能要影响一个间断函数的积分值．例如，设：$x<0$时，$\alpha(x)=0$，而$x\geqslant0$时，

$\alpha(x)=1$；$x\leqslant 0$时，$\beta(x)=0$，而$x>0$时，$\beta(x)=1$；取$f=\beta$．假如在$[-1, 1]$上积分，那么对于$\mathscr{D}([-1, 1])$中的任意Δ，都得到$L(\beta, \alpha, \Delta)=L(\beta, \beta, \Delta)=0, U(\beta, \beta, \Delta)=1$，而当$0\in\Delta\in\mathscr{D}([-1, 1])$时，$U(\beta, \alpha, \Delta)=0$．因此$S_\alpha(\beta; [-1, 1])$等于零，但$S_\beta(\beta; [-1, 1])$却不存在．

(b) 至少可以说，关于非Stieltjes可积函数的上述例子是索然无味的．颇为有趣的是$[0, 1]$上这样的函数f，即x是有理数时，$f(x)=0$，而x是无理数时，$f(x)=1$．Riemann-Stieltjes积分$S_\alpha(f; [0, 1])$仅当$\alpha(1)=\alpha(0)$时才存在，这是因为一切Darboux下和等于0，而一切Darboux上和却等于$\alpha(1)-\alpha(0)$的缘故．关于Riemann可积函数的完善表述，要等下文(12.51)才能见分晓．

(8.21) **习题** 试证：如果f是$[a, b]$上的一个有界实值函数，且仅有有限个间断点，α是$[a, b]$上的一个实值非减函数，且与f没有公共间断点，则f在$[a, b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的．

(8.22) **习题** 设α是$[a, b]$上的一个实值非减函数，(f_n)是$[a, b]$上的一个有界实值函数序列，其中每个f_n都在$[a, b]$上关于α是Riemann-Stieltjes可积的．假定$\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|_u=0$，这里$f$属于$\mathfrak{B}^r([a, b])$．试证：$f$在$[a, b]$上关于$\alpha$是Riemann-Stieltjes可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty}S_\alpha(f_n; [a,b])=S_\alpha(f; [a,b]).$$

(8.23) **习题** 作为与(8.22)的对照，试求一个序列(f_n)，其中每个$f_n\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，并且在$R$上一致地有$f_n\to 0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}S(f_n)\neq 0=S(0)$．

(8.24) **习题** 设在R上g定义为$g(x)=x-[x]$，这里$[x]$为不超过x的最大整数．试利用(8.21)和(8.22)证明：由

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(nx)}{2^n}$定义的函数$f$在$[0,1]$上是Riemann可积的．并求出积分值$S(f;[0,1])$．

(8.25) **习题** 设α和β是R上的两个连续、实值、非减函数，并且$\alpha(0)=\beta(0)=0$，$\alpha\neq\beta$．试求一个函数$f\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(R)$，使$S_\alpha(f)\neq S_\beta(f)$．

(8.26) **习题** 设$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是Q的一个枚举．在R上定义α为$\alpha(x)=\sum\frac{1}{2^n}$，这里和数是对适合$x_n<x$的所有$n$来求的．试证：

(a) α严格递增；

(b) α左连续；

(c) α在每个有理点间断；

(c) α在每个无理点连续；

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=1$；

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0$．

(本例提供了某种迹象，它表明一个单调函数可能具有多么不良好的性质．)

(8.27) **习题** (x_n)，α如(8.26)所设．试证：对于任意$f\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，都有$S_\alpha(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x_n)}{2^n}$．〔可先考察$f\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(R)$，证明：任意$L$都≤这个和数，而任意$U$又≥它．〕

(8.28) **习题** 设P表示Cantor三分点集．记号同(6.62)和(6.64)．在$[0,1]$上定义函数ψ如下：

$\psi(0)=0$；

$\psi(x)=\frac{2k-1}{2^n}$，$x\in I_{n,k}(n=1,2,\cdots;\ k=1,2\cdots,2^{n-1})$；

$\psi(x)=\sup\{\psi(t):t\in P',t<x\},x\in P\cap\{0\}'$．

函数ψ叫做Lebesgue奇异函数①. 试证：

(a) $\psi(x)$对于所有$x\in[0,1]$都有定义；

(b) ψ非减；

(c) ψ在$[0,1]$上连续；

(d) $\mathrm{rng}\,\psi=[0,1]$；

(e) 如果 $x\in P$, $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n}$，其中每个$x_n=0$或1，那么 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$.

ψ的部分图象如图5所示. 本图或许有助于认识这个函数.〔可利用下述事实：(y轴上)$(0,1)$内的二进有理数形成$[0,1]$的一个稠密子集.〕

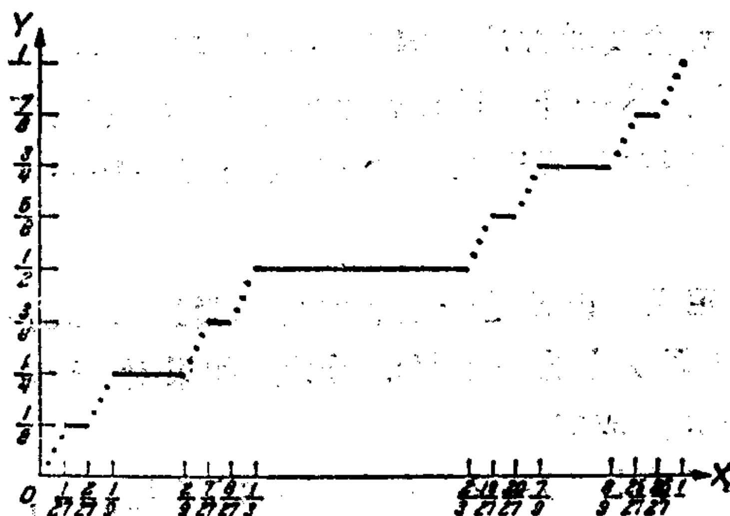


图 5

(8.29) **习题** ψ如(8.28)所设. 对于任意$x\in[0,1]$，设$\iota(x)=x$. 试证$S_\psi(\iota:[0,1])=\frac{1}{2}$.〔可考虑细分序列$(\Delta_n)$，这里$\Delta_n$是由构成$P_n$的闭区间$J_{n,k}$的端点组成的.〕至于$S_\psi(\iota^k;$

---

①法国数学家H.Lebesgue(1875—1941)是本书所研究的测度、积分及微分理论的首要奠基者，后文会经常见到他的名字.

$[0, 1])$ ($k=2, 3, \cdots$) 的计算问题，参见下文(22.44)和(22.45)。

§9 开拓若干泛函

§8，我们是把Riemann-Stieltjes积分作为$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的一种平均方法提出来的. 我们打算将这些方法开拓到广泛得多的一些函数类上. R上的许多间断函数固然也是Riemann-Stieltjes可积的，但是这些积分由于存在许多严重缺陷，而带来很多麻烦. 例如，即使一些很简单的函数，也是不可积的〔见(8.20)〕. 以下采用很一般的开拓方法. 其步骤是：先把连续函数空间上的一种平均方法开拓到非负下半连续函数上，然后开拓到所有非负、广义实值函数上，最后把所论及的方法理解为一大类函数上的一种积分(即Lebesgue积分). 这一开拓过程就是通常所谓的积分论的Daniell方法①——按英国数学家P.J.Daniell(1889—1946)的姓氏而命名.

(9.1) **定义** 设X是一个非空局部紧Hausdorff空间，I是定义在$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的一个复值函数. 如果对于任意f，$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$及$\alpha\in K$，成立

(i) $I(f+g)=I(f)+I(g)$ (加性)，

(ii) $I(\alpha f)=\alpha I(f)$ (齐次性)，

(iii) 若$f\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$，则$I(f)\geqslant 0$ (非负性)，

那么I就叫做一个**非负线性泛函**(有时叫做Radon测度).

---

①P.J.Daniell《*A general form of integral*》, Annals of Math, Vol.19, 1917—1918, 279—294.——译者注

(9.2) **例** (a) 命$X=R$,对于R上的任意实值非减函数α,命$I=S_\alpha$.

(b) 命$X=R^2$,对于一切$f\in\mathfrak{C}_{00}(R^2)$,命$I(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$.(这就是读者在初等分析中所熟知的二维Riemann积分.我们在§21 要详细讨论这种“多重”积分.)

(c) 设X是任意一个非空局部紧Hausdorff空间,a是X的一个定点.于是,由$E_a(f)=f(a)$规定的泛函E_a显而易见是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的一个非负线性泛函,它叫做**赋值泛函**(evaluation functional).此外,对于任意f,$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$,E_a还满足恒等式

$$E_a(f\cdot g)=E_a(f)E_a(g).$$

这种线性泛函叫做**积性线性泛函**.在Banach 代数理论中,积性线性泛函至为重要,后面还要研究它们〔参见下文(20.52)及(21.65)〕.

(d) 命$X=R$,并设w是R上的任意一个非负实值连续函数(可能无界).于是,$I(f)=S(fw)$(S是Riemann积分)便规定了$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的一个非负线性泛函.

除非另作说明,§9 其余部分,X总表示任意一个确定的非空局部紧Hausdorff空间,I则表示$\mathfrak{C}_{00}(X)$上任意一个确定的非负线性泛函.为简便起见,把$\mathfrak{C}_{00}(X)$写成$\mathfrak{C}_{00}$.

(9.3) **定理**

(i) 如果$f\in\mathfrak{C}_{00}^r$,则$I(f)$为一实数.

(ii) 如果在$\mathfrak{C}_{00}^r$中$f\leqslant g$,则$I(f)\leqslant I(g)$.

证 设$f\in\mathfrak{C}_{00}^r$,记$f^+=\max\{f,0\}$,$f^-=-\min\{f,0\}$.显然,$f=f^+-f^-$,$f^+\geqslant 0$,$f^-\geqslant 0$.于是$I(f)=I(f^+)-I(f^-)$,所以$I(f)$是两个非负实数之差.(i)得证.

如果$f, g \in \mathfrak{C}_{00}^r$，$f \leqslant g$，那么$g-f \geqslant 0$，从而$I(g)-I(f)=I(g-f) \geqslant 0$. (ii)得证. □

(9.4) **定理** 设$f \in \mathfrak{C}_{00}$. 则$|I(f)| \leqslant I(|f|)$.

证 记$I(f)=\rho\exp(i\theta)$，其中$0 \leqslant \rho < \infty$，$-\pi < \theta \leqslant \pi$. 命$\exp(-i\theta)f=g_1+ig_2$，其中$g_1, g_2 \in \mathfrak{C}_{00}^r$. 那么$\rho=\exp(-i\theta) \cdot I(f)=I(\exp(-i\theta)f)=I(g_1+ig_2)=I(g_1)+iI(g_2)$. 但$\rho$为实数，$I(g_1)$和$I(g_2)$也皆为实数，因而$I(g_2)=0$，$\rho=I(g_1)$. 很明显$g_1 \leqslant |\exp(-i\theta)f|=|f|$. 于是$|I(f)|=\rho=I(g_1) \leqslant I(|f|)$. □

(9.5) **定理** 设A是X的任意一个紧子集. 则必存在一个实数β（β仅依赖于A），它满足：对于适合$f(A') \subset \{0\}$的任意$f \in \mathfrak{C}_{00}$，都成立$|I(f)| \leqslant \beta \|f\|_u$.

证 按照(6.79)，有一个开集$U \supset A$，使得U^-是紧的. 根据(6.80)，存在一个X到$[0,1]$内的连续函数ω，使对于一切$x \in A$，$\omega(x)=1$，而对于一切$x \in X \cap U'$，$\omega(x)=0$. 设$f \in \mathfrak{C}_{00}$满足条件：在A'上$f=0$. 于是对于一切$x \in X$，$f(x)=f(x)\omega(x)$. 由此可见，$|f| \leqslant \|f\|_u \omega$，从而$|I(f)| \leqslant I(|f|) \leqslant I(\|f\|_u \omega)=\|f\|_u I(\omega)$. 取$\beta=I(\omega)$就行了. □

由我们所给出的线性泛函定义知道，I仅具有有限加性：$I(f+g)=I(f)+I(g)$. 但是在许多问题里，如果I也具有可数加性：$I\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$，则大为有用. 就$X$上所有收敛函数序列来说，这一等式成立是罕见的，要想证明等式对于某些函数序列来说是正确的，那必须开拓I的定义域才行. 以下(9.6)—(9.18)就来作这一开拓，并证明这种开拓泛函的一些性质，从而导致可数加性.

(9.6) **定理** 设$\mathfrak{D}$是$\mathfrak{C}_{00}^+$的一个非空子集，它具有性质：对

任意f_1，$f_2\in\mathfrak{D}$，存在$f_3\in\mathfrak{D}$，使$f_3\leqslant\min\{f_1, f_2\}$〔这时称$\mathfrak{D}$是向下的〕. 又假定对于任意$x\in X$，$\inf\{f(x): f\in\mathfrak{D}\}=0$. 则有

(i) $\inf\{I(f): f\in\mathfrak{D}\}=0$，

并且对于任意$\varepsilon>0$，存在一个$f_\varepsilon\in\mathfrak{D}$，使$\|f_\varepsilon\|_u<\varepsilon$.〕

证 设给定了$\varepsilon>0$. 取$f_0\in\mathfrak{D}$，并规定

$$A_0=\{x\in X: f_0(x)>0\}^-.$$

由于$f_0\in\mathfrak{C}_{00}$，A_0便是紧的. 对于每个$f\in\mathfrak{D}$，命$A_f=\{x\in A_0: f(x)\geqslant\varepsilon\}$. 那么$\{A_f: f\in\mathfrak{D}\}$是紧空间$A_0$的一个闭子集族，且$\cap\{A_f: f\in\mathfrak{D}\}=\varnothing$. 由此可见(6.34)，这个族并不具有有限交性，这就是说，存在$\mathfrak{D}$的一个有限子集$\{f_1, \cdots, f_n\}$，使$A_{f_1}\cap A_{f_2}\cap\cdots\cap A_{f_n}=\varnothing$. 既然$\mathfrak{D}$是向下的，便存在一个函数$f_\varepsilon\in\mathfrak{D}$，使$f_\varepsilon\leqslant\min\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$；显然$\|f_\varepsilon\|_u<\varepsilon$.

为了证明(i)，我们利用(9.5)可以找到一个实数β(β仅依赖于A_0，而与ε无关)，使对于一切在A_0'上等于零的$f\in\mathfrak{C}_{00}$，都有$|I(f)|\leqslant\beta\|f\|_u$. 显而易见，在$A_0'$上$f_\varepsilon=0$. 这样一来，$0\leqslant I(f_\varepsilon)\leqslant\beta\|f_\varepsilon\|_u<\beta\varepsilon$. ε既是任意的，(i)便得证. □

(9.7) **评注** 读者想必注意到了，定理(9.6)的证明中，最根本的一点是利用了紧性. 这并不是偶然的. 我们选定函数空间$\mathfrak{C}_{00}$，正是为了可以用得上紧性. 要是选定许多别的函数空间和正线性泛函，表面上看来似乎行得通，其实都不能导致可数加性开拓. 定理(9.6)乃是得到我们的开拓泛函的可数加性的关键，所以说，可数加性最终依赖于紧性.

我们先把I开拓到函数类$\mathfrak{M}^+$——它由在X上下半连续且值域包含在$[0, \infty]$内的函数全体组成.〔参见(7.20)—(7.22).〕

(9.8) **定义** 对于每个$g\in\mathfrak{M}^+$，规定

$$\overline{I}(g)=\sup\{I(f): f\in\mathfrak{C}_{00}^+, f\leqslant g\}.$$

要注意，$\overline{I}(g)$可能是∞. 例如，如果$X=R$，$I=S$，那

么函数1属于$\mathfrak{M}^+$，而$\overline{S}(1)=\infty$. 再如，对于任意的X及$I\neq 0$，函数∞属于$\mathfrak{M}^+$，而$\overline{I}(\infty)=\infty$.

(9.9) **习题** (a) 试仔细计算$\overline{S}(\xi_U)$，其中U是R的任意一个开子集，S是Riemann积分.〔提示.利用(6.59).〕数$\overline{S}(\xi_U)$叫做U的**Lebesgue测度**. 后面还要详细讨论这个测度.

(b) 就赋值泛函E_a(9.2.c)和$g\in\mathfrak{M}^+$，试计算$\overline{E}_a(g)$.

(9.10) **定理**

(i) 如果$f\in\mathfrak{C}_{00}^+$，则$I(f)=\overline{I}(g)$.

(ii) 如果g_1，$g_2\in\mathfrak{M}^+$，$g_1\leqslant g_2$，则$\overline{I}(g_1)\leqslant\overline{I}(g_2)$.

(iii) 如果$g\in\mathfrak{M}^+$，$\alpha\geqslant 0$，则$\overline{I}(\alpha g)=\alpha\overline{I}(g)$.

一想便知这些断言都是正确的.

以下定理是与(9.6)相对应的命题.

(9.11) **定理** 设$\mathfrak{D}$是$\mathfrak{M}^+$的一个非空子集，它具有性质：对于任意g_1，$g_2\in\mathfrak{D}$，存在一个$g_3\in\mathfrak{D}$，使$g_3\geqslant\max\{g_1, g_2\}$（这时称$\mathfrak{D}$是**向上的**）. 则

(i) $\overline{I}(\sup\mathfrak{D})=\sup\{\overline{I}(g):g\in\mathfrak{D}\}$

证 命$g_0=\sup\{g:g\in\mathfrak{D}\}$，就是说，对于任意$x\in X$，$g_0(x)=\sup\{g(x):g\in\mathfrak{D}\}$. 则(7.22.iii)表明$g_0\in\mathfrak{M}^+$. 分两种情况考虑.

第一种情况：$\{g_0\}\cup\mathfrak{D}\subset\mathfrak{C}_{00}^+$. 这时族$\{g_0-g:g\in\mathfrak{D}\}$满足(9.6)的题设，这是因为，由本定理题设，$g_3\geqslant\max\{g_1, g_2\}$，于是

$$g_0-g_3\leqslant\min\{g_0-g_1, g_0-g_2\},$$

而对于任意$x\in X$，成立

$$\inf\{g_0(x)-g(x):g\in\mathfrak{D}\}=g_0(x)-\sup\{g(x):g\in\mathfrak{D}\}=g_0(x)-g_0(x)=0.$$

那么，由(9.6)推知

$$0=\inf\{I(g_0-g):g\in\mathfrak{D}\}=\inf\{I(g_0)-I(g):g\in\mathfrak{D}\}$$
$$=I(g_0)-\sup\{I(g):g\in\mathfrak{D}\}.$$

但在$\mathfrak{C}_{00}^+$上$\bar{I}$与I是一致的，从而$\bar{I}(g_0)=\sup\{\bar{I}(g):g\in\mathfrak{D}\}$.

第二种情况：$\{g_0\}\cup\mathfrak{D}\subset\mathfrak{M}^+$，这是一般情况．既然对于一切$g\in\mathfrak{D}$，都有$g\leqslant g_0$，因此得到

$$\sup\{\bar{I}(g):g\in\mathfrak{D}\}\leqslant\bar{I}(g_0).$$

为了证明反向不等式也成立，我们引进一个函数族$\mathfrak{E}=\{f\in\mathfrak{C}_{00}^+:$对于某个$g\in\mathfrak{D}$，$f\leqslant g\}$．利用(7.22.v)便得出

$$g_0=\sup\{g:g\in\mathfrak{D}\}=\sup\{\sup\{f\in\mathfrak{C}_{00}^+:f\leqslant g\}:g\in\mathfrak{D}\}$$
$$=\sup\mathfrak{E}.$$

设β是小于$\bar{I}(g_0)$的任意实数．根据$\bar{I}$的定义，必存在$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}^+$，它满足：$\varphi\leqslant g_0$，$I(\varphi)>\beta$．我们有

$$\varphi=\min\{\varphi,g_0\}=\min\{\varphi,\sup\mathfrak{E}\}=\sup\{\min\{\varphi,f\}:f\in\mathfrak{E}\}$$

（读者应仔细验证这一奇妙变换）．第一种情况的结果现在适用于族$\{\min\{\varphi,f\}:f\in\mathfrak{E}\}$：这个族相当于$\mathfrak{D}$，而$\varphi$相当于$g_0$．这样一来，

$$\beta<I(\varphi)=\sup\{I(\min\{\varphi,f\}:f\in\mathfrak{E}\}\leqslant\sup\{I(f):f\in\mathfrak{E}\}$$
$$=\sup\{\bar{I}(g):g\in\mathfrak{D}\}.$$

β既是任意的，这就证明了

$$\bar{I}(g_0)\leqslant\sup\{\bar{I}(g):g\in\mathfrak{D}\}.\qquad\square$$

(9.12) **推论** 如果$g_1\leqslant g_2\leqslant\cdots\leqslant g_n\leqslant\cdots$，其中$g_n\in\mathfrak{M}^+(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\bar{I}(g_n)=\bar{I}(\lim_{n\to\infty}g_n)$$

可直接得证.

(9.13) **推论** 设g_1，$g_2\in\mathfrak{M}^+$，则成立

$$\bar{I}(g_1+g_2)=\bar{I}(g_1)+\bar{I}(g_2).$$

证 我们有$g_1+g_2=\sup\{f_1+f_2: f_j\in\mathfrak{C}_{00}^+$，且$f_j\leqslant g_j, j=1, 2\}$，因而

$$\begin{aligned}\bar{I}(g_1+g_2)&=\sup\{I(f_1)+I(f_2):f_j\in\mathfrak{C}_{00}^+,f_j\leqslant g_j\}\\&=\sup\{I(f_1):f_1\in\mathfrak{C}_{00}^+,f_1\leqslant g_1\}\\&\quad+\sup\{I(f_2):f_2\in\mathfrak{C}_{00}^+,f_2\leqslant g_2\}\\&=\bar{I}(g_1)+\bar{I}(g_2).\quad\square\end{aligned}$$

(9.14) **推论** 对于任意的非空$\mathfrak{D}\subset\mathfrak{M}^+$，成立

$$\bar{I}\left(\sum_{g\in\mathfrak{D}} g\right)=\sum_{g\in\mathfrak{D}}\bar{I}(g)$$①

证 如果$\mathfrak{D}$是有限的，则对(9.13)应用归纳法不难得出结果. 如果$\mathfrak{D}$是无限的，那么援用(9.13)及(9.11)就行了. □

以下作I的第二次开拓，接下去作最后的开拓.

(9.15) **定义** 设$\mathfrak{F}^+$是定义在X上且值在$[0,\infty]$内的函数全体所成的集. 对于$h\in\mathfrak{F}^+$，命

$$\bar{\bar{I}}(h)=\inf\{\bar{I}(g):g\in\mathfrak{M}^+,g\geqslant h\}.$$

(9.16) **定理**

(i) 对于$g\in\mathfrak{M}^+$，成立$\bar{I}(g)=\bar{\bar{I}}(g)$.

(ii) 如果$h_1\leqslant h_2$，$h_j\in\mathfrak{F}^+$，则成立$\bar{\bar{I}}(h_1)\leqslant\bar{\bar{I}}(h_2)$.

(iii) 对于$h\in\mathfrak{F}^+$及$0\leqslant\alpha<\infty$，成立$\bar{\bar{I}}(\alpha h)=\alpha\bar{\bar{I}}(h)$.

---

① 函数$\sum_{g\in\mathfrak{D}} g$定义为$\left(\sum_{g\in\mathfrak{D}} g\right)(x)=\sup\{g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x):\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}\subset\mathfrak{D}\}$；类似地有$\sum_{g\in\mathfrak{D}}\bar{I}(g)=\sup\{\bar{I}(g_1)+\bar{I}(g_2)+\cdots+\bar{I}(g_n):\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}\subset\mathfrak{D}\}$.

(iv)对于$h_1, h_2\in\mathfrak{F}^+$，成立$\overline{\overline{I}}(h_1+h_2)\leqslant\overline{\overline{I}}(h_1)+\overline{\overline{I}}(h_2)$.

证明留给读者.

以下定理是B.Levi单调收敛定理的推广.

(9.17) **定理** (**广义B.Levi定理**) 如果$h_n\in\mathfrak{F}^+$($n=1, 2, 3, \cdots$)，且$h_1\leqslant h_2\leqslant\cdots\leqslant h_n\leqslant\cdots$，则

$$\overline{\overline{I}}(\lim_{n\to\infty}h_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n).$$

证 命$h=\lim\limits_{n\to\infty}h_n$；显然有

$$\overline{\overline{I}}(h_1)\leqslant\overline{\overline{I}}(h_2)\leqslant\cdots\leqslant\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)\leqslant\overline{\overline{I}}(h).$$

因此须证$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)\geqslant\overline{\overline{I}}(h)$；自然不妨假定$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)<\infty$. 给定$\varepsilon>0$. 对于每个正整数$n$，取$g_n\in\mathfrak{M}^+$，使$g_n\geqslant h_n$，$\overline{I}(g_n)-\dfrac{\varepsilon}{2^n}<\overline{\overline{I}}(h_n)$. 我们想应用(9.12). 为此，必须把函数$g_n$换成一个非减序列. 例如规定$g'_n=\max\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$($n=1, 2, \cdots$)；则$g'_n\in\mathfrak{M}^+$($n=1, 2, \cdots$). 读者不难验证以下恒等式

$$g'_{n+1}+\min\{g_n', g_{n+1}\}=g_n'+g_{n+1}.$$

由于恒等式中的所有函数都属于$\mathfrak{M}^+$，所以得到

$$\overline{I}(g'_{n+1})+\overline{I}(\min\{g_n', g_{n+1}\})=\overline{I}(g_n')+\overline{I}(g_{n+1}).$$

由不等式$g_{n+1}\geqslant h_{n+1}\geqslant h_n$及$g'_n=\max\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}\geqslant\max\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}=h_n$,可以推知$\min\{g'_n, g_{n+1}\}\geqslant h_n$.因此$-\overline{I}(\min\{g'_n, g_{n+1}\})\leqslant-\overline{\overline{I}}(h_n)$，于是得到

$$\begin{aligned}\overline{I}(g'_{n+1})&=\overline{I}(g_n')+\overline{I}(g_{n+1})-\overline{I}(\min\{g_n', g_{n+1}\})\\&\leqslant\overline{I}(g_n')+\overline{I}(g_{n+1})-\overline{\overline{I}}(h_n)\end{aligned}$$

$$<\overline{I}(g_n')+\overline{\overline{I}}(h_{n+1})+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}-\overline{\overline{I}}(h_n).]$$

把以上不等式从 $n=1$ 到 $n=p$ 加起来，便得到

$$\sum_{n=1}^{p}\overline{I}(g'_{n+1})<\sum_{n=1}^{p}\overline{I}(g'_n)+\sum_{n=1}^{p}\overline{\overline{I}}(h_{n+1})$$

$$-\sum_{n=1}^{p}\overline{\overline{I}}(h_n)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=1}^{p}2^{-n},$$

从而

$$\overline{I}(g'_{p+1})<\overline{I}(g'_1)+\overline{\overline{I}}(h_{p+1})-\overline{\overline{I}}(h_1)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\overline{\overline{I}}(h_{p+1})+(\overline{I}(g_1)-\overline{\overline{I}}(h_1))+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\overline{\overline{I}}(h_{p+1})+\varepsilon.$$

这样，不等式 $\overline{I}(g'_{p+1})<\overline{\overline{I}}(h_{p+1})+\varepsilon$ 对于 $p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 都成立．因为当 $p=0$ 时这一不等式也成立，所以得到

$$\overline{I}(g'_n)<\overline{\overline{I}}(h_n)+\varepsilon \tag{1}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$．序列 (g'_n) 是非减的，且 $g'_n\in\mathfrak{M}^+$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；于是由(9.12)推出

$$\lim_{n\to\infty}\overline{I}(g'_n)=\overline{I}(\lim_{n\to\infty}g'_n)=\overline{I}(\sup g'_n).$$

由于 $g'_n\geqslant g_n\geqslant h_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，便有 $\sup g'_n\geqslant\sup h_n=h$，从而 $\overline{I}(\sup g'_n)\geqslant\overline{\overline{I}}(h)$．再利用(1)，便得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\overline{I}(g'_n)-\varepsilon\geqslant\overline{\overline{I}}(h)-\varepsilon$．既然 ε 是任意的，这就推出了

不等式 $\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)\geqslant\overline{\overline{I}}(h)$. □①

(9.18) **推论** 设$(h_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{J}^+$中的任意函数序列；则

$$\overline{\overline{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}h_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{I}}(h_n).$$

证 记$\psi_n=h_1+h_2+\cdots+h_n$；那么

$$\overline{\overline{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}h_n\right)=\overline{\overline{I}}(\lim_{n\to\infty}\psi_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(\psi_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}\left(\sum_{k=1}^{n}h_k\right)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{\overline{I}}(h_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{I}}(h_n).\qquad\square$$

现在来定义X的子集的（关于$\overline{\overline{I}}$的）测度.

(9.19) **定义** (a) 对于$A\subset X$,命$\iota(A)=\overline{\overline{I}}(\xi_A)$. 我们称$\iota(A)$为$A$的（外）**测度**. 函数$\iota$——定义在$\mathscr{P}(X)$上——叫做由$I$**导出的（外）测度**.

(b) 假如$X=R$,且对于R上的某个实值非减函数α, $I=S_\alpha$,这时记$\lambda_\alpha(A)=\overline{\overline{S}}_\alpha(\xi_A)$，并称$\lambda_\alpha$为$R$**上由**$\alpha$**导出的Lebesgue-Stieltjes（外）测度**.

(c) 如果$X=R$, $I=S$（Riemann积分），则记$\lambda(A)=\overline{\overline{S}}(\xi_A)$，并称$\lambda$为$R$**上的Lebesgue（外）测度**.

(d) 对于任意的X和$I=E_a$(9.2.c)，记$\varepsilon_a(A)=\overline{\overline{E}}_a(\xi_A)$，并称$\varepsilon_a$为**集中在**$a$**的单位点式质量**（unit point mass）（或称**Dirac测度**）.

(9.20) **习题** 对于任意的X, $a\in X$及$A\subset X$，试证：$a\in A$时，$\varepsilon_a(A)=1$，而$a\notin A$时，$\varepsilon_a(A)=0$. 也就是，

---

①定理(9.17)毫无疑问就是用$\overline{\overline{I}}$代替$\overline{I}$后的(9.12). 但必须指出，如(9.13)和(9.11)中也用$\overline{\overline{I}}$代替$\overline{I}$，一般说来结论就不正确了：参看(10.41). 自然，(9.17)的事实十分值得注意.

$e_a(A)=\xi_A(a)$.

接下去要研究测度 ι 的性质，并打算由测度 ι 来构造一种积分——当 $\iota=\lambda$时，它就是古典Lebesgue积分，我们将证明，只要这种积分存在，它无非就是泛函 $\overline{\overline{I}}$. 不过，这一构造程序篇幅略长；直到后文定理(12.35)才能得出最后结论. 以下先指出集函数 ι 的某些性质.

(9.21) 定理 集函数 ι 具有以下四条性质：

(i) 对于任意$A\subset X$, $0\leqslant\iota(A)\leqslant\infty$;

(ii) 当$A\subset B\subset X$时, $\iota(A)\leqslant\iota(B)$;

(iii) $\iota(\varnothing)=0$;

(iv) 如果$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是X的任意子集序列，则

$$\iota\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\iota(A_n)$$

(次可数加性).

证 断言(i)—(iii)是 ι 的定义的平凡推论. 为了证明(iv)，推导如下：

$$\iota\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\overline{\overline{I}}\left(\xi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}\right)\leqslant\overline{\overline{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{A_n}\right)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{I}}(\xi_{A_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\iota(A_n);$$

这里利用了不等式 $\xi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{A_n}$及(9.18). □

(9.22) 定理 设$\{U_\theta:\theta\in\Theta\}$是任意一个两两不相交的$X$的开子集族. 则

$$\iota\left(\bigcup_{\theta\in\Theta}U_\theta\right)=\sum_{\theta\in\Theta}\iota(U_\theta).$$

证 命$U=\bigcup_{\theta\in\Theta}U_\theta$, 显然，对于每个$\theta\in\Theta$, $\xi_{U_\theta}\in\mathfrak{M}^+$, 且

$\xi_U = \sum_{\theta \in \Theta} \xi_{U_\theta}$. 应用(9.14)，便得出

$$\iota(U) = \overline{I}(\xi_U) = \sum_{\theta \in \Theta} \overline{I}(\xi_{U_\theta}) = \sum_{\theta \in \Theta} \iota(U_\theta). \quad \square$$

(9.23) **推论** 如果$(]a_n, b_n[)_{n=1}^{\infty}$是任意一个两两不相交的$R$的开区间序列，则

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n).$$

证 这是(9.22)以及$\lambda(]a, b[) = b - a$这一事实（其证明留作简单练习）的直接推论.（应当注意，a或b可能是无限数.）还可参看习题(9.9.a). $\square$

(9.24) **定理** 对于任意$A \subset X$，都有

$$\iota(A) = \inf\{\iota(U) : U\text{是开集，}A \subset U\}.$$

证 如果$\iota(A) = \infty$，那么，既然$A \subset X$，X是开集，$\infty = \iota(A) \leqslant \iota(X) = \infty$，定理结果则是平凡的. 因此假定$\iota(A) < \infty$. 任给$\varepsilon > 0$. 取实数$\delta$，使$0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \iota(A)} < 1$. 然后选$g \in \mathfrak{M}^+$，使$g \geqslant \xi_A$，$\overline{I}(g) - \delta \leqslant \overline{\overline{I}}(\xi_A) = \iota(A)$. 命$U = \{x \in X : g(x) > 1 - \delta\}$. 很明显，$U$是开集，$A \subset X$. 设$x \in U$，得到$\dfrac{1}{1-\delta} g(x) > 1$，从而$\dfrac{1}{1-\delta} g \geqslant \xi_U$. 于是

$$\iota(U) = \overline{I}(\xi_U) \leqslant \overline{I}\left(\frac{1}{1-\delta} g\right)$$

$$= \frac{1}{1-\delta} \overline{I}(g) < \frac{1}{1-\delta}(\iota(A) + \delta) < \iota(A) + \varepsilon. \quad \square$$

(9.25) **评注** 由(9.24)，(6.59)及(9.23)推知，对于$A \subset R$，我们得到$\lambda(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\supset A, \{]a_n,\right.$

$]a_n, b_n[\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两不相交的$\}$. 这正是1902年Lebesgue本人原先定义λ的方法. Lebesgue的基本思想是，考虑用可数个开区间覆盖 A. 在此以前，人们曾试图就R的子集定义适当的测度概念，这些尝试虽然皆类似于Lebesgue所采用的方法，但所不同的是，对所论及的集都只考虑了有限覆盖. 比方说，C.Jordan就曾把A的**容度**定义为数值 $\inf\left\{\sum_{n=1}^{p}(b_n-a_n):A\subset\bigcup_{n=1}^{p}]a_n, b_n[, p=1, 2, \cdots\right\}$①.

有些数学家仍在研究 Jordan 容度（容度的德文是：*Inhalt*）②，但是，对现代分析来说，业已证明Jordan容度是很难满足论题需要的.

(9.26) **定理** 设U是X中的任意一个开集；则有

$$\iota(U)=\sup\{\iota(F): F\text{是紧的}, F\subset U\}$$
$$=\sup\{\iota(V): V\text{是}X\text{中的开集}, V^-\text{是紧的}, V^-\subset U\}.$$

证 取适合$\beta<\iota(U)$的任意一个实数β. 既然U是开集，便有 $\iota(U)=\overline{I}(\xi_U)=\sup\{I(f): f\in\mathfrak{C}_{00}^+, f\leqslant\xi_U\}$. 这样，可取$f\in\mathfrak{C}_{00}^+$，使$\beta<I(f)\leqslant\iota(U)$. 对于$n=1, 2, 3, \cdots$，规定$F_n=\{x\in X: f(x)\geqslant\frac{1}{n}\}$，$W_n=\{x\in X: f(x)>\frac{1}{n}\}$；$F_n$是紧的，$W_n$是开的，$W_n^-$是紧的. 命$W=\{x\in X: f(x)>0\}$，很明显，对于每个$x\in X$，$\lim_{n\to\infty}\xi_{F_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\xi_{W_n}(x)=\xi_W(x)$，而且这些序列都是非减的，也是很明白的. 应用(9.17)，便得到

---

①有关历史概况，请参看M.Kline《*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*》第44章.（有中译本，古今数学思想，第四册，上海科学技术出版社，1981.）——译者注

②例如参看K.Mayrhofer,《*Inhalt und Maβ*》,Springer—Verlag, Wien, 1952.

$$\beta<I(f)\leqslant\bar{I}(\xi_W)=\lim_{n\to\infty}\bar{I}(\xi_{F_n})=\lim_{n\to\infty}\bar{I}(\xi_{W_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\iota(F_n)=\lim_{n\to\infty}\iota(W_n).$$

由这些不等式便推出本定理. □

(9.27) **定理** 如果$A\subset X$，A^-是紧的，则$0\leqslant\iota(A)<\infty$.

证 按照(6.79)，存在一个开集U，使U^-是紧的，且$A^-\subset U$. 应用(6.80)，可求得一个连续函数$f: X\to[0, 1]$，它适合条件：对于一切$x\in A^-$，$f(x)=1$，而对于一切$x\in U'$，$f(x)=0$. 那么$\xi_A\leqslant f\in\mathfrak{C}_{00}^+$，从而$\iota(A)=\bar{I}(\xi_A)\leqslant I(f)<\infty$. □

(9.28) **定理** 存在具有下列三条性质的唯一的一个集$E\subset X$：

(i) E是X中的闭集；

(ii) 如果$E\cap U=\varnothing$，而U是X中的开集，那么$\iota(E\cap U)>0$；

(iii) $\iota(X\cap E')=0$.

集E叫做ι的**支集**（也叫做**支柱**或**承载集**或**谱集**）.

证 命$\mathscr{U}\doteq\{U: U$是X中的开集，$\iota(U)=0\}$，$V=\bigcup\mathscr{U}$，$E=V'$. 由于$\xi_V\leqslant\sum_{U\in\mathscr{U}}\xi_U$，且对于每个$U\in\mathscr{U}$，$\xi_U\in\mathfrak{M}^+$，那么由(9.14)得到

$$\iota(E')=\iota(V)=\bar{I}(\xi_V)\leqslant\bar{I}\left(\sum_{U\in\mathscr{U}}\xi_U\right)$$

$$=\sum_{U\in\mathscr{U}}\bar{I}(\xi_U)=\sum_{U\in\mathscr{U}}\iota(U)=0.$$

这样，便证实了(i)和(iii). 为了证明(ii)，命W是适合条件$E\cap W\neq\varnothing$的X的任意一个开子集. 那么$W\notin\mathscr{U}$，$V\cap W\in\mathscr{U}$. 于是

$$0<\iota(W)\leqslant\iota(E\cap W)+\iota(V\cap W)=\iota(E\cap W).$$

因此集E确具有性质(i)，(ii)和(iii).

为了证明E的唯一性，假定E_1，E_2都满足(i)，(ii)和(iii)，

而$E_1 \neq E_2$，那么$E_1' \cap E_2$和$E_1 \cap E_2'$中至少有一个非空：比方说，$E_1' \cap E_2 \neq \varnothing$. 由于$E_1'$是开集，由性质(ii)可知，$\iota(E_1' \cap E_2) > 0$. 但因$E_1' \cap E_2 \subset E_1'$，从而应有$0 < \iota(E_1' \cap E_2) \leqslant \iota(E_1')$. 而根据(iii)，又有$\iota(E') = 0$. 这就导致矛盾. □

(9.29) **定义** 设A是X的一个子集，如果$\iota(A)=0$，则称A是一个**ι零集**. 如果对于任意紧集$F \subset X$，都有$\iota(B \cap F) = 0$，则称B是一个**局部ι零集**. 假如有一个性质，对于除去某个ι零集的点x之外的一切$x \in X$都成立，就说这个性质**ι几乎处处**(简记为ι-a.e.)成立. 假如一个性质对于除去某个局部ι-零集的点x之外的一切点$x \in X$都成立，就说这个性质**局部ι几乎处处**(局部ι-a.e.)成立. X上的一个复值或广义实值函数f，倘若适合条件：$f(x) = 0$ ι-a.e.①(局部ι-a.e.)，则称f是一个**ι零函数**(**局部ι零函数**). 在不致产生混淆的情况下，就省去前面的"ι".

(9.30) **定理** 设$h \in \mathfrak{I}^+$，则$\overline{\overline{I}}(h) = 0$的充要条件是$h$是一个$\iota$零函数. 如果$\overline{\overline{I}}(h) < \infty$，那么$h$是$\iota$-a.e.有限的.

证 命$A = \{x \in X : h(x) > 0\}$. 函数$nh$ ($n = 1, 2, \cdots$)都属于$\mathfrak{I}^+$，且显然成立$\lim\limits_{n\to\infty} nh \geqslant \xi_A$. 如果$\overline{\overline{I}}(h) = 0$，(9.17)就表明$\iota(A) = \overline{\overline{I}}(\xi_A) \leqslant \overline{\overline{I}}(\lim\limits_{n\to\infty} nh) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\overline{I}}(nh) = \lim\limits_{n\to\infty} n\overline{\overline{I}}(h) = 0$. 反之，如果$h$是一个$\iota$零函数，那么$\iota(A) = 0$；利用不等式$h \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} n\xi_A$，便得到$\overline{\overline{I}}(h) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\overline{I}}(n\xi_A) = \lim\limits_{n\to\infty} n\overline{\overline{I}}(\xi_A) = \lim\limits_{n\to\infty} n\,\iota(A) = 0$.

其次假设$\overline{\overline{I}}(h) < \infty$，命$B = \{x \in X : h(x) = \infty\}$. 对于任意$\varepsilon > 0$，必成立$\xi_B \leqslant \varepsilon h$，从而$\iota(B) = \overline{\overline{I}}(\xi_B) \leqslant \overline{\overline{I}}(\varepsilon h) = \varepsilon \overline{\overline{I}}(h)$. 既然$\overline{\overline{I}}(h)$是有限的，便得出$\iota(B) = 0$. □

---

① "$f(x) = 0$ ι-a.e." 是英语的表达方式，表示"性质$f(x) = 0$ ι-a.e.成立". 下文大部从这一习惯用法. 但有时根据需要，也采用汉语的规范说法，说成"ι-a.e.成立$f(x) = 0$". 诸如此类将ι-a.e.放在适当位置的汉语规范说法，不再一一注明. ——译者注

(9.31) **推论** 设$(h_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{J}^+$中的一个函数序列，并假定$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(h_n)=0$. 则必存在一个子序列$(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{n_k}(x)<\infty$ ι-a.e.于X，特别说来，$\lim\limits_{k\to\infty}h_{n_k}(x)=0$ ι-a.e.

证 先取(h_n)的一个子序列(h_{n_k})，满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\overline{I}}(h_{n_k})<\infty$. 利用(9.18)，可知$\overline{\overline{I}}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{n_k}\right)<\infty$，再由(9.30)便得到$\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{n_k}(x)<\infty$ ι-a.e. □

以下定理固然是一项技术性细节，但对于后文却大为有用.

(9.32) **定理** 设U是X的一个开子集，则对于任意集$T\subset X$，都成立等式：

$$\iota(T)=\iota(T\cap U)+\iota(T\cap U').$$

证 设$T\subset X$. 由(9.21)直接推得

$$\iota(T)\leqslant\iota(T\cap U)+\iota(T\cap U').$$

现证反向不等式. $\iota(T)=\infty$时，它显然成立. 因此假设$\iota(T)<\infty$，并给定任意$\varepsilon>0$. 根据(9.24)，便有一个开集$V\supset T$，适合$\iota(V)<\iota(T)+\frac{\varepsilon}{2}$. 再利用(9.24)，取一个开集$H\supset V\cap U'$，适合$\iota(H)<\iota(V\cap U')+\frac{\varepsilon}{4}$. 应用(9.26)，取一个开集$W$，适合$W^-\subset V\cap U$，且$\iota(W)+\frac{\varepsilon}{4}>\iota(V\cap U)$. 命$W_0=V\cap H\cap(W^-)'$；那么$W$和$W_0$是不相交的两个开集. 由于$V\cap U'$是各个集$V$，$H$，$(W^-)'$的子集，可见$V\cap U'\subset W_0\subset H$，从而

$$0\leqslant\iota(W_0)-\iota(V\cap U')\leqslant\iota(H)-\iota(V\cap U')<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此

$$\begin{aligned}&|\iota(W)+\iota(W_0)-(\iota(V\cap U)+\iota(V\cap U'))|\\&\quad\leqslant|\iota(W_0)-\iota(V\cap U')|+|\iota(W)-\iota(V\cap U)|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

把这一结果与包含关系$W\cup W_0\subset V$结合起来并应用(9.22)，则得到

$$\iota(T)+\varepsilon>\iota(V)+\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\iota(W\cup W_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\iota(W)+\iota(W_0)+\frac{\varepsilon}{2}>\iota(V\cap U)+\iota(V\cap U')$$

$$\geqslant\iota(T\cap U)+\iota(T\cap U')$$

既然ε是任意的，便得出结论

$$\iota(T)\geqslant\iota(T\cap U)+\iota(T\cap U').\ \square$$

(9.33) **习题** 试证：

(a) 如果在R^*中$a<b$，那么$\lambda(]a, b[)=b-a$；

(b) 如果在R中$a<b$，那么

$\lambda(]a, b[)=\lambda([a, b[)=\lambda(]a, b])=\lambda([a, b])=b-a$.

(9.34) **习题** 设A是R的一个可数子集. 试证$\lambda(A)=0$.

(9.35) **习题** 设P是Cantor三分点集. 试证$\lambda(P)=0$.

(9.36) **习题** 试构造$[0, 1]$的一个无处稠密的完全子集F，使$\lambda(F)=\alpha$，这里α是适合$0\leqslant\alpha<1$的任意实数.

(9.37) **习题** 设F是R的一个非空完全子集. 试证：F含有一个有Lebesgue零测度的非空完全子集.

(9.38) **习题** 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$为一正实数序列，并且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$.

试证存在一个两两不相交的开区间序列$(I_n)_{n=1}^{\infty}$，它满足：$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset[0, 1]$，对于每个$n\in N$有$\lambda(I_n)=a_n$，以及$[0, 1]\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n)'$在$R$中是无处稠密的和完全的. [参看(8.26).]

(9.39) **习题** (Fatou引理)设X和I仍是任意的. 假定(h_n)

是$\mathfrak{F}^+$中的一个函数序列．试证：

$$\overline{I}(\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \overline{I}(h_n).$$

并求能使严格不等号成立的一个序列$(h_n)\subset \mathfrak{C}_{00}^+$，这里$X=R$，$I=S$（即Riemann积分）．

(9.40) **习题** 设X是局部紧Hausdorff空间，X^*是X（具有相对拓扑）的非空闭子集，I^*是$\mathfrak{C}_{00}(X^*)$上的非负线性泛函，ι^*是如同（9.19）由泛函I^*构造的定义在X^*的子集上的集函数．

(a) 对于X上函数f，设f^*是其定义域限制在X^*上的f．试证：如果$f\in \mathfrak{C}_{00}(X)$，那么$f^*\in \mathfrak{C}_{00}(X^*)$．

(b) 设$g\in \mathfrak{C}_{00}(X^*)$．试证：存在一个函数$f\in \mathfrak{C}_{00}(X)$，使$g=f^*$．〔利用Tietze开拓定理（7.40）．〕

(c) 对于$f\in \mathfrak{C}_{00}(X)$，命$I(f)=I^*(f^*)$．试证$I$是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的一个非负线性泛函．

(d) 设ι是如同(9.19)由I得到的集函数．试证：$\iota(X^{*\prime})=0$，且对于任意$A\subset X$，都有

$$\iota(A)=\iota(A\cap X^*)=\iota^*(A\cap X^*).$$

(9.41) **习题** 设X是乘积空间$R_d\times R$，其中第一个因子是具有离散拓扑的实直线，第二个因子是具有通常拓扑的实直线．对于x，a，$b\in R$，这里$a<b$，命

$$U(x,a,b)=\{(x,y)\in X: a<y<b\}=\{x\}\times]a,b[.$$

(a) 试证：$\{U(x,a,b): x, a, b\in R\text{且}a<b\}$是$X$上的积拓扑的一个基（6.41）．

(b) 试证：具有这一拓扑的X是一个局部紧Hausdorff空间．

对于定义在X上的任意函数f及任意$x\in R$，设$f_{[x]}$是R上由$f_{[x]}(y)=f(x, y)$定义的函数．

(c) 试证：如果$f\in \mathfrak{C}_{00}(X)$，那么，除有限个$x\in R$外，$f_{[x]}$恒为零．

在$\mathfrak{C}_{00}(X)$上规定I为$I(f)=\sum_{x\in R}S(f(x))$，其中$S$是普通Riemann积分.

(d) 试证：I是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的一个非负线性泛函.

设ι是如同(9.19)由I得到的测度.

(e) 试证：$A=\{(x,0):x\in R\}$是局部ι零集，但不是ι零集.

(9.42) **习题** 试证：如果X是紧集的可数并(称这类空间是σ紧的)，那么凡局部ι零集都是ι零集.

§10 测度与可测集

(10.1) **引言** §9专门论述了泛函$\overline{\overline{I}}$和定义在$\mathscr{P}(X)$上的集函数ι的结构. 我们的最终目的——要等到§12才能达到——在于寻求X上的一个相当大的函数类，就这一函数类而言，等式

$$\text{(i)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{I}}(f_n)=\overline{\overline{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)$$

成立.〔对于$\mathfrak{M}^+$中的函数来说，业已证明(i)式成立.〕为此，我们借助于抽象测度以及根据抽象测度所定义的积分. 寻求(i)式能成立的X上的一个最大函数族，这一问题尚未解决，而且显然是极其困难的. 解决这一问题固然不止一个途径，但我们所采用的方法，却具有既简单易行，又可以引进抽象积分的优点，而抽象积分则是每位读者总应了解的.

本节主要涉及集函数ι的一些性质，特别涉及到它在X的某个完全确定的子集族上的良好特性. 在定义这个集族时所需要的ι的一些性质已列入定理(9.21). 具有(9.21.i)—(9.21.iv)等属性的集函数，原来可以抽象地加以研究，而与拓扑空间或正泛函无关. 我们形式定义如下.

(10.2) **定义** 设X是一个集(没有拓扑)，μ是定义在$\mathscr{P}(X)$上的一个函数. 如果下列四个关系式成立，μ就称为一个(Carathéodory①)**外测度**：

(i) 对于任意$A\subset X$，$0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$；

(ii) $\mu(\varnothing)=0$；

(iii) 如果$A\subset B\subset X$，那么$\mu(A)\leqslant\mu(B)$；

(iv) 设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是X的任意一个子集序列，则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

外测度本身用处并不大，就积分论来说，远为重要的是测度，接下去就要定义它.

(10.3) **定义** 设X是一个集，$\mathscr{A}$是X的一些子集所成的代数，μ是只在$\mathscr{A}$上有定义的集函数. 如果下列三个关系式成立，μ就称为**一个有限加性测度**：

(i) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，$0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$；

(ii) $\mu(\varnothing)=0$；

(iii) 如果A，$B\in\mathscr{A}$，且$A\cap B=\varnothing$，那么

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B).\ ②$$

假如一个有限加性测度μ又满足条件：

(iv) 设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是适合$A_n\in\mathscr{A}$及$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$的任意一个两两不相交序列，则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

μ就称为**一个可数加性测度**，或简称**测度**，如果$\mathscr{A}$是X的一些子集

①C.Carathéodory(1873—1950)，外测度的创立者，杰出的德国数学家(祖籍希腊). 他为现代分析作出了许多重大贡献.

②就本课程而言，这种有限加性测度仅是次要的. 为了完整起见，同时着眼于§20的某些应用，本书才包罗了其定义.

所成的σ代数，μ是$\mathscr{A}$上的（可数加性）测度，那么称三元组$(X,\mathscr{A},\mu)$是**测度空间**．设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间．如果$\mu(X)<\infty$，那么称$(X,\mathscr{A},\mu)$是**有限测度空间**，而称μ是**有限测度**．如果X是$\mathscr{A}$中具有有限测度的集所成的可数族之并，那么称$(X,\mathscr{A},\mu)$和μ都是**σ有限的**．如果$\mu=0$，或μ仅取0和∞两个值，那么称$(X,\mathscr{A},\mu)$和μ都是**退化的**．

要是适当限制一下其上定义了外测度的子集族，外测度就为获得测度提供了一种简便方法．在着手研究这一构造细节以前，我们先看几个例子．

(10.4) **例** (a) 设X是任意一个集．对于$A\subset X$，命

$$\nu(A)=\begin{cases}\overline{\overline{A}}, & \text{当}A\text{是有限的},\\ \infty, & \text{当}A\text{是无限的}.\end{cases}$$

那么ν是$\mathscr{P}(X)$上的一个测度，也是$\mathscr{P}(X)$上的一个外测度．〔不难看出，$\mathscr{P}(X)$上的测度也是外测度．〕测度ν通常称为**计数测度**．

(b) 设X是任意一个集．对于$A\subset X$，命

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & \text{当}A=\varnothing,\\ \infty, & \text{当}A\neq\varnothing.\end{cases}$$

那么μ是$\mathscr{P}(X)$上的一个（显然是退化的）测度，也是$\mathscr{P}(X)$上的一个外测度．

(c) 对于任意集X，恒为零的集函数是$\mathscr{P}(X)$上的一个退化测度．

(d) 就目前来说，最重要的外测度是集函数ι，即§9中对局部紧Hausdorff空间的子集全体所构造的那种集函数．至于ι确是外测度的证明，请参看定理(9.21)．不过，读者应当知道，分析中所用到的全部测度，并非都能从集函数ι导出．

我们现在开始构造测度．

(10.5) **定义**（Carathéodory） 设X是一个集（没有拓扑），μ是$\mathscr{P}(X)$上的外测度，A是X的子集．如果对于任意$T\subset X$，都成

立

$$\mu(T)=\mu(T\cap A)+\mu(T\cap A'),$$

就说A是μ **可测的**. 命$\mathscr{M}_\mu$表示X的 μ可测子集全体所成的族，$\mathscr{N}_\mu$表示满足$\mu(A)=0$的X的子集A全体所成的族.

(10.6) **评注** (a) 鉴于(10.2.iv)及(10.2.ii)，那么只要对于任意$T\subset X$，都成立$\mu(T)\geqslant\mu(T\cap A)+\mu(T\cap A')$，则$X$的子集$A$就是$\mu$可测的.

(b) 定义(10.5)的样子有点不大自然. 根据这个定义，从X中区分出一些子集A：这种子集A将X的任意子集T分成两部分，而在这两部分上μ可以相加，由于这个定义没有一丝一毫的直观性，Carathéodory本人究竟是怎样想到它的，似乎是不可思议的. Carathéodory定义有许多具有启发性的蕴涵，它提供了一个σ代数（尽管不一定是可能存在的最大σ代数），在其上μ是可数加性测度.〔我们在(10.40)要指出，在哪些条件下，$\mathscr{M}_\mu$成为最大的σ代数，并且μ在它上面是可数加性的.〕

(c) 如果X是一个局部紧Hausdorff空间，ι是如§9所定义的外测度，那么ι可测集所成的集族$\mathscr{M}_\iota$就包含一切开集. 这一事实曾于(9.32)证明过，我们将看到，它有一些重要推论.

(d) 设λ是R上的Lebesgue外测度. λ可测集族$\mathscr{M}_\lambda$一般叫做**Lebesgue可测集**族. 方便时我们就使用这一术语.

我们着手详述μ可测集的性质. 以下(10.7)—(10.11)，始终假定X是一个任意集，μ是$\mathscr{P}(X)$上的一个任意外测度.

(10.7) **定理** 设A是X的子集，如果$\mu(A)=0$，则A必是μ可测的，并且对于任意$T\subset X$，成立$\mu(T)=\mu(T\cap A')$.

证 设T是X的任意一个子集. 由于$T\cap A\subset A$，便有$\mu(T\cap A)=0$. 又有$\mu(T)\leqslant\mu(T\cap A)+\mu(T\cap A')=\mu(T\cap A')\leqslant\mu(T)$. 由此可见，$\mu(T)=\mu(T\cap A)+\mu(T\cap A')=\mu(T\cap A')$：而前一个等式则表明$A$是$\mu$可测的. □

(10.8) **定理** 如果A是μ可测的，则A'也是μ可测的.

证 显然.

(10.9) **定理** 设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是一个两两不相交的X的μ可测子集序列. 则对于任意$T\subset X$, 都成立

(i) $$\mu(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(T\cap A_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right).$$

证 根据次可数加性, 得到$\mu(T)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(T\cap A_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right)$. 由此, 当$\mu(T)=\infty$时, 便直接推出(i). 因此不妨假设$\mu(T)<\infty$. 先证对于任意$p\in N$, 都成立

$$\mu(T)=\sum_{n=1}^{p}\mu(T\cap A_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p}A_n\right)'\right). \qquad (1)$$

我们施归纳于p以证明(1)式成立. 当$p=1$时, (1)式成为$\mu(T)=\mu(T\cap A_1)+\mu(T\cap A_1')$. A_1既是μ可测的, 这一等式对于任意$T\subset X$都是成立的. 假设对于正整数p及X的任意子集T, (1)式成立. 既然A_{p+1}是μ可测的, 便得到

$$\begin{aligned}\mu(T)&=\mu(T\cap A_{p+1})+\mu(T\cap A_{p+1}')\\&=\mu(T\cap A_{p+1})+\sum_{n=1}^{p}\mu(T\cap A'_{p+1}\cap A_n)\\&\quad+\mu\left(T\cap A'_{p+1}\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p}A_n\right)'\right).\end{aligned} \qquad (2)$$

(这里把归纳假设应用于集$T\cap A_{p+1}'$.)因为当$n\neq p+1$时有$A_n\subset A_{p+1}'$, 所以(2)式可写成

$$\begin{aligned}\mu(T)=\mu(T\cap A_{p+1})&+\sum_{n=1}^{p}\mu(T\cap A_n)\\&+\mu\left(T\cap A'_{p+1}\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p}A_n\right)'\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=1}^{p+1}\mu(T\cap A_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p+1}A_n\right)'\right).$$

这正说明对于$p+1$，（1）式也成立.

数列$\left(\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p}A_n\right)'\right)\right)_{p=1}^{\infty}$是一个非增序列，并且数值$\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right)$就是它的一个下界. 于是它存在极限，而且这个极限大于或等于$\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right)$ 等式（1）两边取极限，便得到

$$\mu(T)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}\mu(T\cap A_n)+\lim_{p\to\infty}\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p}A_n\right)'\right)$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(T\cap A_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right).$$

既然已证实了反向不等式，便完成了证明. □

(10.10) **定理** 如果A和B都是μ可测的，则$A\cap B'$也是μ可测的.

证 只须证明：如果$E\subset A\cap B'$，$F\subset(A\cap B')'$，那么$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$. 因为$F=(F\cap B)\cup(F\cap B')$，$B$又是$\mu$可测的，所以得到

$$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E)+\mu((F\cap B)\cup(F\cap B'))$$
$$=\mu(E)+\mu(F\cap B)+\mu(F\cap B').$$

其次，因为$E\subset A$，$F\cap B'\subset A'$，A又是μ可测的，所以得到

$$\mu(E)+\mu(F\cap B')+\mu(F\cap B)=\mu(E\cup(F\cap B'))+\mu(F\cap B).$$

又$E\cup(F\cap B')\subset B'$，$F\cap B\subset B$，因此

$$\mu(E\cup(F\cap B'))+\mu(F\cap B)=\mu(E\cup(F\cap B')\cup(F\cap B))$$
$$=\mu(E\cup F).$$

联合这些等式，便得出$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)$. □①

(10.11) 定理 μ可测集族$\mathscr{M}_\mu$乃是X的子集所成的一个σ代数，并且μ是σ代数$\mathscr{M}_\mu$上的一个可数加性测度.

证 设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是X的μ可测子集序列，那么$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=A_1\cup(A_2\cap A_1')\cup(A_3\cap A_2'\cap A_1')\cup\cdots\cup(A_n\cap A_{n-1}'\cap\cdots\cap A_1')\cup\cdots$. 根据(10.10)，可知每个形如$B_n=(A_n\cap A_{n-1}'\cap\cdots\cap A_1')$的集是$\mu$可测的. 此外，所有集$B_n$还是两两不相交的.

设$T\subset X$. 根据(10.9.i)以及次可数加性，得到

$$\mu(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(T\cap B_n)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)'\right)$$

$$\geqslant\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)'\right).$$

再由次可数加性，又得到

$$\mu(T)\leqslant\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)'\right),$$

从而

$$\mu(T)=\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)+\mu\left(T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)'\right)$$

---

①不难证明以下结果：C是μ可测的充要条件是对于任意$E\subset C$和任意$F\subset C'$，都成立

$$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F). \qquad (*)$$

证 设C是μ可测的. 对于$T=E\cup F$，因为$T\cap C=E$，$T\cap C'=F$，所以

$$\mu(E\cup F)=\mu(T)=\mu(T\cap C)+\mu(T\cap C')$$
$$=\mu(E)+\mu(F).$$

反之，设(*)式成立. 对于任意$T\subset X$，命$E=T\cap C$，$F=T\cap C'$. 由于$E\cup F=T\cap(C\cup C')=T$，由(*)式便得到

$$\mu(T)=\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$$
$$=\mu(T\cap C)+\mu(T\cap C'). \quad □$$

——译者注

这表明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$是$\mu$可测的. 所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$是$\mu$可测的. 由这一事实及(10.8),可知$\mu$可测集族是$\sigma$代数(1.13).

在(10.9.i)中取 $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 便得到

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cap B_n\right)$$

$$+ \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)'\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \mu(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

这样一来,在X的μ可测子集全体所成的σ代数上,μ便是可数加性的. □

既然(10.11)证实了非平凡测度空间是存在的,我们就暂且离开主题,顺便证明有关任意测度空间的某些有用的结果.

(10.12) **定理** 设(X, $\mathscr{A}$, μ)是一个测度空间,如果$A, B \in \mathscr{A}$, $A \subset B$, 则$\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

证 根据(10.3.iii)得到

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A'),$$

而根据(10.3.i), $\mu(B \cap A') \geqslant 0$. □

(10.13) **定理** 设(X, $\mathscr{A}$, μ)是一个测度空间.又设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中的集序列,而且$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$. 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

证 记$A_0 = \varnothing$. 那么显然有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A'_{n-1})$. 根据(10.3.iv),即根据可数加性,便得出

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap A'_{n-1})$$
$$=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}\mu(A_n\cap A'_{n-1})$$
$$=\lim_{p\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p}(A_n\cap A'_{n-1})\right)$$
$$=\lim_{p\to\infty}\mu(A_p). \qquad \square$$

(10.14) 评注 要想就可测集的交，证明全然类似于定理(10.13)的结果，那是办不到的. 为了明白这一点，比如设$X=R$，$\mu=\lambda$，$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$（即Lebesgue可测集）.并设$A_n=[n,\infty[$.那么$\lambda(A_n)=\infty$（$n=1,2,3,\cdots$），因此$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\infty$. 但左边却有$\lambda(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\lambda(\varnothing)=0$. 不过，我们确能获得以下结果.

(10.15) 定理 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间.如果$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中的集序列，而且$\mu(A_1)<\infty$，$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

特别说来，如果$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$.

证 因为序列$(A_1\cap A'_n)_{n=1}^{\infty}$是非减的，所有$A_1\cap A'_n$又都在$\mathscr{A}$中，于是应用(10.13)，得到

$$\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\mu(A_1)-\mu(A_n))=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\cap A_n')$$
$$=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\cap A_n')\right)=\mu\left(A_1\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n'\right)\right)$$
$$=\mu\left(A_1\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)'\right)=\mu(A_1)-\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

两边减去$\mu(A_1)$〔既然$\mu(A_1)<\infty$，便允许作减法〕，就得出

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right). \quad \square$$

(10.16) **定理** 设$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中任意一个集序列．则

(i) $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)\right)\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

而且，只要$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)<\infty$，就有

(ii) $$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\right)\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

证：显而易见$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n\subset\cdots\subset\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\subset\cdots$．由定理(10.13)知道$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)$ 而且对于任意k，都有$\mu(A_k)\geqslant\mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)$．这就蕴涵$\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\mu(A_k)$，从以上结果就推出(i)．同样可证不等式(ii)．$\square$

(10.17) **推论** 题设同(10.16)．又假定$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)=B$，$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)<\infty$．则$\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)$存在且等于$\mu(B)$．

证 由不等式

$$\varlimsup_{k\to\infty}\mu(A_k)\leqslant\mu(B)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\mu(A_k)$$

就证实了断言．$\square$

（10.18） **注意** 在(10.3)中，想必读者已注意到，可数加性测度是定义在代数$\mathscr{A}$上的，而$\mathscr{A}$无需是σ代数．这固然是表达上的细节，但有时却大有用处．确有一个方法，将可数加性测度开拓到含有$\mathscr{A}$的一个σ代数上去．不过，就本书对测度论所做的阐述来说，这并非基本问题，因之将其归入习题（10.36）．但必须指出，**测度空间**这一术语却是专用于三元组（X，$\mathscr{A}$，μ）的，其中$\mathscr{A}$乃是σ-代数，而μ是$\mathscr{A}$上的可数加性测度．

现在我们回到局部紧Hausdorff空间和§9所定义的外测度ι．

（10.19） **定义** 对于一个任意集X和X的一个任意子集族$\mathscr{E}$，命$\mathscr{S}(\mathscr{E})$表示X的子集所成的包含$\mathscr{E}$的σ代数全体之交．很明显，$\mathscr{S}(\mathscr{E})$乃是一个σ代数．这样一来，$\mathscr{S}(\mathscr{E})$就是X的子集所成的包含$\mathscr{E}$的最小σ代数．如果X是一个拓扑空间，设$\mathscr{B}(X)$是X的子集所成的包含每个开集的最小σ代数，这就是说，$\mathscr{B}(X)=\mathscr{S}(\mathscr{O})$，其中$\mathscr{O}$是开集全体所成的集族．$\mathscr{B}(X)$的元叫做$X$的**Borel集**．

（10.20） **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι如(9.19)所设．则$\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{M}_\iota$，也就是说，凡Borel集都是$\iota$可测的，且（$X$，$\mathscr{M}_\iota$，$\iota$）是一个测度空间．

证 定理（9.32）正是说明X的一切开子集都是ι可测的〔虽然（9.32）并未使用这个说法〕．这样，$\mathscr{M}_\iota$便含有X的开子集全体所成的集族$\mathscr{O}$，从而根据（10.11），得到

$$\mathscr{M}_\iota\supset\mathscr{S}(\mathscr{O})=\mathscr{B}(X). \quad \square$$

（10.21） **评注** (a) 根据X和ι的种种选择，确实存在不是Borel集的ι可测集．比如说，设$X=R$，$\iota=\lambda$，并设P是Cantor三分点集．既然$\lambda(P)=0$（9.35），那么对于任意$A\subset P$，便有$\lambda(A)=0$，从而P的所有子集都是λ可测的．这样一来，$\mathscr{P}(P)\subset\mathscr{M}_\lambda\subset\mathscr{P}(R)$．既然$\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{R}}=\mathfrak{c}$，便得到$2^{\mathfrak{c}}=\overline{\overline{\mathscr{P}(P)}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{M}_\lambda}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{P}(R)}}=2^{\mathfrak{c}}$，因之$\overline{\overline{\mathscr{M}_\lambda}}=2^{\mathfrak{c}}$．$R$刚好有$\mathfrak{c}$个开子集．这可由这样一个事实推出，即$R$的每个开子集是具有**理**端点的开区间之并．因而由下面的定理

可推知$\overline{\overline{\mathscr{B}(R)}}=\mathfrak{c}$. 这一概略的基数论证表明，存在$2^{\mathfrak{c}}$个不是Borel集的$\lambda$可测集，但并没有提供构造这种集的方法.

(b) 其实，可以构造很大的一类λ可测集，即所谓的**解析**集，它不仅含有全体Borel集，而且也含有$\mathfrak{c}$个其他集. 感兴趣的读者请参阅S.Saks①及W.Sierpiński②中关于解析集的讨论.

(10.22) **习题** (a) X, a, E_a及ε_a如(9.19)所设. 试证$\mathscr{M}_{\varepsilon_a}=\mathscr{P}(X)$.

(b) 设X是一个局部紧Hausdorff空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X的一个可数(可能是有限的)子集，$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$是一个正数列，且$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$. 又对于任意$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，命$I(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi(x_n)$. 试证：$I$是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的一个非负线性泛函；相应的测度$\iota$为$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varepsilon_{x_n}$；$\mathscr{M}_\iota=\mathscr{P}(X)$.

(c) 把(b)推广到$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$的情况. 试求出要使$I$对于任意$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(X)$成为有限的，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$尚需附加的充要条件，并在$X$是$\sigma$紧的前提下，就新的$I$和$\iota$，证明(b)小题的后两个断言.

以下定理的证明提供了一种方法——怎样“构造”由已知集族生成的σ代数.

(10.23) **定理**③ 设X是一个集，$\mathscr{E}$是X的一个子集族，且$\varnothing\in\mathscr{E}$，并设$\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathscr{E})$是$X$的子集所成的包含$\mathscr{E}$的最小$\sigma$代数. 如果

---

①S.Saks, *Theory of the Integral*, 第二版, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1937, 第三章.

②W.Sierpiński, General Topology, 第二版, Univ.of Toronto Press, Toronto, 1956, 第七章.

③后文并不需要此定理〔以及(10.24), (10.25)〕, 感到时间紧的读者可略去.

$\overline{\overline{\mathscr{E}}}=\mathfrak{c}$，且 $\mathfrak{c}\geqslant 2$，则 $\overline{\overline{\mathscr{S}}}\leqslant \mathfrak{c}^{\,\mathrm{ard}N}$.

证 对于X的每个非空子集族$\mathscr{F}$，设$\mathscr{F}^*$为形如$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$的集全体所成的集族，这里对于每个$n\in N$，不是$A_n$为$\mathscr{F}$的元素，便是$A_n'$为$\mathscr{F}$的元素. 又设$\Omega$表示最小不可数序数（4.49）. 我们利用超限归纳法，对于每个序数$\alpha<\Omega$，来规定一个族$\mathscr{E}_\alpha$. 规定$\mathscr{E}_0$为族$\mathscr{E}$. 假定$0<\alpha<\Omega$，并假定对于适合$0\leqslant\beta<\alpha$的每个β已规定好了$\mathscr{E}_\beta$. $\mathscr{E}_\alpha$规定为$\left(\bigcup_{0<\beta<\alpha}\mathscr{E}_\beta\right)^*$，并把族$\bigcup_{0<\alpha<\Omega}\mathscr{E}_\alpha$写成$\mathscr{A}$. 我们断言：$\mathscr{A}=\mathscr{S}$.

显而易见，$\mathscr{E}_0=\mathscr{E}\subset\mathscr{S}$. 假定对于任意$\beta<\alpha$，都有$\mathscr{E}_\beta\subset\mathscr{S}$，并设$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{E}_\alpha$. 对于每个$n\in N$，不是$A_n$便是$A_n'$为$\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{E}_\beta\subset\mathscr{S}$的元素，因此$A_n, A_n'\in\mathscr{S}$. 这样，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$便在$\mathscr{S}$中；也就是说，$\mathscr{E}_\alpha$含在$\mathscr{S}$中. 既然$\mathscr{A}=\bigcup_{0\leqslant\alpha<\Omega}\mathscr{E}_\alpha$，这就证明了$\mathscr{A}\subset\mathscr{S}$. 而$\mathscr{E}\subset\mathscr{A}$则为显然的事实，所以为了完成证明，只要证$\mathscr{A}$是一个$\sigma$代数就可以了。既然$\varnothing\in\mathscr{E}_0$，便得到

$$X=(\varnothing'\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)\in\mathscr{E}_1\subset\mathscr{A}.$$

现在命$A\in\mathscr{A}$. 必存在$\alpha<\Omega$，使$A\in\mathscr{E}_\alpha$；所以对于任意$\beta>\alpha$，都有$A'=(A'\cup A'\cup\cdots)\in\mathscr{E}_\alpha^*\subset\mathscr{E}_\beta$，因而$A'\in\mathscr{A}$. 其次命$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是一列$\mathscr{A}$的元素. 对于每个$n\in N$，有$\alpha_n<\Omega$，满足$A_n\in\mathscr{E}_{\alpha_n}$. 应用（4.49.iv），可找到$\beta<\Omega$，使对于每个$n\in N$，有$\alpha_n<\beta$. 于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_{\alpha_n}\right)^*\subset\mathscr{E}_\beta\subset\mathscr{A}.$$

因此$\mathscr{A}$是一个σ代数，从而断言$\mathscr{A}=\mathscr{S}$成立.

根据题设，得到$\overline{\overline{\mathscr{E}}}_0=\mathfrak{e}\geqslant 2$．就可以产生集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{E}_1$的方法（对于每个$A_n$，至多有2 e个方法可供选择）而论，我们看出$\overline{\overline{\mathscr{E}}}_1\leqslant(2\mathfrak{e})^{\text{card}N}=\mathfrak{e}^{\text{card}N}$〔(4.32)，(4.34)，(4.24.vii)及(4.24.xi)〕。现在假定对于适合$1\leqslant\beta<\alpha$的任意β（这里$1<\alpha<\Omega$），都有$\overline{\overline{\mathscr{E}}}_\beta\leqslant\mathfrak{e}^{\text{card}N}$．那么$\overline{\overline{\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{E}_\beta}}\leqslant\mathfrak{e}^{\text{card}N}\text{card}N=\mathfrak{e}^{\text{card}N}$(4.32)，从而正如上述论证，$\overline{\overline{\mathscr{E}}}_\alpha\leqslant(\mathfrak{e}^{\text{card}N})^{\text{card}N}=\mathfrak{e}^{\text{card}N}$〔(4.24.viii)及(4.31)〕．根据超限归纳法，可以推断：对于适合$0\leqslant\alpha<\Omega$的任意α，都有$\overline{\overline{\mathscr{E}}}_\alpha\leqslant\mathfrak{e}^{\text{card}N}$．因而

$$\overline{\overline{\mathscr{S}}}=\overline{\overline{\mathscr{A}}}=\overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\Omega}\mathscr{E}_\alpha}}\leqslant\mathfrak{e}^{\text{card}N}\omega_1=\mathfrak{e}^{\text{card}N}$$

〔(4.50)及(4.32)〕．□

(10.24) **习题** 记号如(10.19)．

(a) 如果$\mathscr{E}=\{\varnothing\}$，试求$\mathscr{S}(\mathscr{E})$．

(b) 如果$\mathscr{E}=\{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$，其中$U_j$是非空两两不相交的，且$U_1\cup U_2\cup\cdots U_m=X$，试求$\mathscr{S}(\mathscr{E})$．$\overline{\overline{\mathscr{S}(\mathscr{E})}}$等于什么？

(c) 如果$\mathscr{E}$是X的子集所成的一个任意的有限集族，试求$\mathscr{S}(\mathscr{E})$．$\overline{\overline{\mathscr{S}(\mathscr{E})}}$等于什么？

(d) 如果$\mathscr{E}$是X的有限子集全体所成的集族(X可以是有限的，也可以是无限的)，试求$\mathscr{S}(\mathscr{E})$．$\overline{\overline{\mathscr{S}(\mathscr{E})}}$等于什么？

(10.25) **推论** 如果X是一个拓扑空间，并具有其拓扑的一个可数基$\mathscr{C}$，则$\overline{\overline{\mathscr{B}(X)}}\leqslant\mathfrak{c}$．

证 基定义(6.10)表明，X的每个开子集都在族$\mathscr{C}_1$中〔这里借用了(10.23)的记号，但作了变形，这很明白〕．这说明$\mathscr{S}(\mathscr{C})=\mathscr{B}(X)$；应用(10.23)和(4.34)，得

$$\overline{\overline{\mathscr{B}(X)}}\leqslant(\text{card}N)^{\text{card}N}=\mathfrak{c}．\square$$

就已知的外测度μ来说，要寻求非μ可测集，这个问题是极其错综复杂的，甚至就§9所构造的外测度来说，也还不知道一般性

结果或解决问题的一般方法. 不过，对$\mathscr{P}(R)$上的Lebesgue外测度λ而言，找出非λ可测集还是比较简单的. 我们先证明有关λ的一个简单事实.

(10.26) 定义 对于R的两个子集A和B，命$A+B=\{x+y:x\in A, y\in B\}$，$A-B=\{x-y:x\in A, y\in B\}$，$-A=\{-x:x\in A\}$. 设$x\in R$，则把集$\{x\}+A$写成$x+A$，并称之为**由$x$产生的$A$的平移**. 可类似定义集$AB$，$A^{-1}$（当$0\notin A$时），$AB^{-1}$及$xA$.

(10.27) 引理 对于任意$x\in R$及任意$A\subset R$，成立等式$\lambda(x+A)=\lambda(A)=\lambda(-A)$.

证 根据(9.24)及(9.23)，得到

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(U):U\text{是}R\text{中的开集}, A\subset U\}$$

$$=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n):A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[\right\}.$$

由于下列三个包含关系

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[,$$

$$x+A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n+x,b_n+x[, \quad (1)$$

$$-A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}]-b_n,-a_n[$$

彼此等价，而且(1)中的三个区间并也都具有同一Lebesgue测度，这就证明了引理. □

(10.28) 定理 设T是R的一个λ可测子集，且$\lambda(T)>0$. 则T必含有一个不是λ可测的子集E. 事实上，可以选取E，使其具有以下性质. 若$\mathscr{A}$是R的子集所成的一个σ代数，它满足：只要$A\in\mathscr{A}$，$x\in R$，就有$\mathscr{M}_{\lambda}\subset\mathscr{A}$，$x+A\in\mathscr{A}$（例如$\mathscr{A}=\mathscr{M}_{\lambda}$），又若$\mu$是$\mathscr{A}$上的一个可数加性测度，它满足：对于任意$A\in\mathscr{M}_{\lambda}$，有$\mu(A)=\lambda(A)$，而对于任意$A\in\mathscr{A}$及任意$x\in R$，有$\mu(x+A)=\mu(A)$，则

$E \notin \mathscr{A}$.

证 由于$T=\bigcup_{n=1}^{\infty}(T\cap[-n, n])$，因此(9.21, iv)表明

$$0<\lambda(T)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(T\cap[-n,n]).$$

所以存在$p\in N$，使

$$0<\lambda(T\cap[-p, p])\leqslant\lambda([-p,p])=2p<\infty.$$

不妨假设$0<\lambda(T)<\infty$，且$T\subset[-p, p]$. 既然可数集具有λ测度0（9.34），那么必有

$$\overline{\overline{T}}>\mathrm{card}N.①$$

现在设D是T的任意一个可数无限子集（4.15），H是含有D的R的最小加法子群. 这就是说，H由有限和$\sum_{k=1}^{m}n_k d_k$全体组成，其中n_k都是整数，d_k都在D中，由此H可数是很清楚的.

试考虑陪集$\{t+H: t\in R\}$. H既为R的子群，这些陪集便是两两不相交的；就是说，对于任意t_1和t_2，陪集t_1+H和t_2+H是不相交的或者是相同的. 设在R中选取$\{t_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$，使集$t_\gamma+H$; $\gamma\in\Gamma$②为H的不相交的陪集全体，就是说，若$\gamma_1\neq\gamma_2$，则$(t_{\gamma_1}+H)\cap(t_{\gamma_2}+H)=\varnothing$，而且对于每个$t\in R$，有$\gamma\in\Gamma$，满足$t+H=t_\gamma+H$. 命$\Gamma_0=\{\gamma\in\Gamma: (t_\gamma+H)\cap T\neq\varnothing\}$. 对于每个$\gamma\in\Gamma_0$，只选一个元素$x_\gamma\in(t_\gamma+H)\cap T$. 然后命$E=\{x_\gamma: \gamma\in\Gamma_0\}$. 〔因为$T$含在$\bigcup\{t_\gamma+H: \gamma\in\Gamma_0\}$中，且$\overline{\overline{t_\gamma+H}}=\mathrm{card}N$，所以必定有$\overline{\overline{\Gamma}}_0=\overline{\overline{T}}>\mathrm{card}N_0$.〕在求$E$时，我们曾两度作了不可数次任意选择，为此必须援引选择公里才行③

①根据下文（10.30），T含有一个具有正λ测度的紧集F. 而根据（9.34），F应是不可数的。因此（6.65）及（6.66）蕴涵$\overline{\overline{F}}=\mathfrak{c}$. 由此$\overline{\overline{T}}=\mathfrak{c}$.

②原文如此，似为集$\{t_\gamma+H: \gamma\in\Gamma\}$之误. ——译者注

③利用选择公理，业已构造出非λ可测集的种种例子. R.Solovay新近的报告〔Notices Amer.Math.Soc.12, 217（1965）〕指出：不借助选择公里，是不可能得到非λ可测集的.

为了证实E具有所说的病态性质，规定集J为$H\cap(T-T)$. 由于$D-D\subset J\subset H$，显然$\overline{\overline{J}}=\mathrm{card}N$。我们断言：对于不同的$y_1, y_2 \in J$，$(y_1+E)\cap(y_2+E)=\varnothing$. 设若不然，便有不同的$x_1$，$x_2\in E$，使$y_1+x_1=y_2+x_2$. 由于$y_1$，$y_2\in H$，这就蕴涵

$$x_2=x_1+(y_1-y_2)\in x_1+H,$$

与E的定义相矛盾，因为x_1，x_2属于H的不同的陪集. 所以族$\{y+E: y\in J\}$是两两不相交的. 现在假定E在σ代数$\mathscr{A}$中. 当$\mu(E)=0$时，由关于μ所作的假设可推出

$$\mu(J+E)=\mu\left(\bigcup_{y\in J}(y+E)\right)=\sum_{y\in J}\mu(y+E)$$

$$=\sum_{y\in J}\mu(E)=0. \qquad (1)$$

当$\mu(E)>0$时，类似地可推出

$$\mu(J+E)=\infty. \qquad (2)$$

(1)和(2)都是不可能成立的. 为了看出这一点，先证

$$T\subset J+E. \qquad (3)$$

其实，如果$v\in T$，那么对于某个$\gamma\in\Gamma_0$，$v\in t_\gamma+H=x_\gamma+H$，从而对于某个$h\in H$，$v=x_\gamma+h$. 这样一来，

$$h=v-x_\gamma\in(T-T)\cap H=J,$$

这就证明了(3)式. 倘若(1)式成立，那么由(3)式可推知

$$\mu(T)\leqslant\mu(J+E)=0.$$

既然$\lambda(T)$为正，而$\mu(T)=\lambda(T)$，这就引出了矛盾，因此(1)式不可能成立.

另外，显然有

$$J+E=(H\cap(T-T))+E\subset(T-T)+T$$
$$\subset[-3p, 3p],$$

因之

$$\mu(J+E)\leqslant\mu([-3p, 3p])=\lambda([-3p, 3p])=6p<\infty.$$

这样(2)式也是不可能成立的. 所以说，我们必须拒绝$E\in\mathscr{A}$的假

设才行. □

(10.29) **评注** (a) $\mathscr{P}(R)$上存在一个有限加性测度μ,它合于条件:(i) 对于任意$A\in\mathscr{M}_\lambda$,成立$\mu(A)=\lambda(A)$;(ii)对于任意$x\in R$及任意$A\subset R$, 成立$\mu(x+A)=\mu(A)$. 这一结果首先为S.Banach所证明①. 下文(20.40)概述了其证明步骤. Banach结果的一个影响深远的推广载于*Hewitt*等②, 感兴趣的读者可参阅此书.

(b) 业已得到Lebesgue测度到R的子集所成的一些很大的σ代数$\mathscr{M}$上的可数加性开拓μ,这些μ并保有性质$\mu(x+A)=\mu(A)$. 人们可以使$2^{\mathfrak{c}}$个新集成为μ可测的, 而且事实上存在一个族$\mathscr{D}\subset\mathscr{M}$, 它满足: $\overline{\overline{\mathscr{D}}}=2^{\mathfrak{c}}$, 且对于不同的$D_1$, $D_2\in\mathscr{D}$,有$\mu(D_1\triangle D_2)=1$.此类开拓隐含在Kakutani和Oxtoby所提出的一个构造里③. 而Hewitt和Ross所作的一个构造中则明确给出了此类开拓④.

(c) 关于某个度量空间中(b)小题的表述,请参看后面(10.45)及(10.47).

现在再次回到局部紧Hausdorff空间上外测度ι, 证明有关ι可测集的一些很有用的结果.

(10.30) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间,ι如§9所设.又设A为X的一个ι可测子集,它满足:对于某个集序列$(B_n)_{n=1}^{\infty}$, 有$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, 这里对于任意$n$, $\iota(B_n)<\infty$. 则

$$\iota(A)=\sup\{\iota(F):F\text{是紧的}, F\subset A\}.$$

证 (Ⅰ)先假定$\iota(A)<\infty$. 设ε为任意正数. 根据(9.24), 存在一个开集V, 使$A\subset V$, 且$\iota(V)<\iota(A)+\frac{1}{4}\varepsilon$. 因为$\iota(V)=\iota(A)+\iota(V\cap A')$, 所以得到$\iota(V\cap A')<\frac{1}{4}\varepsilon$.利用(9.26),

---

① Fund. Math. 4. 7–33 (1923).

② E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, Springer-Verlag, Heidelberg 1963, 242–245.

③ Ann. *of* Math. (2)52, 580–590(1950).

④ Math. Annalen 160, 171–194(1965).

选V的一个紧子集E，使$\iota(V\cap E')<\frac{1}{2}\varepsilon$. 再利用(9.24)，取一个开集$W$，使$V\cap A'\subset W\subset V$，且$\iota(W)<\frac{1}{2}\varepsilon$. 集$F=E\cap W'$是紧的. 显然$F\subset A$，这是因为

$$E\cap W'\subset E\cap(V'\cup A)\subset V\cap(V'\cup A)=A.$$

我们有

$$\iota(A\cap F')=\iota(A\cap(E'\cup W))\leqslant\iota(A\cap E')+\iota(A\cap W)$$

$$\leqslant\iota(V\cap E')+\iota(W)<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

利用A的ι可测性，可知$\iota(F)=\iota(A)-\iota(A\cap F')>\iota(A)-\varepsilon$. 既然$\varepsilon$是任意的，可见$\iota(A)<\infty$时定理成立.

(Ⅱ) 假定$\iota(A)=\infty$. 鉴于(9.24)，不妨假定题设中的集B_n都是ι可测的（事实上还都是开集）. 记$A_n=A\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n)$，$n\in N$，并记$A_0=\varnothing$. 于是$A_n$是$\iota$可测的，$\iota(A_n)<\infty$，$A_n\subset A_{n+1}$及$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$. ①

根据(10.11)，$(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$为测度空间；从而由(10.13)推知

$$\infty=\iota(A)=\lim_{n\to\infty}\iota(A_n). \qquad (1)$$

利用(Ⅰ)，对于每个$n\in N$，取一个紧集F_n，使$F_n\subset A_n$，且$\iota(F_n)\geqslant\frac{1}{2}\iota(A_n)$. 由(1)式，显然可得到

$$\lim_{n\to\infty}\iota(F_n)=\lim_{n\to\infty}\iota(A_n)=\infty=\iota(A). \qquad \square$$

(10.31) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι如§9所设. 对于$A\subset X$，下列四个语句是等价的：

---

①如果一个集是有限测度集的可数族之并，则称这个集是σ有限的〔参见(10.3)〕. 我们还记得：如果一个集是可数个紧集之并，则称这个集是σ紧的.

(i) A是ι可测的；

(ii) 对于$\iota(U)<\infty$的一切开集U，都有

$$\iota(U)\geqslant\iota(U\cap A)+\iota(U\cap A')；$$

(iii) 对于$\iota(U)<\infty$的每个开集U，$A\cap U$是ι可测的；

(iv) 对于任意紧集F，$A\cap F$是ι可测的.

证 每个紧集F既然是闭集，定理(10.20)则表明F是ι可测的；从而(i)蕴涵(iv).

先假定(iv)成立，并设U是开集，且$\iota(U)<\infty$. 定理(10.30)表明，对于每个$n\in N$，有一个紧集$F_n\subset U$，使$\iota(F_n)>\iota(U)-\frac{1}{n}$. 命$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 则得到以下三个结论：(1)$F\subset U$；(2)$F$是$\iota$可测的；(3)对于每个$n\in N$，$\iota(F)\geqslant\iota(F_n)>\iota(U)-\frac{1}{n}$. 由此可见，$(F)=\iota(U)$，$\iota(U\cap F')=0$. 所以

$$A\cap U=A\cap[F\cup(U\cap F')]=(A\cap F)\cup(A\cap U\cap F')$$

$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap F_n)\right)\cup(A\cap U\cap F'),$$

由于$\iota(A\cap U\cap F')=0$，从而$A\cap U$便是ι可测集的可数并. 因此(iv)蕴涵(iii).

其次假定(iii)成立，并设U是具有有限ι测度的开集. 那么U和$A\cap U$都是ι可测集，从而$U\cap A'=U\cap(U\cap A')$也是ι可测的. 这样

$\iota(U)=\iota((U\cap A)\cup(U\cap A'))=\iota(U\cap A)+\iota(U\cap A')$，就是说，(iii)蕴涵(ii).

最后假定(ii)成立，并设T是X的一个任意子集. 在证实A符合定义(10.5)时，不妨假设$\iota(T)<\infty$，因为要不然就肯定有$\iota(T)=\infty\geqslant\iota(T\cap A)+\iota(T\cap A')$. 设给定$\varepsilon>0$，可取开集$U$，使$T\subset U$，且$\iota(U)<\iota(T)+\varepsilon$. 那么(ii)蕴涵

$$\iota(T)+\varepsilon>\iota(U)\geqslant\iota(U\cap A)+\iota(U\cap A')$$

$$\geqslant \iota(T\cap A)+\iota(T\cap A').$$

ε 既是任意的，便完成了证明. □

(10.32) **推论** 如果A是局部ι零集，则A是ι可测的，并且$\iota(A)=0$或$\iota(A)=\infty$.

证 对于每个紧集F，得到$\iota(F\cap A)=0$(9.29)，从而$F\cap A$是ι可测的(10.7). 由(10.31)可知A也是ι可测的. 假定$\iota(A)<\infty$，应用(10.30)，便得到

$$\iota(A)=\sup\{\iota(F):F\text{是紧的，}F\subset A\}=0. \quad \square$$

(10.33) **评注** 既然对于选定的某些X和ι，非ι零集的局部ι零集是有的〔参见(9.41.e)〕，那么(10.32)表明，一般说来不能把(10.30)加强成对于一切ι可测集为真. 不过，要是X为紧集的可数并的话(比如说$X=R^n$)，那么凡X的ι可测子集肯定都满足(10.30)的假设.

(10.34) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι如§9所设. 对于X的每个σ有限的、ι可测子集A，必存在X的两个子集B和C，它们合于以下四个条件：(1)B是σ紧的，(2)C是一个Borel集，(3)包含关系$B\subset A\subset C$成立，(4)$\iota(C\cap B')=0$.

证 (Ⅰ) 假设$\iota(A)<\infty$. 对于每个$n\in N$，有一个紧集$F_n\subset A$，使$\iota(F_n)>\iota(A)-\frac{1}{n}$. 命$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 对于每个$n$，有$\iota(F_n)\leqslant\iota(B)\leqslant\iota(A)$，从而$\iota(B)=\iota(A)$. 其次，对于每个$n\in N$，取一个开集$U_n\supset A$，使$\iota(U_n)<\iota(A)+\frac{1}{n}$. 命$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$：那么$C$是一个$G_\delta$集，因而自然是Borel集. 很清楚，$\iota(C)=\iota(A)$. 利用$A$的$\iota$可测性，得到$\iota(C\cap A')=\iota(C)-\iota(A)=0$，$\iota(A\cap B')=\iota(A)-\iota(B)=0$，从而又得到

$$\iota(C\cap B')=\iota(C\cap A')+\iota(A\cap B')=0.$$

(Ⅱ) 当$\iota(A)=\infty$时，正如(10.23)的证明，记$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，其中每个$A_n$是$\iota$可测的，并具有有限$\iota$测度. 由第一种情况，存在

σ紧集 B_n 和 G_δ 集 C_n，$n=1,2,3,\cdots$，满足 $B_n\subset A_n\subset C_n$，$\iota(C_n\cap B'_n)=0$．命 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$；$B$ 分明是σ紧的．则得到

$$A\cap B'=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)'$$

$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k'\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n'),$$

从而

$$\iota(A\cap B')\leqslant\iota\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n')\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\iota(A_n\cap B_n')=0.$$

现在命 $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$；$C$ 分明是一个Borel集．上面证明$\iota(A\cap B')=0$ 时所提供的论证，又可用来证实 $\iota(C\cap A')=0$，正如第一种情况，由此可知 $\iota(C\cap B')=0$． □

§9所论及的泛函$\overline{\overline{I}}$，对于一切f，$g\in\mathfrak{F}^+$，满足不等式

$$\overline{\overline{I}}(f+g)\leqslant\overline{\overline{I}}(f)+\overline{\overline{I}}(g)$$

(9.16.iv)①．可以举出一些泛函 I 及函数f，g，使得严格不等式成立〔参见(10.41)〕；这就是说，在$\mathfrak{F}^+$上$\overline{\overline{I}}$一般说来不是加性的．然而在一些特定函数类上，$\overline{\overline{I}}$却是加性的．我们现在就举出这样的一类函数．

(10.35) **定理** 设A和B是两个不相交的ι可测集，α和β是两个非负实数，则成立等式

(i) $\overline{\overline{I}}(\alpha\xi_A+\beta\xi_B)=\alpha\overline{\overline{I}}(\xi_A)+\beta\overline{\overline{I}}(\xi_B)$.

证 根据$\overline{\overline{I}}$的次加性，显然只要证明

$$\overline{\overline{I}}(\alpha\xi_A+\beta\xi_B)\geqslant\alpha\overline{\overline{I}}(\xi_A)+\beta\overline{\overline{I}}(\xi_B)\tag{1}$$

①原文为(9.18)．——译者注

就行了．在以下三种情况下，都不难验证不等式(1)都成立：(1) $\alpha=0$或$\beta=0$；(2) $\iota(A)=0$或$\iota(A)=\infty$；(3) $\iota(B)=0$或$\iota(B)=\infty$．这些验证留给读者，我们来证在$\alpha\beta>0$，$0<\iota(A)<\infty$，以及$0<\iota(B)<\infty$的前提下，(1)式成立．

（Ⅰ） 先假设A和B都是紧的．根据(6.80)，X上有一个连续实值函数φ，使$\varphi(A)=\{0\}$，$\varphi(B)=\{1\}$．集$\{x\in X:\varphi(x)<\frac{1}{3}\}$和$\{x\in X:\varphi(x)>\frac{2}{3}\}$是分别含有$A$和$B$的两个不相交的开集．既然$A$和$B$都具有有限$\iota$测度，因此都含在具有有限$\iota$测度的一些开集中．取这些开集与由$\varphi$定义的开集之交，就得到两个开集$U_0$和$V_0$，它们合于条件：$U_0\supset A$，$V_0\supset B$，$U_0\cap V_0=\varnothing$，$0<\iota(U_0)<\infty$及$0<\iota(V_0)<\infty$．则有

$$\overline{I}(\alpha\xi_A+\beta\xi_B)\leqslant\alpha\overline{I}(\xi_A)+\beta\overline{I}(\xi_B)=\alpha\iota(A)+\beta\iota(B)<\infty.$$

现在给定$\varepsilon>0$．存在一个函数$f\in\mathfrak{M}^+$，使$f\geqslant\alpha\xi_A+\beta\xi_B$，且

$$\overline{I}(f)-\frac{1}{3}\varepsilon<\overline{I}(\alpha\xi_A+\beta\xi_B).$$

取$\delta>0$，使

$$0<\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{3\iota(U_0)},\ \frac{\varepsilon}{3\iota(V_0)},\alpha,\beta\right\}.$$

对于任意$x\in A$，有$f(x)\geqslant\alpha$．根据f的下半连续性，必有一个开集U，适合$A\subset U\subset U_0$，并且对于任意$x\in U$，$f(x)>\alpha-\delta$．同样，必有一个开集V，适合$B\subset V\subset V_0$，并且对于任意$x\in V$，$f(x)>\beta-\delta$．于是得到

$$f\geqslant(\alpha-\delta)\xi_U-(\beta-\delta)\xi_V;$$

因而

$$\begin{aligned}\overline{I}(f)&\geqslant\overline{I}((\alpha-\delta)\xi_U+(\beta-\delta)\xi_V)\\&=(\alpha-\delta)\overline{I}(\xi_U)+(\beta-\delta)\overline{I}(\xi_V)\\&=(\alpha-\delta)\iota(U)+(\beta-\delta)\iota(V)\\&\geqslant\alpha\iota(A)+B\iota(B)-\delta(\iota(U)+\iota(V))\end{aligned}$$

$$\geqslant \alpha\iota(A)+\beta\iota(B)-\delta(\iota(U_0)+\iota(V_0))$$

$$>\alpha\iota(A)+\beta\iota(B)-\frac{2}{3}\varepsilon.$$

综上所述，我们已证明了

$$\alpha\overline{\overline{I}}(\xi_A)+\beta\ \overline{\overline{I}}(\xi_B)-\varepsilon<\overline{I}\ (f)-\frac{1}{3}\varepsilon<\overline{\overline{I}}(\alpha\xi_A+\beta\xi_B).$$

ε 既是任意的，可见如果 A 和 B 都是紧的，（1）式便成立.

（Ⅱ） 其次假设 A 和 B 是具有有限正测度的任意两个 ι 可测集. 给定 $\varepsilon>0$，利用（10.30），取两个紧集 E 和 F，满足 $E\subset A$，$F\subset B$，$\alpha\iota(E)>\alpha\iota(A)-\frac{1}{2}\varepsilon$，$\beta\iota(F)>\beta\iota(B)-\frac{1}{2}\varepsilon$. 对紧集 E，F 利用（Ⅰ），就得出

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{I}}\ (\alpha\xi_A+\beta\xi_B)\geqslant\overline{\overline{I}}(\alpha\xi_E+\beta\xi_F)\\&=\alpha\iota(E)+\beta\iota(F)>\alpha\iota(A)+\beta\iota(B)-\varepsilon\\&=\alpha\ \overline{\overline{I}}(\xi_A)+\beta\ \overline{\overline{I}}\ (\xi_B)-\varepsilon.\qquad\square\end{aligned}$$

在结束本节前，我们布置以下大批习题. 其中有几个练习〔例如(10.37)〕，实际上是为主要课题的一些后续定理所需要的，其余练习则是从多方面来阐明并开拓基本理论. 因此，我们希望抱认真学习态度的读者都要完成其大部分.

(10.36) **习题** 设 X 是一个任意集，$\mathscr{A}$ 是 X 的子集所成的一个代数（$\mathscr{A}$ 无需是一个 σ 代数）. 又设 μ 是（10.3）意义下 $\mathscr{A}$ 上的一个可数加性测度. 在 $\mathscr{P}(X)$ 上规定集函数 $\overline{\mu}$ 如下：对于 $T\subset X$，命

$$\overline{\mu}\ (T)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):T\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\text{且}A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{A}\right\}.$$

(a) 试证：$\overline{\mu}$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个外测度.

(b) 试证：在代数 $\mathscr{A}$ 上，$\overline{\mu}=\mu$.

(c) 试证：凡 $\mathscr{A}$ 的元素关于 $\overline{\mu}$ 都是可测的.

(d) 试证：μ 可以开拓成一个可数加性测度，后者定义在 X

的子集所成的含有$\mathscr{A}$的一个σ代数上.〔所确认的这一事实，称为**Hopf开拓定理**.〕

(10.37) **习题** X，$\mathscr{A}$如(10.36)所设. 设γ是$\mathscr{A}$上的一个集函数，并满足下列三个条件：

(i) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，$0\leqslant\gamma(A)\leqslant\infty$；

(ii) 如果$A,B\in\mathscr{A},A\cap B=\varnothing$,那么$\gamma(A\cup B)=\gamma(A)\dotplus\gamma(B)$;

(iii) 如果A_1，$A_2,\cdots\in\mathscr{A},A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，那么$\lim_{n\to\infty}\gamma(A_n)=0$.

规定$\bar{\gamma}$的方法和(10.36)完全一样. 试证明：就集函数γ和$\bar{\gamma}$来说，(10.36)的(a)，(b)，(c)，(d)都成立.(此为Hopf开拓定理的另一形式.)

(10.38) **习题** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间. 试证：μ必可开拓到σ代数$\bar{\mathscr{A}}$上，成为$\bar{\mathscr{A}}$上的一个测度$\bar{\mu}$，使得具有μ测度0的任意集的任意子集是$\bar{\mu}$可测的，并具有$\bar{\mu}$测度0.

在证明后文主要课题的两个重要定理〔(20.56)和(20.57)〕时，需要下面这个习题，因此我们颇为详细地作了提示.

(10.39) **习题** X，$\mathscr{A}$，μ及$\bar{\mu}$如(10.36)所设. 命$\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathscr{A})$是$X$的子集所成的含有代数$\mathscr{A}$的最小$\sigma$代数.假定$(X,\mathscr{S},\nu)$是一个测度空间，且适合条件：对于任意$A\in\mathscr{A}$，$\nu(A)=\mu(A)$. 试证下列命题：

(a) 如果$B\in\mathscr{S}$，则$\bar{\mu}(B)\geqslant\nu(B)$.〔提示命$\mathscr{A}_\sigma$表示$\mathscr{A}$中集的可数并全体所成的族. 如果$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}_\sigma$,其中$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$，那么$A=A_1\cup\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n\cap A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A'_{n-1})$就是$\mathscr{A}$中不相交的集之并，从而$\nu(A)=\bar{\mu}(A)$；于是

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(B)&=\inf\{\bar{\mu}(A):B\subset A\in\mathscr{A}_\sigma\}\\&=\inf\{\nu(A):B\subset A\in\mathscr{A}_\sigma\}\geqslant\nu(B).\end{aligned}$$〕

(b) 如果$F\in\mathscr{S}$，$\bar{\mu}(F)<\infty$，则$\nu(F)=\bar{\mu}(F)$.〔提示．给定$\varepsilon>0$，取$A\in\mathscr{A}_\sigma$，使$F\subset A$，$\bar{\mu}(A)<\bar{\mu}(F)+\varepsilon$．然后利用(a)来证明：

$$\bar{\mu}(F)\leqslant\bar{\mu}(A)=\nu(A)=\nu(F)+\nu(A\cap F')$$
$$\leqslant\nu(F)+\bar{\mu}(A\cap F')<\nu(F)+\varepsilon.〕$$

(c) 如果存在一个序列$(F_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$，它满足：对于任意$n$，$\mu(F_n)<\infty$，且$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则对于任意$E\in\mathscr{S}$，$\nu(E)=\bar{\mu}(E)$，也就是说，$\mu$向$\mathscr{S}$的开拓是唯一的．〔提示．不妨假设$F_n\cap F_m=\varnothing$（$n\neq m$），那么根据(b)便得到

$$\nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E\cap F_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(E\cap F_n)=\bar{\mu}(E).〕$$

(d) 如果取掉(c)中σ有限性假设，则μ向$\mathscr{S}$的开拓可能有不止一个．〔提示．命$X=[0,1[$，设$\mathscr{A}$是形如$[a,b[\subset[0,1[$的区间的有限并全体所成的代数．在$\mathscr{A}$上规定μ如下：$\mu(\varnothing)=0$，而当$A\neq\varnothing$时，$\mu(A)=\infty$．证明：在$[0,1[$的Borel集上，恰好有$2^{\mathfrak{c}}$个可数加性测度与$\mathscr{A}$上的μ一致．〕

(10.40) **习题** 设有$\mathscr{P}(X)$上的一个外测度μ，如果对于每个$E\subset X$，存在一个μ可测集$A\subset X$，使得$E\subset A$，且$\mu(A)=\mu(E)$，就说μ是**正则的**．

(a) 试证：凡象(10.36)那样，由集代数上的一个测度得到的外测度，必是一个正则外测度．

(b) 试证：如果X是一个局部紧Hausdorff空间，而ι如§9所设，则ι是一个正则外测度．

(c) 命$X=\{0,1\}$．试在$\mathscr{P}(X)$上构造一个非正则外测度．

(d) 设μ是$\mathscr{P}(X)$上的一个正则外测度，$E\subset X$，$\mathscr{A}$是含有$\{E\}\cup\mathscr{M}_\mu$的最小代数．试证：如果μ在$\mathscr{A}$上是有限加性的，则$E\in\mathscr{M}_\mu$，

(e) 试讨论：由于λ是R上的一个正则外测度，那么(10.29.b)所提及的λ（作为$\mathscr{M}_\lambda$上的测度）的所有开拓，都不能与真包含

$\mathscr{M}_\lambda$的任意集代数上的外测度λ一致.

(10.41) **习题** 设A是$[0,1]$的非λ可测子集，$B=[0,1]\cap A'$. 试证：$\overline{\overline{S}}(\xi_A+\xi_B)<\overline{\overline{S}}(\xi_A)+\overline{\overline{S}}(\xi_B)$，式中$S$是Riemann积分.

(10.42) **习题** 设X，Y是两个拓扑空间. 试证以下命题：

(a) 如果f是X到Y内的连续函数，且$B\in\mathscr{B}(Y)$，则$f^{-1}(B)\in\mathscr{B}(X)$.（可考虑使得断言成立的集$B$全体所成的族.）

(b) 如果$A\in\mathscr{B}(X)$，$B\in\mathscr{B}(Y)$，则$A\times B\in\mathscr{B}(X\times Y)$.〔请复习积拓扑定义(6.41)，并利用(a).〕

(c) 试把(b)推广到可数个拓扑空间的乘积.

(10.43) **习题**（H.Steinhaus） 设T是R中的一个λ可测集，且$\lambda(T)>0$. 试证：集$T-T$包含一个区间$(-\alpha,\alpha)$ $(\alpha>0)$. 下列步骤或许有助于证明.

(a) 如果U和V都是R中的开集，且都有有限λ测度，那么函数$x\to\lambda((x+U)\cap V)$在R上连续.〔可先研究区间，进而就一般的U和V利用(6.59).〕

(b) 如果A和B都是λ可测的，且都有有限λ测度，那么$x\to\lambda((x+A)\cap B)$连续.〔对于$U\supset A$及$V\supset B$，先证明

$$|\lambda((x+U)\cap V)-\lambda((x+A)\cap B)|$$
$$\leqslant\lambda(U\cap A')+\lambda(V\cap B').〕$$

(c) 集$T-T$包含一个区间$(-\alpha,\alpha)$.〔函数$x\to\lambda((x+T)\cap T)$在0处为正，而且若$(x+T)\cap T\neq\varnothing$，则$x\in T-T$.〕

(10.44) **习题** 试把(10.43)推广到$A+B$，这里A，B都在$\mathscr{M}_\lambda$中，且都具有正测度.

(10.45) **习题** 设$(X,\mathscr{M},\mu)$是一个测度空间，并设

$$\widetilde{\mathscr{M}}=\{E\in\mathscr{M}:\mu(E)<\infty\}.$$

对于A，$B\in\widetilde{\mathscr{M}}$，规定

$$\rho(A,B)=\mu(A\triangle B).$$

(a) 如果凡$\mu(A\triangle B)=0$的两个集A和B都认为是同一个集，

试证（$\widetilde{\mathscr{M}}$，ρ）是一个完备度量空间.

(b)证明：$\widetilde{\mathscr{M}}\times\widetilde{\mathscr{M}}$到$\widetilde{\mathscr{M}}$内且在（$A$，$B$）分别有值$A\cup B$，$A\triangle B$及$A\cap B$的三个映射都是连续的．再证明：$\widetilde{\mathscr{M}}$到$\widetilde{\mathscr{M}}$内的映射$A\rightarrow A'$也是连续的.

(10.46) 习题 试证（10.45）所定义的度量空间（$\widetilde{\mathscr{M}}$，ρ）当$X=[0,1]$，$\mathscr{M}=\mathscr{B}([0,1])$及$\mu=\lambda$时并非紧空间.

(10.47) 习题 (a) 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι是如§9所定义的X上的一个测度．试证：如果X的拓扑有一个可数基，则如（10.45）所定义的度量空间（$\widetilde{\mathscr{M}}_{\iota}$，$\rho$）①是可分的.

(b)试指明度量空间（$\widetilde{\mathscr{M}}_{\lambda}$，$\rho$）有一个可数稠密子集，其中$\mathscr{M}_{\lambda}$是$R$的Lebesgue可测子集所成的$\sigma$代数，而$\lambda$是如（10.45）用来规定$\rho$的测度．试求对于（10.29.b）所描述的Lebesgue测度的不变开拓μ来说，空间（$\widetilde{\mathscr{M}}$，ρ）的稠密子集的最小基数.

(10.48) 习题 设X是赋以度量ρ的度量空间，μ是$\mathscr{P}(X)$上的任意外测度，满足：如果$A,B\subset X$，$A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$及$\rho(A,B)>0$，那么$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$．这种外测度叫做**度量外测度**（metric outer measures）．设U是X的一个开的真子集，A是U的一个非空子集．对于每个$n\in N$，规定$A_n=\left\{x\in A:\rho(x,U')\geqslant\frac{1}{n}\right\}$．试证：

(a) $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$

（可考虑集$D_{2n}=A_{2n}\cap A'_{2n-1}$和$D_{2n+1}=A_{2n+1}\cap A'_{2n}$）；

(b) U是μ可测的；

(c) $\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{M}_{\mu}$.

(10.49) 习题 一类外测度的结构． 设X是一个可分度量空间，$\mathscr{O}$是X中的开集全体所成的集族，p是一个正实数．对于每个

①原书印刷不清，似为"$\widetilde{\mathscr{M}},\rho$"译文改为"$\widetilde{\mathscr{M}}_{\iota}$，$\rho$"．——译者注

$\varepsilon>0$，命$\mathscr{O}_\varepsilon=\{U\in\mathscr{O}:\operatorname{diam}U\leqslant\varepsilon\}\cup\{\varnothing\}$. 对于每个$E\subset X$，规定

$$\mu_{p,\varepsilon}(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{diam}U_n)^p:U_n\in\mathscr{O}_\varepsilon,E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\right\},$$

其中规定$\operatorname{diam}\varnothing=0$.

(a) 试证：当ε减小时，$\mu_{p,\varepsilon}(E)$是非减的.

规定：对于每个$E\subset X$，$\mu_p(E)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\mu_{p,\varepsilon}(E)$.

(b) 试证：μ_p是X上的一个度量外测度.

(c) 试证：如果$\mu_p(E)<\infty$，且$q>p$，那么$\mu_q(E)=0$

集函数μ_p叫做X上的**Hausdorff p维(外)测度**. 对于$E\subset X$，E的**Hausdorff维数**定义为数值$\sup\{p\in R:p>0，\mu_p(E)=\infty\}$，这里设$\sup\varnothing=0$.

(10.50) **习题** 设R具有通常度量. 考虑R上的Hausdorff测度μ_p〔参见(10.49)〕. 对于$E\subset R$，设$\operatorname{dim}E$是E的Hausdorff维数.①试证：

(a) $\mu_1=\lambda$;

(b) 对于所有非空开集$U\subset R$，都有$\operatorname{dim}U=1$；

(c) $\operatorname{dim}E=0$蕴涵$\lambda(E)=0$；

(d) 如果P是Cantor三分点集，那么$\operatorname{dim}P=\frac{\log 2}{\log 3}$〔可考虑(6.62)中的集$P_n$〕;

(e) 必有一个R的不可数子集E，满足$\operatorname{dim}E=0$.

(10.51) **习题** **另一类外测度**. 设(X,ρ)是一个度量空间. 对于一个非空集$E\subset X$及$t>0$，规定$n(E,t)$如下：

$n(E,t)=1$，当对于一切x，$x'\in E$，$\rho(x,x')\leqslant t$时；

$n(E,t)=\sup\{\overline{\overline{F}}:F\subset E$，$F$是有限的，对于不同的$x,x'\in F$有$\rho(x,x')>t\}$，当此上确界为有限；

① "dim"为英文"dimension(维数)"的前三个字母. ——译者注

$n(E, t)=\infty$，其余.

并规定$n(\varnothing, t)$为零. 设φ是定义在]0，1]上的一个正实值、严格递减函数，且$\lim_{t\downarrow 0}\varphi(t)=\infty$. 对于任意$E\subset X$，规定

$$\text{ext}_\varphi(E)=\underline{\lim}_{t\downarrow 0}\frac{n(E,t)}{\varphi(t)}.$$

对于任意$E\subset X$，规定

$$\nu_\varphi(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\text{ext}_\varphi(A_k)\right\},$$

其中下确界是在满足$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=E$的集$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$所成的一切可数的、两两不相交集族上来取的.

(a) 试证ν_φ是如(10.48)所定义的一个度量外测度.〔提示.值得论证的仅仅是：当$\rho(A, B)>0$时，$\nu_\varphi(A\cup B)=\nu_\varphi(A)+\nu_\varphi(B)$. 这由等式$n(A\cup B, t)=n(A, t)+n(B, t)$——此等式当$t<\rho(A, B)$时成立——便可推出.〕.

(b) 设$X=R$(具有R的通常度量)，$\varphi(t)=\frac{1}{t}$，试计算ν_φ.

(c) 试把外测度ν_φ(关于适当的φ!)与Hausdorff p维测度作一比较.

(d) 试证：当E可数时，$\nu_\varphi(E)=0$.

(e) 试证：如果存在一个E到F上的等距，那么$\nu_\varphi(E)=\nu_\varphi(F)$.〔所谓**等距**，是指一个映射$\psi$，它把一个度量空间映满另一个度量空间，且$\rho(x, y)=\rho'(\psi(x), \psi(y))$，$\rho$和$\rho'$是两个空间上的度量.〕

(10.52) 习题 设α是R上的任意一个实值非减函数，λ_α是如同§9由Riemann-Stieltjes积分导出的R上的Lebesgue-Stieltjes测度. 试证：对于$x\in R$，$\lambda_\alpha(\{x\})=0$的充要条件是α在x连续.

(10.53) 习题 α，λ_α如(10.52)所设，假定α连续. 试证

以下三个断言：

(a) 对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个无处稠密的完全集 $A\subset[0,1]$，满足 $\lambda_\alpha(A)>\lambda_\alpha([0,1])-\varepsilon$.

(b) 存在一个 F_σ 集 $B\subset[0,1]$，合于条件：B 是第一范畴集，且 $\lambda_\alpha(B)=\lambda_\alpha([0,1])$.

(c) 存在一个第二范畴的 G_δ 集，它含在 $[0,1]$ 中，并具有 λ_α 测度零.

(10.54) **习题** 本题中，我们首先概述 R 的某个子集 B 的结构，这个子集 B 对于极少的 λ_α（这里 α 是连续的）才是可测的.

(a) 试证：凡 R 的不可数闭子集 F 都具有基数 $\mathfrak{c}$.〔利用(6.65)及(6.66).〕

(b) (F.Bernstein). 试证：存在 R 的一个子集 B，满足：对于 R 的任意一个不可数闭子集 F，都有 $B\cap F\neq\varnothing$ 及 $B'\cap F\neq\varnothing$.〔提示. R 恰好有 $\mathfrak{c}$ 个开子集，因此也恰好有 $\mathfrak{c}$ 个不可数闭子集. 设 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 是具有相应基数 $\mathfrak{c}$ 的最小序数〔可利用(4.47)来证实 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 是存在的〕. 设 $\{F_\eta:\eta<\omega_{\mathfrak{c}}\}$ 是 R 的所有不可数闭子集的一个良序关系. 根据超限递归及选择公理定义 B 如下. 设 x_0 和 y_0 是 F_0 中的任意两个不同的点. 假定对于一切 $\gamma<\eta$（这里 $\eta<\omega_{\mathfrak{c}}$）已定义好了 x_γ 和 y_γ. 集 $A_\eta=\{x_\gamma:\gamma<\eta\}\cup\{y_\gamma:\gamma<\eta\}$ 具有基数 $<\mathfrak{c}$，这是因为 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 是基数 $\mathfrak{c}$ 的最小序数的缘故. 所以集 $F_\eta\cap A'_\eta$ 具有基数 $\mathfrak{c}$. 设 x_η 和 y_η 是集 $F_\eta\cap A'_\eta$ 中的任意两个不同的点. 最后命 $B=\{x_\eta:\eta<\omega_{\mathfrak{c}}\}$. 显而易见，对于一切 $\eta<\omega_{\mathfrak{c}}$，$B\cap F_\eta\neq\varnothing$，$B'\cap F_\eta\neq\varnothing$.〕

(c) 试证：如果 α 连续，且 $\lambda_\alpha\neq0$，那么 B 是非 λ_α 可测的.〔提示. 假定 B 是 λ_α 可测的. 则根据(10.30)，便得到 $\lambda_\alpha(B)=\sup\{\lambda_\alpha(F):F\text{是紧的},F\subset B\}$. B 的所有紧子集都是可数的，并且既然对于一切 $x\in R$，都有 $\lambda_\alpha(\{x\})=0$，由此可得 $\lambda_\alpha(B)=0$. 同样可得 $\lambda_\alpha(B')=0$，从而倘若 B 是 λ_α 可测的，λ_α 就是零测度.〕

本题以下假定连续统假设是正确的，也就是说，假定 $\omega_1=\mathfrak{c}$〔参见(4.49)及(4.50)〕.

(d) 试证：借助于一切可数序数(其集可记为P_{Ω})，$[0, 1]$的无处稠密闭子集全体所成的集族可以有一个指标集$\{C_\eta: 0 \leqslant \eta < \Omega\}$.

（根据超限递归及选择公理）定义一个集$S = \{x_\eta: 0 \leqslant \eta < \Omega\}$如下：设$x_0 \in [0, 1] \cap C_0'$，并且

$$x_\eta \in [0,1] \cap \left(\bigcup_{\theta < \eta} (C_\theta \cup \{x_\theta\}) \right)'.$$

(e) 试证：$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{c}$，且对于所有$\eta \in P_{\Omega}$，$S \cap C_\eta$都是可数的.

(f) 试证：对于一切Lebesgue-Stieltjes测度λ_α(这里α是连续的)，都有$\lambda_\alpha(S) = 0$.

(10.55) **评注** 以上所定义的集S并不是R中的一个Borel集. 事实上，我们知道，一个完备可分度量空间中的每个不可数Borel集都含有一个非空完全集①.

(10.56) **习题** (a) 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，且$0 < \mu(X) < \infty$，而μ仅取有限个不同的正值. 试证$X = E_1 \cup \cdots \cup E_n \cup F$，这里所求并的集都是$\mathscr{A}$可测的、两两不相交的，并具有如下性质. 存在一个非减正数列$(\alpha_k)_{k=1}^{n}$，满足：若$A \in \mathscr{A}$，且$A \subset E_k$，则有(i)$\mu(A) = 0$或$\mu(A) = \alpha_k$；(ii)$\mu(E_k) = \alpha_k$；(iii)$\mu(F) = 0$.〔提示. 设α_1是μ所取的最小正值，E_1是$\mathscr{A}$中适合$\mu(E_1) = \alpha$的任意一个集. 考虑E_1'并作归纳论证.〕

(b) 设X是一个不可数集，$\mathscr{A}$是集族$\{A: A \subset X, A$可数或A'可数$\}$，并在$\mathscr{A}$上规定μ为：当A'可数时，$\mu(A) = 1$，当A可数时，$\mu(A) = 0$. 试证$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间. 试用此例说明(a)中所说的分解不一定是唯一的.

(c) 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，且$0 < \mu(X) < \infty$，而μ取无穷多个不同值. 试证明：存在一个两两不相交的无限集族$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$，使对于一切$n$，都有$0 < \mu(A_n) < \infty$.

---

①参见W.Sierpiński，上述(10.21.b)中的引文，第228页.

(d) 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个测度空间，并满足条件：凡是 $\mu(A)=\infty$ 的 $A\in\mathscr{A}$，都包含一个集 $B\in\mathscr{A}$，适合 $0<\mu(B)<\infty$. 则凡是这样的 A 都包含一个集 $C\in\mathscr{A}$，它满足：$\mu(C)=\infty$，且 C 是可数个有限测度集之并．〔提示．命 $\alpha=\sup\{\mu(B): B\in\mathscr{A}, B\subset A, \mu(B)<\infty\}$．设 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个非减集序列，且合于条件：$\mu(B_n)<\infty$，$B_n\subset A$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)=\alpha$．命 $C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$．若假定 $\mu(C)<\infty$，则直接导致矛盾．〕

(10.57) **习题** 设 X 是一个集，并设 $\mathscr{L}$ 是 X 的子集所成的一个集族，且合于条件：当 $A, B\in\mathscr{L}$ 时，$A\cup B\in\mathscr{L}$，$A\cap B\in\mathscr{L}$．又假定 $X\in\mathscr{L}$，$\varnothing\in\mathscr{L}$．这种集族 $\mathscr{L}$ 叫做（具有**单位元**和**零元**的）**集格**．设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}$ 中的正常差集①全体所成的集族，就是说，$\mathscr{D}=\{B\cap A': A, B\in\mathscr{L}, A\subset B\}$．最后设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{D}$ 中不相交有限并集全体所成族．试证以下命题：

(a) 如果 D_1，$D_2\in\mathscr{D}$，则 $D_1\cap D_2\in\mathscr{D}$．〔如果 $D_j=B_j\cap A'_j$ $(j=1, 2)$，则

$D_1\cap D_2=(B_1\cap B_2)\cap((A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_1))'$．〕

(b) 如果 U，$U_2\in\mathscr{U}$，则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{U}$．

(c) 如果 $U\in\mathscr{U}$，则 $U'\in\mathscr{U}$．〔施归纳于数 n，这里 $U=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$．〕

(d) 族 $\mathscr{U}$ 是 X 的子集所成的含 $\mathscr{L}$ 的最小代数．

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集所成的一个 σ 代数，且 $\mathscr{L}\subset\mathscr{A}$，并设 μ 和 ν 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的两个测度．

(e) 若对于任意 $A\in\mathscr{L}$，$\mu(A)=\nu(A)$，又存在一个序列 $(A_n)\subset\mathscr{L}$，使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=X$，并且对于任意 $n\in N$，$\mu(A_n)<\infty$，则对于任意 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{L})$，必有 $\mu(E)=\nu(E)$．〔先证在 $\mathscr{U}$ 上 μ 和 ν 一

---

①设 A，$B\in\mathscr{L}$，B 和 A 的**差集**定义为 A 相对于 B 的余集，记作 $B\cap A'$〔本书不采用 $B-A$ 的记法，参见(1.8)，(10.26)〕．因此差集有时也称为**相对余集**．如果 $A\subset B$，则称差集 $B\cap A'$ 是**正常的**．——译者注

致，然后利用（10.39）.〕

(10.58) **习题** 试用（10.57）证明以下命题：

(a) 如果X是一个拓扑空间，μ和ν是定义在$\mathscr{B}(X)$上的两个有限测度，并且，μ和ν满足条件：（1）在一切开集所成的集族上一致，或者（2）在一切闭集所成的集族上一致，或者（3）在一切紧集所成的集族上一致（若X为σ紧的），则μ和ν必在$\mathscr{B}(X)$上一致.

(b) 如果X是一个度量空间，μ是定义在$\mathscr{B}(X)$上的一个有限测度，则对于任意$E\in\mathscr{B}(X)$，都有

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U):U\text{是开集},\ E\subset U\}.$$

〔对于任意$E\subset X$，规定$\nu(E)=\inf\{\mu(U):U$是开集，$E\subset U\}$. 证明ν是一个度量外测度（10.48），并利用(a).〕

§11 可测函数

(11.1) **引言** 正如（10.40.d）所指出的，§9中根据非负线性泛函I所构造的外测度ι，并不需要在集全体上是有限加性的. 不过，我们已了解到，外测度ι实际上在可测集的一些σ代数上却是可数加性的. 同样，我们也不能期望所作出的开拓$\overline{\overline{I}}$必须在非负函数全体上是有限加性的〔参见(10.41)〕. 本节我们构造一大类函数，泛函$\overline{\overline{I}}$在这一函数类上是可数加性的.〔§12将证明可数加性.〕这些所谓的**可测函数**与函数全体所成的族有关——这在许多方面类似于可测集与集全体所成的集族之间的关系.

本节始终用①X表示一个任意集，$\mathscr{A}$表示X的子集所成的一个任意σ代数. 有序偶（$X,\mathscr{A}$）则称为一个**可测空间**②.

(11.2) **定义** 设f是定义在X上的一个广义实值函数. 假定

①除非另作声明. ——译者注

②讲究用词纯正的读者可能要指摘"可测空间"这一用语，因为确实不能保证在$\mathscr{A}$上必存在一个非平凡测度. 我们之所以采用这个术语，是由于faute de mieun（法语，意为"没有更好的". ——译者注）.

对于每个$a\in R$，都有$f^{-1}(]a,\infty])\in\mathscr{A}$，也就是说，对于任意实数$a$，都有$\{x\in X: a<f(x)\leqslant\infty\}\in\mathscr{A}$.则称$f$是一个$\mathscr{A}$**可测函数**.〔读者应注意，这一定义与下半连续性定义（7.21.d）是颇为相象的.〕如果X是一个拓扑空间，$\mathscr{A}$是Borel集所成的σ代数$\mathscr{B}(X)$，则称任意一个$\mathscr{B}(X)$可测函数是**Borel可测的**. 如果$X=R$，$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$，则称$\mathscr{M}_\lambda$可测函数是**Lebesgue可测函数**.〔注意，可测函数定义毫不依赖于任意测度，而仅取决于某一特定的σ代数.〕

(11.3) 定理 设D是R的任意一个稠密子集（即$D^-=R$）.又设f是定义域为X的一个广义实值函数.则关于f的以下五个条件是等价的：

(i) f是$\mathscr{A}$可测的；

(ii) 对于任意$a\in D$，$f^{-1}(]a,\infty])\in\mathscr{A}$；

(iii) 对于任意$a\in D$，$f^{-1}([a,\infty])\in\mathscr{A}$；

(iv) 对于任意$a\in D$，$f^{-1}([-\infty,a[)\in\mathscr{A}$；

(v) 对于任意$a\in D$，$f^{-1}([-\infty,a])\in\mathscr{A}$.

证 自然，(i)蕴涵(ii). 为了看出(ii)蕴涵(iii)，设$a\in D$，(a_n)是D中的一个严格递增序列，且$a_n\to a$. 则有

$$f^{-1}([a,\infty])=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}(]a_n,\infty]).$$

为了看出(iii)蕴涵(iv)，只须注意到$f^{-1}([-\infty,a[)=(f^{-1}([a,\infty]))'$.(iv)蕴涵(v)的证明类似于(ii)蕴涵(iii)的证明.尚需证明(v)蕴涵(i). 设$a\in R$，在D中取一个严格递减序列(b_n)，使$b_n\to a$. 那么

$$f^{-1}(]a,\infty])=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}([-\infty,b_n])\right)'.\qquad\square$$

(11.4) 定理 设f是一个广义实值函数，并有定义域X. 则f成为$\mathscr{A}$可测函数的充要条件是

(i) $f^{-1}(\{-\infty\})$和$f^{-1}(\{\infty\})$都在$\mathscr{A}$中，

并且

(ii) 对于任意$B\in\mathscr{B}(R)$，都有$f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.

证 因为对于任意$a\in R$，都有$]a,\infty[\in\mathscr{B}(R)$，$]a,\infty]=]a,\infty[\cup\{\infty\}$，那么显而易见，由(i)和(ii)推知$f$是$\mathscr{A}$可测的.

反过来，假定f是$\mathscr{A}$可测的，那么

$$f^{-1}(\{-\infty\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}([-\infty,-n])\in\mathscr{A},$$

$$f^{-1}(\{\infty\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}(]n,\infty])\in\mathscr{A}.$$

这样，(i)是正确的．为了证明(ii)，命$\mathscr{S}=\{S\subset R:f^{-1}(S)\in\mathscr{A}\}$. 我们来证$\mathscr{S}$是$R$的子集所成的一个$\sigma$代数．显然$\varnothing\in\mathscr{S}$. 如果$(S_n)$是$\mathscr{S}$中的任意一个序列，那么

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(S_n)\in\mathscr{A};$$

这样，$\mathscr{S}$中集的可数并仍在$\mathscr{S}$中．如果$S\in\mathscr{S}$，那么

$$f^{-1}(R\cap S')=[f^{-1}(S)\cup f^{-1}(\{-\infty\})\cup f^{-1}(\{\infty\})]'\in\mathscr{A};$$

这样，$\mathscr{S}$对于求余运算是封闭的．由此可见，$\mathscr{S}$确是R的子集所成的一个σ代数．其次证$\mathscr{S}$包括R的每个开子集．其实，既然f是$\mathscr{A}$可测的，$R\in\mathscr{S}$，(i)又是正确的，那么只要$-\infty\leqslant a<\infty$，$-\infty<b\leqslant\infty$，便有$f^{-1}(]a,\infty])\in\mathscr{A}$，$f^{-1}([-\infty,b[)\in\mathscr{A}$．于是，如果$]a,b[$是$R$的任意一个开区间，则有

$$f^{-1}(]a,b[)=f^{-1}([-\infty,b[)\cap f^{-1}(]a,\infty])\in\mathscr{A},$$

从而$]a,b[\in\mathscr{S}$．由此可知，R的一切开子集都在$\mathscr{S}$中．这样一来，$\mathscr{S}$乃是含有$\mathscr{B}(R)$的一个σ代数，因此(ii)也是正确的．□

(11.5) 推论 假定X是一个拓扑空间，$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}(X)$．则定义在$X$上的一切实值连续函数和一切广义实值下(上)半连续函数都是$\mathscr{A}$可测的.

(11.6) 评注 显而易见，如果f是R上的一个实值Lebesgue

可测函数，那么只要 B 是一个Borel 集，$f^{-1}(B)$ 就一定是一个Lebesgue可测集. 值得注意的是，甚至对于 R 上的某些实值连续函数 f，也存在一些Lebesgue可测集 A，而 $f^{-1}(A)$ 却并非 Lebesgue 可测集. 以下我们就来概述这样一个集的结构.

设 P 是$[0,1]$的一个无处稠密完全子集，它适合条件：$\inf P=0$，$\sup P=1$，$\lambda(P)>0$（10.53.a）. 命 C 表示Cantor三分点集. 又命 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 分别表示$[0,1]$中作为 P 和 C 的余集的开构成子区间所成的区间族. $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 显然都可以被线性有序化——当 I_1 位于 I_2 之左方时，$I_1<I_2$. 于是 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 都具有序型 η（4.53），从而必存在 $\mathscr{I}$ 到 $\mathscr{J}$ 上的一个序同构 φ.〔如果 P 是如(6.62)所构造的Cantor型集，那么 φ 就可以由具有相同下标的有关余区间所显定义.〕规定$[0,1]$到$[0,1]$上的一个函数 f 如下：$f(0)=0$；对于 $I\in\mathscr{I}$，则这样来线性定义 I 到 $\varphi(I)$ 上的 f：它把 I 的下(上)端点映射到 $\varphi(I)$ 的下（上）端点，并用线段连接起来；而对于 $x\in P\cap\{0\}'$，则规定 $f(x)=\sup\{f(t):t<x,\ t\in\bigcup\mathscr{I}=[0,1]\cap P'\}$. 于是 f 就是$[0,1]$到$[0,1]$上的一个连续的1－1（严格递增）函数，并且 $f(P)=C$. 设 S 是 P 的一个非Lebesgue可测子集(10.28)，并设 $A=f(S)$. 则有 $A\subset C$. 因此 $\lambda(A)=0$，所以 $A\in\mathscr{M}_\lambda$. 但 $f^{-1}(A)=S\notin\mathscr{M}_\lambda$.（注意，可利用上述构造来证明：$R$ 的任意两个无处稠密的紧完全子集是同胚的[①].）

由（11.4）推知，上例中的集 A 并不是一个Borel集. 因此上例再一次证实：不是Borel集的Lebesgue可测集是存在的（参见(10.21.a)）.

f，A 及 S 如上所设，并设 $g=\xi_A$. 显然（在$[0,1]$上）$g\circ f=\xi_S$. 注意到 f 和 g 都是Lebesgue可测的，而 $g\circ f$ 却并非如此. 由此看来，两个可测函数的合成就不一定也是可测的. 不过我们确实有以

---

①设 X 和 Y 是两个拓扑空间，如果连续映射 $f: X\to Y$ 是1－1的，且 f^{-1} 也是连续的，则称映射 f 是一个**同胚**或**拓扑映射**. 如果存在一个同胚 $f: X\to Y$，则称 X 和 Y 是**同胚的**. ——译者注

下定理.

(11.7) 定理 设φ是定义在$R^{\#}$上的任意一个广义实值函数，且对于任意实数a，$\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R$是一个Borel集，这就是说，$\varphi$是$\mathscr{B}(R^{\#})$可测的. 又设$f$是$\mathscr{A}$可测的. 则$\varphi\circ f$必是$\mathscr{A}$可测的.

证 我们有

$$
\begin{aligned}
(\varphi\circ f)^{-1}([a,\infty]) &= f^{-1}(\varphi^{-1}([a,\infty]))\\
&= f^{-1}((\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R)\cup A_+\cup A_-)\\
&= f^{-1}(\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R)\cup f^{-1}(A_+)\cup f^{-1}(A_-),
\end{aligned}
$$

其中$A_+=\{\infty\}\cap\varphi^{-1}([a,\infty])$，$A_-=\{-\infty\}\cap\varphi^{-1}([a,\infty])$，根据题设，$\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R$既然是一个Borel集，那么由(11.4)，$f^{-1}(\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R)$就必在$\mathscr{A}$中. 不难看出$f^{-1}(A_+)$及$f^{-1}(A_-)$也都在$\mathscr{A}$中；因此$(\varphi\circ f)^{-1}([a,\infty])\in\mathscr{A}$，从而$\varphi\circ f$便是$\mathscr{A}$可测的. □

(11.8) 定理 如果f是$\mathscr{A}$可测的，则成立下列五个断言：

(i) 对于任意实数α，函数$f+\alpha$是$\mathscr{A}$可测的.

(ii) 对于任意实数α，函数αf是$\mathscr{A}$可测的.

(iii) 命

$$
h(x)=\begin{cases}|f(x)|^p, & f(x)\text{有限},\\ \beta_-, & f(x)=-\infty,\\ \beta_+, & f(x)=\infty,\end{cases}
$$

其中β_-和β_+是两个任意广义实数，p是任意正实数. 则h是$\mathscr{A}$可测的.

(iv) 命

$$
h(x)=\begin{cases}(f(x))^m, & f(x)\text{有限},\\ \beta_-, & f(x)=-\infty,\\ \beta_+, & f(x)=\infty,\end{cases}
$$

其中m是正整数，β_-和β_+是两个任意广义实数. 则h是$\mathscr{A}$可测的.

(v) 命$h=\frac{1}{f}$，其中f为有限且非零，并设在$\{x\in X: f(x)=$

$\infty\}$，$\{x\in X: f(x)=-\infty\}$及$\{x\in X: f(x)=0\}$这三个集上，h分别取任意常数值β_+，β_-及β_0. 则h是$\mathscr{A}$可测的.

证 在每种情况下，我们都规定一个适当的函数φ，使得所论及的函数等于$\varphi\circ f$，然后应用（11.7）. 就(i)来说，命

$$\varphi(t)=\begin{cases} t+\alpha, & t\in R,\\ \pm\infty, & t=\pm\infty. \end{cases}$$

为了证明(ii)，若$\alpha>0$，则命

$$\varphi(t)=\begin{cases} -\infty, & t=-\infty,\\ \alpha t, & t\in R,\\ \infty, & t=\infty; \end{cases}$$

若$\alpha<0$，则命

$$\varphi(t)=\begin{cases} \infty, & t=-\infty,\\ \alpha t, & t\in R,\\ -\infty, & t=\infty; \end{cases}$$

若$\alpha=0$，断言则是显然的.

就(iii)来说，命$\varphi(\pm\infty)=\beta_\pm$，而对于实数$t$，则命$\varphi(t)=|t|^r$. 由于$\varphi$在$R$上连续，显而易见,对于任意实数$a$,$\varphi^{-1}([a,\infty])\cap R$便是一个Borel集.

(iv)的证明完全类似，这时对于实数t,$\varphi(t)=t^m$,而$\varphi(\pm\infty)=\beta_\pm$.

为了证明(v)，当$t\neq 0$，$t\neq\infty$，$t\neq-\infty$时，都命$\varphi(t)=\frac{1}{t}$，而命$\varphi(0)=\beta_0$，$\varphi(\pm\infty)=\beta_\pm$. □

(11.9) **引理** 设f，g都是$\mathscr{A}$可测的. 则集

(i) $\{x\in X: f(x)>g(x)\}$,

(ii) $\{x\in X: f(x)\geqslant g(x)\}$,

(iii) $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$

都属于$\mathscr{A}$.

证 因有恒等式

$$\{x\in X: f(x)>g(x)\}=\bigcup_{u\in Q}(\{x\in X: f(x)>u\}\cap\{x\in X: g(x)<u\})$$

由此便可得出集(i)的可测性. 集(ii)是集(i)中f和g互换后所得集的余集，从而它也可测. 集(iii)则是两个(ii)型可测集之交，因此可测. □

(11.10) **定理** 设f, g都是$\mathscr{A}$可测的. 对于$f(x)+g(x)$有定义的一切$x\in X$，命$h(x)=f(x)+g(x)$，而对于其他x，则命h具有任意一个确定的值β(一个广义实数). 那么h是$\mathscr{A}$可测的.

证 对于任意实数a，得到

$$\begin{aligned} h^{-1}(]a,\infty]) &= \{x\in X: f(x)+g(x)>a\}\cup A_\beta \\ &= \{x\in X: f(x)>a-g(x)\}\cup A_\beta, \end{aligned}$$

其中

$$A_\beta=\begin{cases} (\{x: f(x)=\infty\}\cap\{x: g(x)=-\infty\}) \\ \cup(\{x: f(x)=-\infty\}\cap\{x: g(x)=\infty\}) & \text{当}a<\beta, \\ \varnothing \quad \text{当}a\geqslant\beta. \end{cases}$$

根据(11.9)，集$\{x\in X: f(x)>a-g(x)\}$属于$\mathscr{A}$；因而，由于A_β也属于$\mathscr{A}$，可知集$h^{-1}(]a,\infty])$属于$\mathscr{A}$. □

(11.11) **定理** 设f, g是两个$\mathscr{A}$可测函数. 又设在X上h定义为

$$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & x\notin A, \\ \beta, & x\in A, \end{cases}$$

其中β是一个任意的广义实数，$A=\{x\in X: f(x)=\infty, g(x)=-\infty\}\cup\{x\in X: f(x)=-\infty, g(x)=\infty\}$. 则$h$是一个$\mathscr{A}$可测函数.

证 考虑$a\in R$. 先设$a>0$，命

$$A_\beta=\begin{cases} A, & a<\beta, \\ \varnothing, & a\geqslant\beta. \end{cases}$$

则得到

$$\begin{aligned} h^{-1}(]a,\infty]) &= \{x\in X: h(x)>a\} \\ &= A_\beta\cup\{x\in X: f(x)=\infty, g(x)>0\} \\ &\quad \cup\{x\in X: f(x)>0, g(x)=\infty\} \end{aligned}$$

$$\cup\{x\in X: f(x)<0,\ g(x)=-\infty\}$$
$$\cup\{x\in X: f(x)=-\infty, g(x)<0\}$$
$$\cup\{x\in X: f(x)\text{和}g(x)\text{都有限},$$
$$\frac{1}{4}[(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2]>a\}.$$

应用(11.4)，(11.8)及(11.10)，便看出$h^{-1}(]a,\ \infty])\in\mathscr{A}$. 当$a<0$及$a=0$时，成立类似表达式，由此可见，$h$是$\mathscr{A}$可测的. □

以下研究可测函数序列的极限.

(11.12) 定理 设(f_n)是定义在X上的一个$\mathscr{A}$可测函数序列. 则〔如(7.1)所点态定义的〕$\inf\limits_n f_n$，$\sup\limits_n f_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$和$\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$四个函数都是$\mathscr{A}$可测的.

证 由恒等式

$$\{x\in X: \sup_n f_n(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X: f_n(x)>a\}$$

直接推知$\sup\limits_n f_n$是$\mathscr{A}$可测的. 至于$\inf\limits_n f_n$的$\mathscr{A}$可测性，可从恒等式$\inf\limits_n f_n(x)=-\sup\limits_n(-f_n(x))$立即得出〔忆及$-(\infty)=-\infty$，$-(-\infty)=\infty$〕. 根据前两个结果及以下两个恒等式便得到后两个函数的$\mathscr{A}$可测性：

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)=\sup_k\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)=\inf_k\left(\sup_{n\geq k} f_n(x)\right).\ \square$$

(11.13) 推论 设f_1，$\cdots f_m$都是$\mathscr{A}$可测的. 则(所点态定义的)两个函数

$$\max\{f_1,\cdots,f_m\}\text{及}\min\{f_1,\cdots,f_m\}$$

都是$\mathscr{A}$可测的.

证 对于一切$n>m$，规定$f_n=f_m$，然后应用(11.12). □

(11.14) **推论** 如果(f_n)是定义在X上的一个$\mathscr{A}$可测函数序列，并且对于一切$x\in X$，在$R^\#$中$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$是存在的，则$\lim\limits_{n\to\infty}f_n$是$\mathscr{A}$可测的.

证 既然$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$，那么(11.12)适用于本推论. □

现在考虑复值(有限)函数的可测性概念.

(11.15) **定义** 设有一个定义在X上的复值函数f，如果$\mathrm{Re}f$和$\mathrm{Im}f$都是$\mathscr{A}$可测的，就说f是$\mathscr{A}$**可测的**.

(11.16) **定理** 设f是定义在X上的一个复值函数. 则下列四个语句是等价的：

(i) f是$\mathscr{A}$可测的；

(ii) 对于每个开集$U\subset K$，$f^{-1}(U)\in\mathscr{A}$；

(iii) 对于任意$B\in\mathscr{B}(K)$，$f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.

证 命$f_1=\mathrm{Re}f$，$f_2=\mathrm{Im}f$. 那么$f=f_1+if_2$. 先假设(i)正确，且命$V=\{s+it\in K: a<s<b,\ c<t<d\}$，其中$\{a,b,c,d\}\subset Q$. 于是$f^{-1}(V)=f_1^{-1}(]a,b[)\cap f_2^{-1}(]c,d[)\in\mathscr{A}$. 再命$U$是$K$的任意一个开子集. 那么必存在形如上述$V$的一个有理长方形序列$(V_n)$，适合$U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V_n$. 由此可见，$f^{-1}(U)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}(V_n)\in\mathscr{A}$. 这样，(i)便蕴涵(ii).

其次假设(ii)正确，且命$\mathscr{S}=\{S\subset K: f^{-1}(S)\in\mathscr{A}\}$. 正如(11.4)的证明，我们看出$\mathscr{S}$是$K$的子集所成的一个$\sigma$代数. 此外，$\mathscr{S}$还含有$K$的一切开子集，从而$\mathscr{B}(K)\subset\mathscr{S}$. 这样便推出了(iii)，因此(ii)蕴涵(iii).

最后，假设(iii)正确. 对于$a\in R$，命$A_1=\{s+it\in K: s>a\}$，$A_2=\{s+it\in K: t>a\}$. 因为$A_j\in\mathscr{B}(K)$ ($j=1, 2$)，所以$f_j^{-1}(]a,\infty])=f_j^{-1}(]a,\infty[)=f^{-1}(A_j)\in\mathscr{A}$. 这样，$f_1$和$f_2$都是$\mathscr{A}$可测的，从而(i)正确. □

(11.17) **定理** 设f和g是X上的两个复值、$\mathscr{A}$可测函数.

$\alpha \in K$，$m \in N$，而 p 是正实数．则下列各函数在 X 上都是 $\mathscr{A}$ 可测的：$f+\alpha$；αf；$|f|^p$；f^m；$\frac{1}{f}$（这里对于一切 $x \in X$，$f(x) \neq 0$）；$f+g$；fg.

证 由定义(11.15)，并应用(11.8)，(11.10)及(11.11)，便直接得出全部结论．□

(11.18) 定理 设(f_n)是X上的一个$\mathscr{A}$可测复值函数序列，并假定对于每个$x \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in K$．则 f 是 $\mathscr{A}$ 可测的．

证 应用(11.15)及(11.14)．□

(11.19) 评注 定理(11.18)及(11.14)都要求所论及的序列对于任意$x \in X$都是收敛的．但是，本书大部分篇幅却要论述这样一种情况，即存在定义在$\mathscr{A}$上的某个特定的测度μ，就μ而言，所论及的函数都仅仅是μ几乎处处有定义的，序列也都仅具有 μ-a.e.[①] 收敛性．因此，我们希望针对这种情况有一个相应定理．这样的一个定理将需要对μ附加某个假设，为了明白这一点，试看下例：设$X=R$，$\mathscr{A}=\mathscr{B}(R)$，$\mu=\lambda$，$P=$Cantor 三分点集，$A \subset P$，$A \notin \mathscr{B}(R)$，$f=\xi_A$，以及对于一切$n \in N$，$f_n=0$．这时每个$f_n$都是$\mathscr{B}(R)$可测的，而$f$并非$\mathscr{B}(R)$可测，但是对于一切 $x \in R \cap P'$，却有$f_n(x) \to f(x)$，这就是说，λ-a.e.成立$f_n \to f$．为了防止出现这类令人不愉快的情况，考虑如下所定义的完全测度就行了．

(11.20) 定义 假定μ是定义在$\mathscr{A}$上的一个测度，并假定只要$A \in \mathscr{A}$，$\mu(A)=0$，$B \subset A$，就有$B \in \mathscr{A}$，这就是说，零测度集的任意子集都是可测的．则称μ是一个**完全测度**，而$(X, \mathscr{A}, \mu)$叫做一个**完全测度空间**．

由定理(10.7)可推知，如果μ是X上的一个外测度，那么$(X, \mathscr{M}_\mu, \mu)$便是一个完全测度空间．把注意力限制于完全测度空间，（正如以下定理所表明的），我们受益不浅，而几无损失．

---

①术语"μ几乎处处"及其简便记法"μ-a.e."已在(9.29)就μ是局部紧Hausdorff空间上的一个测度ι的情况定义过了．这一概念可以直接延伸到任意测度空间$(X, \mathscr{A}, \mu)$上去．

(11.21) **定理** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是任意一个测度空间，规定 $\overline{\mathscr{A}}=\{E\cup A: E\in\mathscr{A}$，对于适合 $\mu(B)=0$ 的某个 $B\in\mathscr{A}$，$A\subset B\}$. 并在 $\overline{\mathscr{A}}$ 上规定 $\overline{\mu}$ 为 $\overline{\mu}(E\cup A)=\mu(E)$. 则 $\overline{\mathscr{A}}$ 是一个 σ 代数，$\overline{\mu}$ 是 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的一个完全测度，而 $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ 是一个完全测度空间. 这个测度空间叫做 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ **的完全化**，$\overline{\mu}$ 则叫做 μ **的完全化**.

证 留作习题.

(11.22) **定义** 如果 $E\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_E=\{F\in\mathscr{A}: F\subset E\}$，那么 $\mathscr{A}_E$ 显然是 E 的子集所成的一个 σ 代数，而 $(E, \mathscr{A}_E)$ 则是一个可测空间. 定义在 E 上的一个函数，如果它是 $\mathscr{A}_E$ 可测的，则称之为 $\mathscr{A}$ **可测的**.

(11.23) **定理** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个完全测度空间，f 是 μ-a.e. 定义在 X 上的一个 $\mathscr{A}$ 可测函数. 假定 g 是 μ-a.e. 定义在 X 上的一个函数，且 $f=g$ μ-a.e. 则 g 是 $\mathscr{A}$ 可测的.

证 设 $A=\{x\in(\mathrm{dom}f)\cap(\mathrm{dom}g): f(x)=g(x)\}$. 那么 $\mu(A')=0$，而且 A' 的一切子集都在 $\mathscr{A}$ 中. 假定 f 和 g 都是广义实值函数（复值情况类似）. 设 $a\in R$，便得到

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(]a,\infty])&=(g^{-1}(]a,\infty])\cap A)\cup(g^{-1}(]a,\infty])\cap A')\\
&=(f^{-1}(]a,\infty])\cap A)\cup(g^{-1}(]a,\infty])\cap A')\in\mathscr{A}. \quad \square
\end{aligned}
$$

(11.24) **定理** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个完全测度空间，(f_n) 是一个 $\mathscr{A}$ 可测函数序列，其中每个函数都 μ-a.e. 定义在 X 上. 假定 f μ-a.e. 定义在 X 上，且在 X 上 μ-a.e. 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 则 f 是 $\mathscr{A}$ 可测的.

证 规定 A 为集

$$
(\mathrm{dom}f)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{dom}f_n\right)\cap\{x\in X: f_n(x)\to f(x)\}.
$$

显然，$A\in\mathscr{A}$，$\mu(A')=0$. 对于每个 $n\in N$，规定

$$
g_n(x)=\begin{cases} f_n(x), & x\in A,\\ 0, & x\in A', \end{cases}
$$

并规定

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A, \\ 0 & x\in A' \end{cases}$$

由定理(11.23)推知，对于任意$n\in N$，g_n是$\mathscr{A}$可测的．很明显，对于任意$x\in X$，$g_n(x)\to g(x)$．应用(11.14)或(11.18)，看出g是$\mathscr{A}$可测的．再根据(11.23)，便知道f是$\mathscr{A}$可测的．□

数学分析涉及到大量的函数序列与函数级数的收敛问题．实际上，分析学的主旨正在于研究用简单函数逼近复杂函数的问题．（其中"逼近"、"复杂"、"简单"等述语，场合不同，意义有别．）迄今为止，我们在本书中遇到过两种收敛：点态(几乎处处)收敛和一致收敛．我们现在介绍第三种收敛，并证明某些定理，它们揭示了这三种收敛之间的若干联系．

(11.25) 定义 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$都是X上的$\mathscr{A}$可测函数．它们既可以是广义实值的，也可以是复值的．假如对于任意$\delta>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:|f(x)-f_n(x)|\geqslant\delta\})=0,$$

就说(f_n)**依测度**（或**依概率**）**收敛**于f．记作：依测度$f_n\to f$．

(11.26) 定理（F.Riesz） 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，f和(f_n)都是$\mathscr{A}$可测函数，且依测度$f_n\to f$．则必存在一个子序列(f_{n_k})，使$f_{n_k}\to f$ μ-a.e..

证 取$n_1\in N$，使$\mu(\{x\in X:|f(x)-f_{n_1}(x)|\geqslant 1\})<\frac{1}{2}$．假定$n_1$，$n_2$，…，$n_k$已经取好了．那么取$n_{k+1}$，使$n_{k+1}>n_k$，且

$$\mu\left(\left\{x\in X:|f(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\geqslant\frac{1}{k+1}\right\}\right)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

对于每个$j\in N$，命$A_j=\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x:|f(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}$．显然有$A_1\supset A_2\supset\cdots$．又命$B=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$．由于$\mu(A_1)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty$，由(10.15)

便得到

$$\mu(B)=\lim_{j\to\infty}\mu(A_j)\leqslant\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

$$=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2^{j-1}}=0,$$

即$\mu(B)=0$. 现设$x\in B'=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j'$. 那么必有$j_x$, 使

$$x\in A_{j_x}'=\bigcap_{k=j_x}^{\infty}\left\{y\in X: |f(y)-f_{n_k}(y)|<\frac{1}{k}\right\}.$$

给定$\varepsilon>0$, 取k_0, 取$k_0\geqslant j_x$, 且$\frac{1}{k_0}\leqslant\varepsilon$. 那么当$k\geqslant k_0$时, 有$|f(x)-f_{n_k}(x)|<\frac{1}{k}\leqslant\varepsilon$. 这就证明了对于任意$x\in B'$, $f_{n_k}(x)\to f(x)$. □

(11.27) **注意** 依测度收敛而不a.e.收敛的函数序列是存在的. 例如, 设$X=[0,1]$, $\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$, $\mu=\lambda$, 又对于每个$n\in N$,规定

$$f_n=\xi_{\left[\frac{j}{2^k},\ \frac{j+1}{2^k}\right]}\ (\text{其中}n=2^k+j,\ 0\leqslant j<2^k).$$

这样, $f_1=\xi_{[0,1]}$, $f_2=\xi_{[0,\frac{1}{2}]}$, …, $f_{10}=\xi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{8}]}$, …. 显而易见, 对于任意$\delta>0$, 当$n\to\infty$时, $\lambda(\{x: |f_n(x)|\geqslant\delta\})\leqslant\frac{1}{2^k}\to 0$. 于是依测度$f_n\to 0$. 另一方面, 如果$x\in[0,1]$, 则序列$(f_n(x))$含有无限多个0和无限多个1. 这样一来,函数序列$(f_n)$在$[0,1]$上无处收敛.

(11.28) **习题** 试求出(11.27)中序列(f_n)的一个子序列, 它在$[0,1]$上λ-a.e.收敛于零. 试问: 能否求出(f_n)的一个子序列(f_{n_k}), 它在$[0,1]$上处处收敛于零?

(11.29) **注意** 我们已经看到若干例子, 其中测度空间的有限性或σ有限性假设是必不可少的: 例如参看(10.15), (10.30), (10.34)及(10.58)等. 关于有限测度空间, 我们阐述以下两个定

理.

(11.30) **引理** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个有限测度空间，f和(f_n)都是μ-a.e.定义在X上且μ-a.e.有限的$\mathscr{A}$可测函数. 假定在X上μ-a.e.成立$f_n \to f$. 则对于每两个正实数δ和ε，必存在一个集$J \in \mathscr{A}$和一个整数$n_0 \in N$，使$\mu(J')<\varepsilon$，且当$n \geqslant n_0$时，对于一切$x \in J$，都有$|f(x)-f_n(x)|<\delta$.

证 设$E=\{x \in X: f(x)$有限，对于一切$n \in N$，$f_n(x)$有限，$f_n(x) \to f(x)\}$. 根据题设，则有$\mu(E')=0$. 对于每个$m \in N$，命$E_m=\{x \in E$: 对于一切$n \geqslant m$，$|f(x)-f_n(x)|<\delta\}$. 我们有$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$，$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m=E$. 因而$E_1' \supset E_2' \supset \cdots$，$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m'=E'$. 由于$\mu(E_1') \leqslant \mu(X)<\infty$，可见$\lim_{m \to \infty} \mu(E_m')=\mu(E')=0$. 于是可取$n_0 \in N$，使$\mu(E_{n_0}')<\varepsilon$，可命$J=E_{n_0}$. □

(11.31) **定理**(Lebesgue) $(X, \mathscr{A}, \mu)$，f及(f_n)如(11.30)所设. 则依测度$f_n \to f$.

证 任取两个正数δ和ε. 对于每个$n \in N$，命

$$S_n(\delta)=\{x \in X: |f(x)-f_n(x)| \geqslant \delta\}.$$

根据(11.30)，必存在$J \in \mathscr{A}$及$n_0 \in N$，使$\mu(J')<\varepsilon$，且当$n \geqslant n_0$时，对于一切$x \in J$，都有$|f(x)-f_n(x)|<\delta$，这样$n \geqslant n_0$蕴涵$S_n(\delta) \subset J'$. 因而$n \geqslant n_0$蕴涵$\mu(S_n(\delta)) \leqslant \mu(J')<\varepsilon$. 既然$\varepsilon$是任意的，可见$\lim_{n \to \infty} \mu(S_n(\delta))=0$，就是说，依测度$f_n \to f$. □

(11.32) **定理**(Egorov) $(X, \mathscr{A}, \mu)$，f及(f_n)如(11.30)所设. 则对于每个$\varepsilon>0$，必存在一个集$A \in \mathscr{A}$，使$\mu(A')<\varepsilon$，且在A上一致地有$f_n \to f$.

证 取定一正数ε. 根据(11.30)，对于每个$m \in N$，存在$J_m \in \mathscr{A}$，$n_m \in N$，使$\mu(J_m')<\frac{\varepsilon}{2^m}$，且对于一切$x \in J_m$和一切$n \geqslant n_m$，都有$|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{m}$. 规定$A=\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$. 那么$A'=\bigcup_{m=1}^{\infty} J_m'$，从而

$$\mu(A')\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu(J_m')<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^m}=\varepsilon.$$

此外，对于任意$m\in N$，当$n\geqslant n_m$时，有

$$\sup_{x\in A}|f(x)-f_n(x)|\leqslant\sup_{x\in J_m}|f(x)-f_n(x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{m}.$$

于是在A上一致地有$f_n\to f$. □

(11.33) **警告** 定理(11.31)和(11.32)中$\mu(X)<\infty$这一假设是不能去掉的. 例如，若设$X=R$，$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$，$\mu=\lambda$，$f_n=\xi_{[n,n+1]}$及$f=0$，则对于一切$x\in R$，都有$f_n(x)\to f(x)=0$，但是$\lambda(\{x\in R: |f(x)-f_n(x)|\geqslant 1\})=\lambda([n,n+1])=1$不收敛于0，从而$(f_n)$不依测度收敛于$f$. 又设$A\in\mathscr{M}_\lambda$，$\lambda(A')<1$，那么对于每个$n\in N$，必存在$x_n\in A\cap[n, n+1]$，从而$|f(x_n)-f_n(x_n)|=1$，就是说，$(f_n)$在$A$上并不一致收敛于$f$.

本节剩下的部分专门研究可测函数的结构. $(X,\mathscr{A})$照例是一个任意可测空间.

(11.34) **定义** 所谓X上的**简单函数**s，是指仅取有限多个值的函数. 如果$\text{rng}\,s=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，$A_k=\{x\in X: s(x)=\alpha_k\}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，那么显然有$s=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{A_k}$.

(11.35) **定理** 设f是定义在X上的任意一个复值(或广义实值)$\mathscr{A}$可测函数. 则必存在定义在X上的一个有限值、$\mathscr{A}$可测、简单函数序列(s_n)，它满足条件：$|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots$，并且对于每个$x\in X$，有$s_n(x)\to f(x)$. 如果$f$是有界的，则可以选取函数$s_n$，使得上述收敛是一致收敛. 如果$f\geqslant 0$，则还可以选取序列$(s_n)$，使$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant f$.

证 先考虑$f\geqslant 0$的情况. 对于每个$n\in N$，当$1\leqslant k\leqslant n\cdot 2^n$时，命

$$A_{n,k}=\left\{x\in X:\ \frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right\},$$

$$B_n=\{x\in X: f(x)\geqslant n\}.$$

规定

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n}\frac{k-1}{2^n}\xi_{A_{n,k}}(x)+n\xi_{B_n}(x).$$

显而易见，所有集$A_{n,k}$和B_n都在$\mathscr{A}$中，从而每个s_n是$\mathscr{A}$可测的简单函数. 同时不难看出

$$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant f,\quad |s_n|\leqslant n,$$

并且对于一切$x\in B_n'$，都有

$$|f(x)-s_n(x)|<\frac{1}{2^n}.$$

由此可知，对于任意$x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$. 此外，如果存在$\beta\in R$，使$|f|\leqslant\beta$，那么对于一切$n\geqslant\beta$，都有

$$\sup_{x\in X}|f(x)-s_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n};$$

因而，当f有界时，在X上一致地有$s_n\to f$.

其次考虑一般情况. 如果f是广义实值的，则规定$f^+=\max\{f,0\}$，$f^-=-\min\{f,0\}$. 那么$f^+\geqslant 0$，$f^-\geqslant 0$，$f=f^+-f^-$. 如果f是复值的，则可以写成

$$f=f_1-f_2+i(f_3-f_4),$$

其中各个$f_j\geqslant 0$，不论哪一种情况，都可以把上一情况的结果应用于组成f的非负广义实值函数. 证明细节留给读者. □

(11.36) 定理（N.N.Luzin） 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι和$\mathscr{M}_\iota$如§§9,10所设. 假定$E\in\mathscr{M}_\iota$，$\iota(E)<\infty$，f是X上的一个复值$\mathscr{M}_\iota$可测函数，且对于一切$x\in E'$，$f(x)=0$. 则对于每个$\varepsilon>0$，必存在一个函数$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，使得

$$\iota(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon.$$

此外，如果$\|f\|_u<\infty$，则还可以选取g，使$\|g\|_u\leqslant\|f\|_u$.

证 设给定$\varepsilon>0$．利用(9.24)，可取一个开集U，使

$$E\subset U, \iota(U)<\iota(E)+\frac{\varepsilon}{4}.$$

在整个证明过程中固定U.

（Ⅰ） 假设$f=\xi_A$．这时$A\subset E$，A是ι可测的．由于$\iota(A)<\infty$，便可应用(10.30)，找到一个紧集F，使

$$F\subset A,\quad \iota(A\cap F')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

其次利用(9.24)和(6.79)，求得一个具有紧闭包的开集V，使

$$F\subset V\subset U,\quad \iota(V\cap F')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

利用(6.80)，得到一个X到$[0,1]$内的连续函数g，使对于一切$x\in F$,$g(x)=1$，而对于一切$x\in V'$,$g(x)=0$．则有：$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，在U'上$g=0$，$\{x\in X:f(x)\neq g(x)\}\subset(V\cap F')\cup(A\cap F')$．由此可见，

$$\iota(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

从而当$f=\xi_A$时便完成了证明.

（Ⅱ） 其次设f是简单函数，比如说$f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{A_k}$，其中每个$A_k$是$\iota$可测的．不妨假设对于每个$k$，$A_k\subset E$．然后应用（Ⅰ），求得函数$g_k\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，使得在$U'$上$g_k=0$，而且

$$\iota(\{x\in X:\xi_{A_k}(x)\neq g_k(x)\})<\frac{\varepsilon}{n}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

规定$g=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k$．则有：$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$；在$U'$上$g=0$；$\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}\subset\bigcup_{k=1}^{n}\{x\in X:\xi_{A_k}(x)\neq g_k(x)\}$．于是

$$\iota(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon.$$

(Ⅲ) 现在考虑一般情况．应用(11.35)，得到一个$\mathscr{M}_\iota$可测、复值、简单函数序列$(s_n)_{n=1}^{\infty}$，使对于每个$n\in N$，在E'上$s_n=0$，并且对于一切$x\in X$，$s_n(x)\to f(x)$．对于每个$n\in N$，应用(Ⅱ)，得到一个函数$g_n\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，满足：在$U'$上$g_n=0$，并且如果$A_n=\{x\in X: s_n(x)\neq g_n(x)\}$，则$\iota(A_n)<\frac{\varepsilon}{5^n}$．命$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$．显而易见，$A\subset U$，并且

$$\iota(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\iota(A_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{5^n}=\frac{\varepsilon}{4}\ .$$

很清楚，对于一切$x\in A'$和一切$n\in N$，都有$s_n(x)=g_n(x)$．于是，对于一切$x\in A'$，$g_n(x)\to f(x)$．由于$\iota(U\cap A')<\infty$，因此Egorov定理(11.32)表明，必存在一个ι可测集$B\subset U\cap A'$，使$\iota(U\cap A'\cap B')<\frac{\varepsilon}{4}$，并且在$B$上一致地有$g_n\to f$．再利用(10.30)，取紧集$F\subset B$，使$\iota(B\cap F')<\frac{\varepsilon}{4}$．显然，在$F\cup U'$上一致地有$g_n\to f$（忆及在$U'$上$g_n=f=0$）．既然每个$g_n$是连续的，由(7.9)可知$f$在$F\cup U'$上（关于相对拓扑）是连续的．应用Tietze开拓定理(7.40)，对于紧集F及其开超集U，求得函数$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，使对于一切$x\in F\cup U'$，$f(x)=g(x)$．我们得到

$$\begin{aligned}\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}&\subset U\cap F'\\&=A\cup(U\cap A'\cap B')\cup(B\cap F'),\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\iota(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})\\&\quad\leqslant\iota(A)+\iota(U\cap A'\cap B')+\iota(B\cap F')\\&\quad<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.\end{aligned}$$

最后假设$\|f\|_u<\infty$，而$\|g\|_u>\|f\|_u$，当然可能出现这种情

况．这时为了得到要证的结论，可以稍许变更一下 g．命$S=\{z\in K:|z|\leqslant\|f\|_u\}$，$T=\{z\in K:|z|\leqslant\|g\|_u\}$．如下规定一个把 T映满S的映射φ：

$$\varphi(z)=\begin{cases} z, & z\in S, \\ \dfrac{z}{|z|}\cdot\|f\|_u, & z\in T\cap S'. \end{cases}$$

不难看出φ是连续的，并且对于$z\in T\cap S'$，$|\varphi(z)|=\|f\|_u$．现设$h=\varphi\circ g$．那么h是连续的，并且只要$g(x)=0$，就有$h(x)=0$；于是$h\in \mathfrak{C}_{00}(X)$．此外，易见$\|h\|_u=\|f\|_u$，而且$\{x\in X:f(x)\neq h(x)\}\subset\{x\in X:f(x)\neq g(x)\}$．□

(11.37) **习题：可测子集上的测度** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，E是$\mathscr{A}$中的一个集．$\mathscr{A}_E$如(11.22)所设，并设μ_E是μ在$\mathscr{A}_E$上的限制．试证$(E,\mathscr{A}_E,\mu_E)$是一个测度空间．

(11.38) **习题：象集上的测度** (a) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，τ是把X映满集Y的一个映射。设$\mathscr{B}$是Y的适合$\tau^{-1}(B)\in\mathscr{A}$的子集$B$全体所成的集族．对于$B\in\mathscr{B}$，命$\nu(B)=\mu(\tau^{-1}(B))$．试证$(Y,\mathscr{B},\nu)$是一个测度空间．

(b) 叙述并证明(a)的关于外测度的类似命题．

(11.39) **习题：不可测子集上的测度** (a) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，Y是X的一个子集，它满足条件：如果$B\subset Y'$，$B\in\mathscr{A}$，那么$\mu(B)=0$．对于$M\in\mathscr{A}$，命$\mathscr{A}^\dagger$是所有集$Y\cap M$所成的集族．对于$M^\dagger\in\mathscr{A}^\dagger$，规定$\mu^\dagger(M^\dagger)$为$\mu(M)$，其中$M\in\mathscr{A}$为适合$Y\cap M=M^\dagger$的一个任意集．试证$\mu^\dagger$是完全确定的，$\mathscr{A}^\dagger$是$Y$的子集所成的一个$\sigma$代数，$(Y,\mathscr{A}^\dagger,\mu^\dagger)$则为一个测度空间．

(b) 考虑测度空间$(R,\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$，试求$R$的一个子集$Y$，它不是$\lambda$可测的，并且满足(a)小题的条件．〔提示．利用如(10.54.b)所构造的集B．〕

(c) 试证：$[0,1]$包含一个子集D，它可以有$\mathscr{B}(D)$上的一个测度μ，满足条件：(i)$\mu(D)=1$；(ii)对于一切紧集$F\subset D$，$\mu(F)=0$；

(iii)对于一切$Y\in\mathscr{B}(D)$，$\mu(Y)=\inf\{\mu(U):U$关于D的拓扑是开集，$U\supset Y\}$. 这就是说，$(D, \mathscr{B}(D), \mu)$虽然是"外"正则的，但却是非正则的.〔提示. 构造$[0,1]$的一个子集D，使对于任意不可数闭集$F\subset[0,1]$，都有$D\cap F\neq\varnothing\neq D'\cap F$；参见(10.54.b). 那么$D$是非$\lambda$可测的，从而$0<\lambda(D)\leqslant 1$. 设$X$是$G_\delta$集，且$D\subset X\subset[0,1]$，$\lambda(X)=\lambda(D)$. 那么$X\cap D'$的每个可测子集都具有$\lambda$测度0，正如(a)小题，则不妨取$\mu$为$(\frac{1}{\lambda(D)}\lambda)^\dagger$. 对于$\mu$所提出的条件是容易证实的. 把这一结果与(10.58)作比较.〕.

(11.40) 习题：开拓一个测度 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间. 又设$\mathscr{S}$是$\mathscr{P}(X)$的一个子族，它满足：

(i) $P\in\mathscr{S}\cap\mathscr{A}$蕴涵$\mu(P)=0$；

(ii) $P_1, P_2, P_3,\cdots\in\mathscr{S}$蕴涵$\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\in\mathscr{S}$.

设$\mathscr{A}^*$是X的合于以下条件的子集A^*全体所成的集族：对于某个$A\in\mathscr{A}$，对称差$A^*\triangle A$属于$\mathscr{S}$. 对于这样的一个集A^*，命$\mu^*(A^*)=\mu(A)$.

(a) 试证：$\mathscr{A}^*$是X的子集所成的一个σ代数.

(b) 试证：μ^*在$\mathscr{A}^*$上是完全确定的，且$(X,\mathscr{A}^*,\mu^*)$是一个测度空间.

(c) 试问：在什么意义下，$(X, \mathscr{A}^*, \mu^*)$是$(X, \mathscr{A}, \mu)$的开拓？

(d) 试求：要使$(X, \mathscr{A}^*, \mu^*)$成为一个完全测度空间，$\mathscr{S}$所应满足的简单的充要条件. 并证明您的断言！

(11.41) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个有限测度空间，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是X上的一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数序列. 假定对于μ几乎所有$x\in X$，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，其中$f$既是广义实值的又是$\mathscr{A}$可测的. 规定$\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$. 然后考虑函数$\operatorname{arctg}\circ f_n$及$\operatorname{arctg}\circ f$. 试阐述并证明Egorov定理(11,32)——除去

在测度为任意小的集上之外，f_n一致收敛到 f ——的类似命题.

(11.42) **习题** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个σ有限测度空间，f 和(f_n)都是μ-a.e.定义在X上的$\mathscr{A}$可测复值函数. 假定在X上μ-a.e.成立$f_n\to f$. 试证：必存在一个集$H\in\mathscr{A}$和一个集族$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$，使$X=H\cup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$\mu(H)=0$，而且在每个$E_k$上一致地有$f_n\to f$.〔利用Egorov定理(11.32).〕

(11.43) **习题** (a) 试求一个序列$(f_n)\subset\mathfrak{C}^r([0,1])$和一个实值函数$f$，使对于一切$x\in[0,1]$，$f_n(x)\to f(x)$，但在$[0,1]$的任何子区间上都不一致地有$f_n\to f$.〔使$f$在一个稠密集上成为间断函数.〕

(b) 试利用(a)中所构造的序列证明：(11.42)的结论对于测度空间$([0,1], \mathscr{P}([0,1]), \nu)$不成立，其中$\nu$是$[0,1]$上的计数测度(10.4.a).〔证明各个$E_k$都可看作闭集，并应用Baire范畴定理(6.54).〕

(c) 试证：有一个序列$(f_n)\subset\mathfrak{C}^r([0,1])$，它满足：对于任意$x\in[0,1]$，$f_n\to 0$，但在$[0,1]$的任何子区间上都不一致地有$f_n\to 0$.〔对于每个$n\in N$，设$F_n$是$]0,1]$中所有这样的数所成的集，即对于整数k和整数$m\in\{0,1,\cdots,n\}$，这些数具有$\dfrac{k}{2^m}$的形状. 设在$F_n$上$f_n$为零. 对于$\dfrac{k}{2^m}\in F_n$（其中k为奇数），命$f_n\left(\dfrac{k}{2^m}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{1}{2^m}$. 设$f_n$在$[0,1]$的所有子区间中是线性的，这里它尚未定义.〕

(11.44) **习题** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι是如§9所定义的X上的一个测度. 假定f是X上的一个复值$\mathscr{M}_\iota$可测函数，使得$\{x\in X: f(x)\neq 0\}$关于ι为σ有限. 试证：X上必存在一个Borel可测函数g，适合$|g|\leqslant|f|$，并且$\iota(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\})=0$.〔利用(11.35)，(10.34).〕

(11.45) **习题** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个有限测度空间，假定f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$都是X上的$\mathscr{A}$可测复值函数. 试证：依测度$f_n\to f$的充

要条件是(f_n)的每个子序列都有μ-a.e.收敛于 f 的一个子序列.

(11.46) **习题** 设X是一个拓扑空间，X上的复值函数族$\mathfrak{C}$所谓对于点态极限运算是封闭的，是指只要f是X上的一个复值函数，并且就某个序列$(f_n)\subset\mathfrak{C}$而言，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$对于所有$x\in X$都成立，那么必有$f\in\mathfrak{C}$. **$X$上的Baire函数**全体所成的族$\mathfrak{R}(X)$定义为满足以下条件的$X$上所有复值函数族$\mathfrak{C}$全体之交：$\mathfrak{C}$含有$X$上的所有复值连续函数，而且$\mathfrak{C}$对于点态极限运算是封闭的. 应当注意，$K^X$正是这样的一类$\mathfrak{C}$.

(a) 试证：凡Baire函数都是Borel可测的.

设$\mathfrak{R}_0$是X上的复值连续函数全体所成的集.如果α是一个序数，且$0<\alpha<\Omega$〔参看(4.49)〕，则规定$\mathfrak{R}_\alpha$为满足以下条件的函数f全体所成的族：f是某个序列$(f_n)\subset\bigcup\{\mathfrak{R}_\beta:\beta$是一个序数,$\beta<\alpha\}$的点态极限. $\mathfrak{R}_\alpha$中的函数统称为**α型Baire函数**.

(b) 试证：$\mathfrak{R}(X)=\bigcup\limits_{\alpha<\Omega}\mathfrak{R}_\alpha$〔参阅(10.23)的证明〕.

(c) 试证：如果f,g都是Baire函数，那么$f+g$, fg, $|f|$也都是Baire函数；如果f, g都是实值Baire函数，那么$\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$也都是实值Baire函数〔利用(b)以及超限归纳法〕.

设$\mathscr{B}_0(X)$是含有形如$\{x\in X: f(x)=0\}$的一切集的X的子集所成的最小σ代数，其中f是X上的连续复值函数. $\mathscr{B}_0(X)$中的集叫做**X的Baire集**.

(d) 试证：$f\in\mathfrak{R}(X)$的充要条件是f为X上的复值函数，并且f是$\mathscr{B}_0(X)$可测的.〔证充分性语句时，先证$\{E\subset X:\xi_E\in\mathfrak{R}(X)\}=\mathscr{B}_0(X)$，然后利用(11.35). 至于必要性语句，可利用(b)以及超限归纳法.〕

(e) 试证：如果X是一个度量空间，那么$\mathscr{B}_0(X)=\mathscr{B}(X)$〔利用(6.86)〕.

§ 12 抽象Lebesgue积分

就全书而言，这或许是最最重要的一节. 本节，我们在任意测度空间上来构造Lebesgue积分，并研究其值得注意的一些性质. 结果是，当测度空间为 $(X, \mathscr{M}_{\iota}, \iota)$ 时，该积分等于一切非负可测函数的泛函 $\overline{\overline{I}}$.

本节除非作进一步的明确规定，$(X, \mathscr{A}, \mu)$ 始终表示一个任意的测度空间. 记号 $\mathfrak{S}$ 表示 X 上简单的、$\mathscr{A}$ 可测、复值或广义实值函数全体；$\mathfrak{S}^+$ 则仍然指 $\mathfrak{S}$ 中非负函数全体所成的集.

(12.1) **定义** 所谓 X **的可测剖分**，是指满足以下条件的任意一个有限集族 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}\subset\mathscr{A}$：它是两两不相交的，并且 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.

(12.2) **定义** 设 f 是 X 到 $[0, \infty]$ 内的任意一个函数. 规定

$$L(f)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\inf\{f(x): x\in A_k\}\mu(A_k): \{A_1,\cdots,A_n\}\right.$$
$$\text{是}X\text{的一个可测剖分}\Big\}.$$

由于一个或多个 A_k 可以为 $\varnothing$，因此必须规定 $\inf\varnothing$ 才行：为了方便起见，命 $\inf\varnothing = 0$.

设 f 是一个广义实值函数，则规定〔正如(11.35)〕

$$f^+=\max\{f, 0\},\quad f^-=-\min\{f, 0\}.$$

注意，$f^+\geqslant 0$，$f^-\geqslant 0$，$f=f^+-f^-$. 假如 $L(f^+)$ 和 $L(f^-)$ 这两个数中至少有一个是有限数，则规定

$$L(f)=L(f^+)-L(f^-).$$

如果 $L(f^+)=L(f^-)=\infty$，这时 $L(f)$ 没有定义，数 $L(f)$（有定义时）称为 f **的Lebesgue积分**（或简称为 f **的积分**）.

(12.3) **例**

(a) 如果 $\alpha\in R^*$，并且对于任意 $x\in X$，$f(x)=\alpha$，那么 $L(f)=$

$\alpha\mu(X)$.

(b) 如果对于$x\in E$，$f(x)=\infty$，并且$\mu(E)>0$，那么$L(f)=\infty$（有定义时）.

(c) 如果$X=[0,1]$，$\mu=\lambda$，f在$[0,1]$上非负并 Riemann 可积，那么$L(f)\geqslant S(f;[0,1])$. 这个不等式差不多是显然的：f的每个Darboux下和小于或等于以$L(f)$为上确界的若干数中的一个. [实际上，成立等式$L(f)=S(f;[0,1])$：见下文(12.51.f).]

(12.4) 定理 设$f\in\mathfrak{S}^+$，比如说$f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{E_k}$，其中各个$E_k$都属于$\mathscr{A}$，而且两两不相交. 则$L(f)$存在，并且

$$L(f)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k).$$

证 不妨假设两两不相交族$\{E_k\}_{k=1}^{n}$覆盖X. 由于$\inf\{f(x):x\in E_k\}=\alpha_k$，便有

$$L(f)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k).$$

其次设$\{B_j\}_{j=1}^{m}$是X的一个任意的可测剖分. 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\inf\{f(x):x\in B_j\}\mu(B_j)\\
&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\inf\{f(x):x\in B_j\}\mu(E_k\cap B_j)\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\inf\{f(x):x\in E_k\cap B_j\}\mu(E_k\cap B_j)\\
&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k\cap B_j)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k).
\end{aligned}$$

这样，我们又得到$L(f)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k)$，所以$L(f)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k)$. □

(12.5) **定理** 设f，g是X上任意两个非负函数，如果对于所有$x\in X$，$f(x)\leqslant g(x)$，则$L(f)\leqslant L(g)$.

证 显然.

(12.6) **定理** 设f是一个非负可测函数. 如果$\mu(\{x\in X:f(x)>0\})$为正数，则$L(f)$也为正数.

证 我们要寻求一个集$A\in\mathscr{A}$和一个正数α，满足：$\mu(A)>0$，并且对于任意$x\in A$，都有$f(x)\geqslant\alpha$. 如果找到了这样的A，α，由此便得

$$
\begin{aligned}
L(f)&\geqslant\inf\{f(x):x\in A\}\mu(A)+\inf\{f(x):x\in A'\}\mu(A')\\
&\geqslant\alpha\mu(A)>0.
\end{aligned}
$$

对于每个正整数n，命$A_n=\left\{x\in X:f(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$. 则有

$$
A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots,\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\in X:f(x)>0\}.
$$

根据(10.13)以及假设，得到

$$
\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)>0.
$$

所以必存在一个正整数n_0，满足$\mu(A_{n_0})>0$，并且在A_{n_0}上$f(x)\geqslant\frac{1}{n_0}$. □

(12.7) **定理** 设f，g属于$\mathfrak{S}^+$. 则成立等式

$$
L(f+g)=L(f)+L(g).
$$

证 记 $f=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\xi_{A_j}$，$g=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_{B_k}$，其中$\bigcup_{j=1}^{m}A_j=\bigcup_{k=1}^{n}B_k=X$，那么

$$f+g=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_j+\beta_k)\xi_{(A_j\cap B_k)}.$$

这样，根据(12.4)便得到

$$\begin{aligned}L(f+g)&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_j+\beta_k)\mu(A_j\cap B_k)\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\mu(A_j\cap B_k)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_k\mu(A_j\cap B_k)\\&=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\mu\left(A_j\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\right)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\mu\left(B_k\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}A_j\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\mu(A_j)+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\mu(B_k)\\&=L(f)+L(g).\end{aligned}$$ □

(12.8) **定理** 设$f\geqslant 0$，$t\in R$，则成立等式

$$L(tf)=tL(f).$$

易证，证明从略.

我们紧接着要建立一个极为重要的恒等式，即对于所有非负$\mathscr{A}$可测函数序列(f_n)而言，恒成立

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}L(f_n).$$

先证明一个引理.

(12.9) **引理** 设f是X上任意一个广义实值函数，假定$E=\{x\in X:f(x)\neq 0\}$是一个$\mathscr{A}$可测集. 又$\mathscr{A}_E$，μ_E如(11.22)，(11.37)

所设. 如果$L(f)$存在，则必有$L(f)=L_E(f)$，其中L_E是对于测度空间$(E, \mathscr{A}_E, \mu_E)$而言的积分.

证 先假定$f\geqslant 0$，并设γ是适合$\gamma<L(f)$的任意实数. 那么必存在X的一个可测剖分$\{A_1, \cdots, A_m\}$，满足不等式

$$\gamma<\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in A_k\}\mu(A_k).$$

利用E属于$\mathscr{A}$这一事实，便有

$$\begin{aligned}\gamma&<\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in A_k\}\mu(A_k\cap E)\\&\quad+\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in A_k\}\mu(A_k\cap E')\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in A_k\cap E\}\mu(A_k\cap E)\\&\leqslant L_E(f).\end{aligned}$$

(这里要注意$A_k\cap E'\neq\varnothing$蕴涵$\inf\{f(x): x\in A_k\}=0$.)由此可见，$L(f)\leqslant L_E(f)$.

又设$\gamma<L_E(f)$，而$\{B_k\}_{k=1}^{m}$是E的适合以下条件的任意一个可测剖分：

$$\gamma<\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in B_k\}\mu(B_k).$$

则得到

$$\gamma<\sum_{k=1}^{m}\inf\{f(x): x\in B_k\}\mu(B_k)+0\cdot\mu(E')\leqslant L(f),$$

从而得到$L_E(f)\leqslant L(f)$. 由此当f为任意函数的情况时，则直接得出断言. □

以下结果并不有损于科学的系统性，恰恰相反，它乃是证明L具有可数加性的关键.

(12.10) **定理** 设$(g_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{S}^+$中任意一个非减序列，假定$h \in \mathfrak{S}^+$，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n \geqslant h$. 则有$\lim\limits_{n\to\infty} L(g_n) \geqslant L(h)$.

证 当$\mu(X)=0$时，定理显然. 因此始终假设$0<\mu(X)\leqslant\infty$. 命$h=\gamma_1\xi_{E_1}+\gamma_2\xi_{E_2}+\cdots+\gamma_m\xi_{E_m}$，式中各个$E_k$两两不相交，$X=\bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$①，$0\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_m\leqslant\infty$. 假设$\gamma_1=0$；那么根据(12.9)，便有$L(h)=L_{E_1'}(h)$.

如果假定当$\gamma_1>0$时定理是正确的，并用E_1'代替X，便得到

$$L(h)=L_{E_1'}(h)\leqslant\lim_{n\to\infty} L_{E_1'}(g_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} L(g_n).$$

这样，只要证当$\gamma_1>0$时定理成立就行了.

第一种情况：$\mu(X)$，γ_m都是有限的. 任给$\delta>0$，取$\varepsilon>0$，满足不等式

$$\varepsilon\leqslant\min\left\{\frac{\delta}{2\mu(X)},\ \gamma_1\right\}.$$

对于每个正整数n，命$S_n=\{x\in X: g_n(x)>h(x)-\varepsilon\}$. 既然$\lim\limits_{n\to\infty} g_n\geqslant h$，便有$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. 因为序列$(g_n)$非减，所以序列$S_1$，$S_2$，…也非减. 根据这些事实以及$\mu$的可数加性，由(10.13)便看出

$$\lim_{n\to\infty}\mu(S_n)=\mu(X)$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\mu(S_n')=0.②$$

还有$L(g_n)\geqslant L(g_n\xi_{S_n})\geqslant L((h-\varepsilon)\xi_{S_n})=L(h\xi_{S_n})-\varepsilon L(\xi_{S_n})$. 而关系式$h=h\xi_{S_n}+h\xi_{S_n'}\leqslant h\xi_{S_n}+\gamma_m\xi_{S_n'}$蕴涵$L(h)\leqslant L(h\xi_{S_n})+\gamma_m\mu(S_n')$.

---

①这里似应假定$\{E_1, \cdots, E_m\}\subset\mathscr{A}$. ——译者注

②μ的可数加性在第一种情况里仅用来建立这一关系式. 然而，可数加性却是必不可少的；倘若μ是有限加性的但非可数加性的，本定理就不成立了.

由此

$$L(g_n)\geqslant L(h)-\gamma_m\mu(S_n')-\varepsilon\mu(S_n)$$
$$\geqslant L(h)-\gamma_m\mu(S_n')-\varepsilon\mu(X)$$
$$\geqslant L(h)-\gamma_m\mu(S_n')-\frac{1}{2}\delta.$$

如果n充分大，使$\gamma_m\mu(S_n')<\dfrac{\delta}{2}$，则有$L(g_n)>L(h)-\delta$. 既然$\delta$是任意的，可见不等式$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(g_n)\geqslant L(h)$成立.

第二种情况：γ_m是有限的，$\mu(X)=\infty$. 这时显然有$L(h)\geqslant\gamma_1\mu(X)=\infty$. 设$\varepsilon$为适合$0<\varepsilon<\gamma_1$的任意数，对于$n\in N$，正如第一种情况那样规定$S_n$. 设$x\in S_n$，则

$$g_n(x)>h(x)-\varepsilon\geqslant\gamma_1-\varepsilon.$$

因此关系式

$$L(g_n)\geqslant L(g_n\xi_{S_n})\geqslant L((\gamma_1-\varepsilon)\xi_{S_n})=(\gamma_1-\varepsilon)\mu(S_n)$$

成立，于是由(10.13)推知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(g_n)\geqslant(\gamma_1-\varepsilon)\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(S_n)=(\gamma_1-\varepsilon)(\infty)=\infty=L(h).$$

第三种情况：$\mu(E_m)$为正，$\gamma_m=\infty$. 这时有$L(h)\geqslant\gamma_m\mu(E_m)=\infty$. 取任意实数$\gamma>\gamma_{m-1}$，命

$$h_\gamma=\gamma_1\xi_{E_1}+\cdots+\gamma_{m-1}\xi_{E_{m-1}}+\gamma\xi_{E_m}.$$

由前两种情况得到

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(g_n)\geqslant L(h_\gamma)\geqslant\gamma\mu(E_m).$$

由于γ可以取得任意地大，可见

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(g_n)=\infty=L(h).$$

第四种情况：$\gamma_m=\infty,\mu(E_m)=0$. 这时有$L(h)=\sum_{j=1}^{m-1}\gamma_j\mu(E_j)$. 命$B=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_{m-1}$. 则

$$g_n\geqslant g_n\xi_B,\quad \underline{\lim}_{n\to\infty}g_n\xi_B\geqslant h\xi_B=\sum_{j=1}^{m-1}\gamma_j\xi_{E_j}.$$

既然$\gamma_{m-1}<\infty$，就可以对（$g_n\xi_B$）和$h\xi_B$应用第一种或第二种情况的结果，因此得到

$$\lim_{n\to\infty} L(g_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}L(g_n\xi_B)\geqslant L(h\xi_B)=L(h). \qquad \square$$

(12.11) **定理** 设(g_n)是$\mathfrak{S}_l^+$中一个非减函数序列. 则有

$$\lim_{n\to\infty}L(g_n)=L(\lim_{n\to\infty}g_n).$$

证 命$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=\varphi$，设$\gamma$是满足$\gamma<L(\varphi)$的任意实数. 那么必存在$X$的一个可测剖分$\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，使

$$\gamma<\sum_{k=1}^{m}\inf\{\varphi(x):x\in A_k\}\mu(A_k)$$

$$=L\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\xi_{A_k}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}L(g_n),$$

式中$\alpha_k=\inf\{\varphi(x):x\in A_k\}$. 这里利用了(12.10). 既然$\gamma$是任意的，所以得到$L(\varphi)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}L(g_n)$. 反向不等式可直接求得. $\square$

(12.12) **定理** 设f，g是两个非负$\mathscr{A}$可测函数. 则

$$L(f+g)=L(f)+L(g).$$

证 设(f_n)，(g_n)是两个非减的非负简单函数序列，并分别有极限f，g(11.35). 因为序列（f_n+g_n）递增地趋向于$f+g$，所以根据(12.11)以及L关于非负简单函数的加性(12.7)，便得到

$$L(f)+L(g)=\lim_{n\to\infty}L(f_n)+\lim_{n\to\infty}L(g_n)=\lim_{n\to\infty}L(f_n+g_n)$$
$$=L(f+g). \qquad \square$$

(12.13) **定理** 设f是X上一个非负$\mathscr{A}$可测函数. 则$L(f)=0$的充要条件是$f=0$ μ-a.e.

证 命$E=\{x\in X:f(x)>0\}$. 如果$L(f)=0$，那么由(12.6)知道$\mu(E)=0$，也就是$f=0$ a.e.反过来，假定$\mu(E)=0$. 则

$$0\leqslant L(f)\leqslant L(\infty\cdot\xi_E)=\infty\cdot\mu(E)=0. \qquad \square$$

(12.14) **定理** 设f，g是X上两个$\mathscr{A}$可测、广义实值函数，适合$f=g$ μ-a. e.，且$L(f)$有定义. 则$L(g)$也有定义，而且$L(g)=$

$L(f)$.

证 命$E=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}$，根据题设，$\mu(E)=0$.

第一种情况：$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$. 应用(12.12)及(12.13)，得到

$$L(f)=L(f\xi_E)+L(f\xi_{E'})=L(f\xi_{E'})=L(g\xi_{E'})$$
$$=L(g\xi_E)+L(g\xi_{E'})=L(g).$$

第二种情况，即一般情况. 对于使$f(x)=g(x)$的$x\in X$，有$f^+(x)=\max\{f(x),\ 0\}=\max\{g(x),\ 0\}=g^+(x)$，$g^-(x)=-\min\{g(x),\ 0\}=-\min\{f(x),\ 0\}=f^-(x)$. 因而

$$\{x\in X: f^+(x)\neq g^+(x)\}\cup\{x\in X: f^-(x)\neq g^-(x)\}\subset E,$$

从而$f^+=g^+$a.e.，$f^-=g^-$a.e.应用两次前一情况的结果，便得出结论

$$L(f)=L(f^+)-L(f^-)=L(g^+)-L(g^-)=L(g). \quad \square$$

(12.15) **定理** 设f是定义在X上的一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数，并假定$L(f)$有定义且有限. 则

$$\mu(\{x\in X: f(x)=\pm\infty\})=0,$$

也就是f是μ-a.e.有限的.

证 命$A=\{x\in X: f(x)=\infty\}$，$B=\{x\in X: f(x)=-\infty\}$. 根据$L$的定义，得到

$$\infty\cdot\mu(A)+\inf\{f^+(x): x\in A'\}\mu(A')\leqslant L(f^+)<\infty,$$
$$\infty\cdot\mu(B)+\inf\{f^-(x): x\in B'\}\mu(B')\leqslant L(f^-)<\infty.$$

由此可见，$\mu(A)=\mu(B)=0$. $\square$

(12.16) **评注** 设f是定义在X上的一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数，E是$\mathscr{A}$中的任意集，α是任意广义实数. 又设f_1是X上的这样的函数，即

$$\text{(i)}\qquad f_1(x)=\begin{cases}\alpha, & x\in E,\\ f(x), & x\in E'.\end{cases}$$

由(11.2)，f_1显然是$\mathscr{A}$可测的. 如果$\mu(E)=0$，$L(f)$有定义，那么(12.14)表明$L(f_1)$也有定义，而且$L(f_1)=L(f)$.如果$L(f)$有限，则可以利用(12.15)，并假定（比如说）(i)中的数值$\alpha=0$，这时

用有限值函数f_1来代替f，这里f_1与f几乎处处相等，并且和f具有相同积分值．这样一来，在论述具有有限积分的$\mathscr{A}$可测函数时，就不妨假定这些函数都是有限值的．此外，在不少问题里，考虑只是几乎处处有定义的函数，还是很合乎需要的．由此引出以下定义．

(12.17) **定义** 设E是$\mathscr{A}$中一个集，且$\mu(E')=0$，$\mathscr{A}_E$如(11.37)所设，f是定义在E上的一个$\mathscr{A}_E$可测、广义实值函数．又设f_0是X上适合以下条件的任意一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数：当$x\in E$时，$f_0(x)=f(x)$（而当$x\in E'$时，例如$f_0(x)=0$）．如$L(f_0)$有定义，则命$L(f)=L(f_0)$，如$L(f_0)$无定义，也就让$L(f)$无定义好了．[由(12.14)直接看出，按照刚才所作的规定，$L(f)$是唯一确定的．] 我们在后文将常常遇到这样的函数，即它们如上所述仅定义在集E上，而且是$\mathscr{A}_E$可测的．为了避免乏味的重复，我们就干脆称这种函数是$\mathscr{A}$可测的——虽然事实并非如此，只要感到方便，我们总认为这些函数已开拓成在整个X上是$\mathscr{A}$可测的．

我们现在引进一类极为重要的函数空间．

(12.18) **定义** 规定$\mathfrak{L}_1^r(X, \mathscr{A}, \mu)$为满足下列条件的函数$f$全体所成的集：

(i) f是μ-a.e.定义在X上的；

(ii) f是$\mathscr{A}$可测实值函数；

(iii) $L(f)$存在且有限．

如果不致产生混淆，就把$\mathfrak{L}_1^r(X, \mathscr{A}, \mu)$写成$\mathfrak{L}_1^r$.

泛函L通常写成积分形式：

$$L(f)=\int_X f(x)d\mu(x)=\int_X f(t)d\mu(t)=\int_X f\,d\mu$$

$$=\int f\,d\mu.$$

论述$\mathscr{A}$可测函数时，我们就采用这一积分记法．在$X=[a, b]$，$\mu=\lambda$的情况下，则把$\int_{[a,b]} f d\lambda$写成$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b f(t)dt$等．记号

$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，$\int_{a}^{\infty}f(x)dx$，$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$等的意义是不言自明的。

(12.19) **定理** 设$f\in\mathfrak{L}_1^r$，$f=f_1-f_2$，其中$f_1\geqslant 0$，$f_2\geqslant 0$，且f_1，$f_2\in\mathfrak{L}_1^r$，则

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f_1 d\mu-\int_X f_2 d\mu.$$

证 根据定义得到

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+ d\mu-\int_X f^- d\mu.$$

由于$f_1-f_2=f^+-f^-$，便有$f_1+f^-=f^++f_2$.从这一等式以及(12.12)推出

$$\int_X f_1 d\mu+\int_X f^- d\mu=\int_X f^+ d\mu+\int_X f_2 d\mu. \qquad \square$$

(12.20) **定理** 设f，$g\in\mathfrak{L}_1^r$，α，$\beta\in R$，则

$$\int_X (\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu.$$

就是说，映射$f\to\int_X f d\mu$乃是$\mathfrak{L}_1^r$上一个线性泛函.

证明很简单，从略.

(12.21) **定理**(Lebesgue) 设(f_n)是X上一个非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数序列. 则

$$\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right)d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\int_X f_j d\mu.$$

证 对于任意正整数m，都成立

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j\geqslant\sum_{j=1}^{m} f_j;$$

因之

$$\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right)d\mu\geqslant\int_X\left(\sum_{j=1}^{m} f_j\right)d\mu=\sum_{j=1}^{m}\int_X f_j d\mu,$$

从而

$$\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right)d\mu \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j d\mu.$$

对于任意正整数n，设$(s_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$是$\mathfrak{S}^+$中一个非减函数序列，其极限为$f_n$. 对于$k\in N$，命

$$g_k = s_1^{(k)} + s_2^{(k)} + \cdots + s_k^{(k)}.$$

那么序列$(g_k)_{k=1}^{\infty}$显然非减. 当$m\leqslant k$时，则有

$$s_1^{(k)} + s_2^{(k)} + \cdots + s_m^{(k)} \leqslant g_k \leqslant f_1 + \cdots + f_k \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

关于k取极限，则对于每个m，得出

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_m \leqslant \lim_{k\to\infty} g_k \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

关于m取极限，得到

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

再由(12.11)可推知

$$\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right)d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k d\mu$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\int_X (f_1 + f_2 + \cdots + f_k)d\mu$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\int_X f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\int_X f_j d\mu. \quad \square$$

(12.22) **B.Levi定理** 设$(f_k)_{k=1}^{\infty}$是X上一个非减、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数序列，并且对于某个k，有$\int_X f_k^- d\mu<\infty$. 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X (\lim_{k\to\infty} f_k)d\mu.$$

证 不失一般性，不妨假定$\int_X f_1^- d\mu<\infty$，而鉴于(12.16)，还不妨假定f_k不取值$-\infty$. 如果任意一个$\int_X f_k d\mu$等于∞，那么结论是显然的. 设若不然，对于$k\in N$，规定

$$g_k(x)=\begin{cases} f_{k+1}(x)-f_k(x), & \text{当 } f_k(x)<\infty, \\ \infty, & \text{其余}. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty}\left(f_1+\sum_{k=1}^{n-1} g_k\right)=f_1+\sum_{k=1}^{\infty} g_k,$$

从而由(12.21)及(12.19)，便推出

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)d\mu=\int_X f_1 d\mu+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_X f_{k+1}d\mu-\int_X f_k d\mu\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu. \quad \square$$

(12.23) Fatou引理 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是X上一个非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数序列. 则

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

证 对于每个正整数k，命

$$g_k=\inf\{f_k,f_{k+1},\cdots\}.$$

很明显，g_k是$\mathscr{A}$可测的，(g_k)非减，$g_k\leqslant f_k$. 因为$(g_k)_{k=1}^{\infty}$满足(12.22)的假设条件，所以得到

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu=\int_X \lim_{k\to\infty} g_k d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_X g_k d\mu$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu. \quad \square$$

(12.24) Lebesgue控制收敛定理 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是a.e.定义在X上的一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数序列，并假定有一个函数$s\in\mathfrak{L}_1^+$

使对于每个n，在X上a.e.成立不等式

$$|f_n(x)|\leqslant s(x).$$

则

(i) $$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

(ii) $$\int_X \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

如果对于μ几乎所有的$x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$存在，并且

(iii) $$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

证 显而易见，一切f_n都属于$\mathfrak{L}_1^r$. 所以一切f_n以及s在X上都是a.e.有限的. 命

$A=\{x\in X$: 对于某个$n\in N$，$f_n(x)$为$\pm\infty$或$|f_n(x)|>s(x)\}$，

$B=\{x\in X$: 对于某个$n\in N$，$f_n(x)$无定义$\}$，

$C=\{x\in X$: $s(x)$无限或无定义$\}$.

在$A\cup B\cup C$上，命$f_n(x)=s(x)=0$. 鉴于$\mu(A\cup B\cup C)=0$，那么(12.14)表明，定理陈述中所出现的积分都不会因这一规定而有所改变. 此外，对于一切$n\in N$和一切$x\in X$，都有$|f_n(x)|\leqslant s(x)<\infty$.

因为序列$(s+f_n)_{n=1}^{\infty}$是由非负函数组成的，所以应用Fatou引理(12.23)，便得到

$$\int_X s d\mu+\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu=\int_X \left[\underline{\lim}_{n\to\infty}(s+f_n)\right]d\mu$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X (s+f_n)d\mu$$

$$=\int_X s d\mu+\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

这样，(i)式成立．[读者应注意，(i)中的函数$\varliminf_{n\to\infty} f_n$仅是a.e.有定义的，但正如证明中所说，它a.e.等于这样一个函数$\varliminf_{n\to\infty} f_n$，即这里$f_n$却是处处有定义的．]如果从序列$(s-f_n)_{n=1}^{\infty}$着手，并利用等式$\varlimsup_{n\to\infty}\alpha_n=-\varliminf_{n\to\infty}(-\alpha_n)$，那么同样可证(ii)式.

最后，当在X上$\lim_{n\to\infty} f_n$ a.e.存在时，由(i)和(ii)则可推出

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\geqslant\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

所以$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$必存在，从而(iii)式成立．□

(12.25) **注意** 以上定理中存在控制函数s这一条件是至为重要的．倘若这种函数不存在，结论可能不真．例如，设$X=R$，$\mu=\lambda$，$f_n=n\xi_{]0,\frac{1}{n}]}$．则对于一切$n\in N$，$\int_R f_n d\lambda=n\cdot\dfrac{1}{n}=1$，而对于一切$x\in R$，却有$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$．就是说

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f_n d\lambda=1\neq 0=\int_R \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda.$$

以下我们把所研究的积分开拓到复值函数上去.

(12.26) **定义** 设$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$（或简写成$\mathfrak{L}_1$）表示合于以下条件的函数$f$全体所成的集：$f$是$\mu$-a.e.定义在$X$上的复值函数，$\mathrm{Re}\, f\in\mathfrak{L}_1^r$，$\mathrm{Im} f\in\mathfrak{L}_1^r$．对于$f\in\mathfrak{L}_1$，规定

$$\int_X f d\mu=\int_X \mathrm{Re}\, f\, d\mu+i\int_X \mathrm{Im}\, f\, d\mu.$$

$\mathfrak{L}_1$中的函数有时称为**可积函数**或**可和函数**.

(12.27) **定理** 设f，$g\in\mathfrak{L}_1$，α，$\beta\in K$，则$\alpha f+\beta g\in\mathfrak{L}_1$，并且

$$\int_X(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X f\, d\mu+\beta\int_X g d\mu,$$

换句话说，$\mathfrak{L}_1$乃是一个复线性空间，而$\int_X \cdots d\mu$则是$\mathfrak{L}_1$上一个线性泛函。

通过考虑实部和虚部，并应用上述一些结果，可立即得出本定理。

(12.28) **定理** 设f是X上一个复值$\mathscr{A}$可测函数．则

(i) $f\in\mathfrak{L}_1$的充要条件是$|f|\in\mathfrak{L}_1$，

(ii) 如果$f\in\mathfrak{L}_1$，那么$\left|\int_X f\,d\mu\right|\leqslant\int_X |f|\,d\mu$.

证 由不等式

$$|f|\leqslant|\mathrm{Re}\, f|+|\mathrm{Im}\, f|\leqslant 2|f|$$

以及对于实值函数g成立$|g|=g^{+}+g^{-}$这一事实，可直接推出结论(i)．证明(ii)时无非是重复(9.4)的论证． □

(12.29) **注意** 为了得到不等式$\left|\int_X f d\mu\right|\leqslant\int_X |f|\,d\mu$中等号成立的充要条件，试考察$h\in\mathfrak{L}_1$．这就是要问：等式

$$\left|\int h d\mu\right| \int |h|\,d\mu$$

何时成立．显然，只要有$h=\exp(i\alpha)|h|$（这里α是任意实数）就够了．现在我们证明这个条件也是必要的．为此，假设对于实数β，有

$$\int h d\mu=\exp(i\beta)\int |h|\,d\mu,$$

并规定

$$\varphi=\exp(-i\beta)h=\varphi_1+i\varphi_2,$$

其中φ_1，φ_2都是实值函数．则有

$$\int \varphi d\mu=\exp(-i\beta)\int h d\mu=\exp(-i\beta)\exp(i\beta)\left|\int h d\mu\right|$$

$$=\int |h|\,d\mu.$$

所以

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi_1 d\mu + i\int \varphi_2 d\mu = \int (\varphi_1^2+\varphi_2^2)^{\frac{1}{2}} d\mu.$$

因之

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi_1 d\mu \leqslant \int |\varphi_1|\, d\mu \leqslant \int (\varphi_1^2+\varphi_2^2)^{\frac{1}{2}} d\mu$$

$$= \int \varphi d\mu.$$

于是得到$\varphi_2 = 0$ a.e.，从而$\varphi=\varphi_1$ a.e.由于

$$\int \varphi d\mu = \int |\varphi|\, d\mu,$$

便有$\varphi \geqslant 0$ a.e.这样，等式$\varphi = \exp(-i\beta)h > 0$ a.e.成立，由此得出结论

$$h = \exp(i\beta)\varphi_1 = \exp(i\beta)\,|h| \quad \text{a.e.}$$

(12.30) Lebesgue控制收敛定理（复形式） 设(f_n)是$\mathfrak{L}_1$中一个序列，并且在X上$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ μ-a.e.存在．假定存在一个函数$s \in \mathfrak{L}_1^{+}$，使对于每个$n \in N$，$|f_n| \leqslant s$ μ-a.e.成立．则$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathfrak{L}_1$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

证 每当极限$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在时，就命$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$．显然$f$几乎处处定义在$X$上，而且是$\mathscr{A}$可测的．另外，对于所有$x \in N$，

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x)| + |f_n(x)| \leqslant 2s(x),$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0 \quad \text{a.e.}$$

这样，由(12.24)及(12.28.ii)便得到

$$\left|\int_X f\, d\mu - \int_X f_n d\mu\right| \leqslant \int_X |f - f_n|\, d\mu \to$$

$$\int_X 0\,d\mu=0. \qquad \square$$

(12.31) **定义** 设f为使得$\int_X f d\mu$有定义的任意一个函数.对于每个$E\in\mathscr{A}$，规定

$$\int_E f\,d\mu=\int_X \xi_E f\,d\mu.$$

不难看出

$$\int_E f\,d\mu=\int_E f\,d\mu_E,$$

其中μ_E是限制在σ代数$\mathscr{A}_E$上的测度μ(11.37).

(12.32) **推论** 设f属于$\mathfrak{L}_1$，$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中一个两两不相交序列，记$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 则

$$\int_A f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\mu.$$

证 规定$g_n=f\xi_{A_1}+\cdots+f\xi_{A_n}$. 则

$$|g_n|\leqslant|f|\in\mathfrak{L}_1,$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)\xi_A(x)\quad \text{a.e.}$$

由(12.30)便得到

$$\int_A f\,d\mu=\int_X f\,\xi_A d\mu=\int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f\,d\mu$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f\,d\mu. \qquad \square$$

(12.33) **推论** 设(f_n)是X上一个复值$\mathscr{A}$可测函数序列，并

且$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\in\mathfrak{L}_1$（或等价地有$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|\,d\mu<\infty$）．则$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$属于$\mathfrak{L}_1$，并且

$$\int_X\sum_{n=1}^{\infty}f_n d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu.$$

证 留作习题

在分析数学中，要屡次三番地援引关于控制收敛的Lebesgue定理(12.30)以及性质类似的相关定理(12.21)—(12.24)．可以毫不夸张地说，比如，Fourier分析就依赖于(12.30)．后面还要举出一些这类应用实例；我们暂且仅限于讨论(12.22)的一个推论，这一推论虽然不怎么明显，但还是比较简单的．

(12.34) 定理 ①设$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$．则对于任意$\varepsilon>0$，总存在仅依赖于$\varepsilon$和$f$的$\delta>0$，使对于任意$E\in\mathscr{A}$，只要$\mu(E)<\delta$，就有

$$\int_E|f|\,d\mu<\varepsilon.$$

证 对于$n=1,2,\cdots$，命

$$\psi_n(x)=\begin{cases}|f(x)|, & |f(x)|\leqslant n,\\ n, & \text{其他}.\end{cases}$$

那么(ψ_n)是一个非减的$\mathscr{A}$可测函数序列，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=|f|$．由(12.22)得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\psi_n d\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}\psi_n d\mu=\int_X|f|\,d\mu.$$

取n，使$\int_X(|f|-\psi_n)d\mu<\frac{1}{2}\varepsilon$．命$\delta=\frac{\varepsilon}{2n}$，选满足$\mu(E)<\delta$的任意$E\in\mathscr{A}$，则有

①定理(12.34)所刻划的属性，即通常所说的积分的绝对连续性．
——译者注

$$\int_E \psi_n d\mu \leqslant \int_E n d\mu = n\mu(E) < \frac{1}{2}\varepsilon .$$

由此可见，对于满足$\mu(E)<\delta$的所有$E\in\mathscr{A}$，都有

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|^{①} \leqslant \int_E |f|\,d\mu = \int_E (|f|-\psi_n)d\mu + \int_E \psi_n d\mu$$

$$< \int_X (|f|-\psi_n)d\mu + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon . \qquad \square$$

现在我们回到主要课题，研究§ 9所定义的泛函I，$\bar{I}$及$\bar{\bar{I}}$. 我们要证明$\bar{\bar{I}}$其实就是积分.

(12.35) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，I是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上一个非负线性泛函，$\bar{\bar{I}}$如(9.15)所设，而ι如(9.19)所设. 则(X, $\mathscr{M}_\iota$, ι)是一个测度空间(10.20)；而且对于X上每个非负$\mathscr{M}_\iota$可测函数f，都有

(i) $$\bar{\bar{I}}(f) = \int_X f\,d\iota.$$

证 设(s_n)是正如(11.35)那样，根据f所定义的简单函数序列：

$$s_n = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n}\xi_{A_{n,k}} + n\xi_{B_n},$$

其中

$$A_{n,k} = \left\{x\in X: \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\right\},$$

$$B_n = \{x\in X: f(x)\geqslant n\}.$$

---

①原文如此. 这就是说，绝对连续性定理结论中的$\int_E|f|\,d\mu<\varepsilon$，也可以写成$\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$. ——译者注

由(10.35)[①]及(12.4)，得

$$\overline{\overline{I}}(s_n)=\int_X s_n d\iota \text{ 对于一切} n\in N \text{成立.}$$

由(9.17)，得

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{I}}(s_n)=\overline{\overline{I}}(f).$$

由(12.11)，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X s_n d\iota=\int_X f\,d\iota.$$

结合这些等式，便得出(i). □

定理(12.35)乃是现代分析最著名、最重要的定理之一的广义形式——以下就来阐述这一定理.

(12.36) F.Riesz表示定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间，I是$\mathfrak{C}_{00}(X)$上一个非负线性泛函，则存在一个测度空间$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$，其中$\mathscr{M}_\iota$含有一切Borel集，满足条件：对于一切$f\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，都有

(i) $$I(f)=\int_X f(x)d\iota(x).$$

证 本定理是(12.35)的特例. 这是因为对于$\mathfrak{C}_{00}(X)$中一切非负的f，都有$\overline{\overline{I}}(f)=I(f)$，而且$I$，$\int_X\cdots d\iota$都是线性泛函. □

(12.37) 评注 Riesz表示定理的重要性在于如(12.21)—(12.24)以及(12.30)所描述的积分的可数加性. 我们通常所遇到的$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的泛函I正是非负的，又是线性的. Riesz定理说明，可以把I写成可数加性积分；这往往会引出很有用的一些推论.

---

①实际上，这里所需要的是就任意有限多个被加数而言的(10.35)；由本书所提供的证明，细节处加以必要的变更，则容易证明这一较强的断言.

(12.38) **评注** (12.36)没有阐明相应于已知泛函 I 的测度 ι 是唯一的．事实上，在某些情况下，也确有定义在$\mathscr{B}(X)$上不同的测度ι和 η，它们满足：对于一切$f\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，都有$\int_X f d\iota=\int_X f d\eta$〔参见下文(12.58)〕．不过，假如限于考虑正则测度，这种现象就不会发生了．

(12.39) **定义** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，又μ是一个测度，它定义在X的子集所成的一个σ代数$\mathscr{A}$上，这里$\mathscr{A}$含有X的Borel集$\mathscr{B}(X)$，如果满足下列三个条件，那么μ叫做一个**正则测度**：

(i) 对于任意紧集$F\subset X$，有$\mu(F)<\infty$；

(ii) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，有$\mu(A)=\inf\{\mu(U):U$是X中开集，$A\subset U\}$；

(iii) 对于任意开集$U\subset X$，有$\mu(U)=\sup\{\mu(F):F$是紧集，$F\subset U\}$.

由(10.20)，(9.27)，(9.24)及(9.26)可推知，凡如§9所定义的测度ι都是$\mathscr{M}_\iota$上正则测度．〔参看前面(10.40)中正则外测度的定义，这两个定义固然不同，但也有联系．〕

(12.40) **定理** 设μ是一个正则测度，它定义在局部紧Hausdorff空间X的子集所成的一个σ代数$\mathscr{A}$上．则对于任意$A\in\mathscr{A}$，只要A关于μ是σ有限的，就有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(F):F\text{是紧集},\ F\subset A\}.$$

证 逐字逐句重复(10.30)的证明，其中ι要换成μ. □

(12.41) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，μ和ν是分别定义在两个σ代数$\mathscr{M}_\mu$和$\mathscr{M}_\nu$上的正则测度．假定对于任意$f\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$，都有

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f\,d\nu,$$

则对于任意$E\in\mathscr{M}_\mu\cap\mathscr{M}_\nu$，都有

$$\mu(E)=\nu(E).$$

证 设F是X的任意非空紧子集. 利用(12.39.ii)求出含有F的两个开集序列(U_n), (V_n), 适当$\mu(U_1)<\infty$, $\nu(V_1)<\infty$, $\mu(U_n)\to\mu(F)$, $\nu(V_n)\to\nu(F)$. 对于每个$n\in N$, 命$W_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(U_k\cap V_k)$. 那么每个$W_n$必为开集, $W_1\supset W_2\supset\cdots\supset F$, $\nu(W_n)\to\nu(F)$, $\mu(W_n)\to\mu(F)$. 对于每个$n\in N$, 利用(6.80)得到一个函数$f_n\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$, 满足$f_n(X)\subset[0,1]$, $f_n(F)=\{1\}$, $f_n(W_n')\subset\{0\}$. 其次命$g_n=\min\{f_1,\cdots,f_n\}$. 显而易见, $g_n\in\mathfrak{C}_{00}^{+}(X)$, $g_1\geqslant g_2\geqslant\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=\xi_F(x)$对于一切$x\in\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}W_n\cap F'\right)'$成立, 即$\mu$-a.e. 和$\nu$-a.e.成立. 由于$\int_X g_1d\mu\leqslant\mu(W_1)<\infty$, $\int_X g_1d\nu\leqslant\nu(W_1)<\infty$,应用定理(12.24)便得出

$$\mu(F)=\int_X\xi_F d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\nu$$

$$=\int_X\xi_F d\nu=\nu(F).$$

这样一来, 对于任意紧集$F\subset X$, 都有$\mu(F)=\nu(F)$.

对于开集$U\subset X$, 则有

$$\mu(U)=\sup\{\mu(F):F\text{是紧集}, F\subset U\}$$
$$=\sup\{\nu(F):F\text{是紧集}, F\subset U\}$$
$$=\nu(U).$$

而对于任意集$E\in\mathscr{M}_\mu\cap\mathscr{M}_\nu$, 则有

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U):U\text{是开集}, E\subset U\}$$
$$=\inf\{\nu(U):U\text{是开集}, E\subset U\}$$
$$=\nu(E).\qquad\square$$

(12.42) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间, μ是定义在X的子集所成的一个σ代数$\mathscr{A}$上的一个正则测度, 且$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个完全测度空间. 假定$E\in\mathscr{A}$的充要条件是对于任意紧集$F\subset X$, $E\cap F\in\mathscr{A}$. 在$\mathfrak{C}_{00}(X)$上规定I为$I(f)=\int_X fd\mu$,并设ι为如§9

那样由I所构造的测度．则$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\iota$，且对于一切$E\in\mathscr{M}_\iota$，都有$\mu(E)=\iota(E)$.

证　设E属于$\mathscr{A}$，并假定$\mu(E)<\infty$. 既然μ是正则的，便存在两个集序列(F_n)，(U_n)，满足条件：$F_n\subset E\subset U_n$，这里每个F_n为紧集，而每个U_n为开集，并且$\mu(F_n)\to\mu(E)$，$\mu(U_n)\to\mu(E)$. 命

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,\qquad B=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n.$$

那么A,B都是Borel集，$A\subset E\subset B$，$\mu(A)=\mu(E)=\mu(B)$，$\mu(B\cap A')=0$. 由(12.35)及(12.41)推知$\iota(A)=\iota(B)$，$\iota(B\cap A')=0$. 因此，由于ι是完全测度，便有$E=A\cup[E\cap(B\cap A')]\in\mathscr{M}_\iota$. 这一论证表明

$$E\in\mathscr{A}\text{及}\mu(E)<\infty\ \text{蕴涵}\ E\in\mathscr{M}_\iota. \tag{1}$$

互换μ和ι，重复上述论证，便得到

$$E\in\mathscr{M}_\iota\text{及}\iota(E)<\infty\ \text{蕴涵}\ E\in\mathscr{A}. \tag{2}$$

其次考虑$\mathscr{A}$中的任意E以及任意紧集$F\subset X$. 根据题设知道$E\cap F\in\mathscr{A}$，自然有$\mu(E\cap F)<\infty$. 因此对于一切紧集F，$E\cap F$都属于$\mathscr{M}_\iota$. 应用(10.31.iv)，推出$E\in\mathscr{M}_\iota$，从而证明了$\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_\iota$. 很类似地可以证明反向包含关系，从而得出$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\iota$. 最后，(12.41)表明，对于一切$E\in\mathscr{M}_\iota$，都有$\mu(E)=\iota(E)$. □

(12.43)　评注　证明(12.42)时，"$E\in\mathscr{A}$的充要条件是对于一切紧集$F\subset X$，$E\cap F\in\mathscr{A}$"这一假设是必不可少的. 比如设$X=R_d\times R$，如(9.41)那样在$\mathfrak{C}_{00}(X)$上定义I，并设ι是由I导出的测度. 又设ν是ι在$\mathscr{B}(X)$上的限制，$(X,\mathscr{A},\mu)$是测度空间$(X,\mathscr{B}(X),\nu)$的完全化〔见(11.21)〕. 那么对于一切$f\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，$I(f)=\int_X fd\mu$，但是却有$\mathscr{A}\subsetneqq\mathscr{M}_\iota$.

以下我们就真来构造出一个集$A\in\mathscr{M}_\iota\cap\mathscr{A}'$，设$\varphi$是把$R$映满$\mathscr{B}(R)$的一个1－1映射(10.25)，规定

$$A=\bigcup_{x\in R}\{(x,y):y\in\varphi(x)\}.$$

集A属于$\mathscr{M}_i$，因为对于一切紧集$F\subset X$，$A\cap F\in\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{M}_i$. 倘若$A\in\mathscr{A}$，则有$A=B\cup C$，其中$C$仅与可数条直线$V_x=\{(x,y):y\in R\}$相交，而$B\in\mathscr{B}(X)$. 那么必存在一个序数$\alpha<\Omega$，使$B\in\mathscr{E}_\alpha$〔这里$\mathscr{E}_0$是$X$的开子集全体所成的集族，随后的各$\mathscr{E}_\alpha$则如(10.23)证明中那样定义〕. 这样，对于一切垂直线V_x，$B\cap V_x\in\mathscr{E}_{\alpha+2}$. 由此可见，对于除去可能使$C\cap V_x\neq\varnothing$的那些可数多个$x$之外的一切$x\in R$，$\varphi(x)\in\mathscr{F}_{\alpha+2}$〔这里$\mathscr{F}_0$是$R$的开子集全体所成的集族.〕但这与下述已知事实相矛盾：即对于一切$\beta<\Omega$，$\mathscr{B}(R)\cap\mathscr{F}'_\beta\neq\varnothing$（参阅Kuratowski①，也可参阅Sierpiński②）. 因此$A\notin\mathscr{A}$.

以下我们指出关于Lebesgue测度的一个重要积分性质.

(12.44) 定理 设f是R上一个Lebesgue可测函数，t是一个实数，f_t是由t产生的f的平移(8.14). 则

$$\text{(i)}\qquad \int_R f_t(x)dx=\int_R f(-x)dx=\int_R f(x)dx,$$

这里假定(i)中各积分都有定义.

证 对于$f\geqslant 0$，由Riemann积分的平移和反演不变性，显然得

$$\overline{\overline{S}}(f_t)=\overline{\overline{S}}(f^\star)=\overline{\overline{S}}(f). \tag{1}$$

〔利用(8.15.iv)，(8.15.v)，(9.8)，(9.15).〕然后引用(12.35)；关于(i)中各积分有定义的条件，请参阅(12.2)及(12.26). □

(12.45) 测度的连续象 这一结构的基本想法虽然颇为简单，但还是需要先作些解释. 设X，Y是两个局部紧Hausdorff空间，φ是把X映满Y的一个连续映射. 假定已知§9意义下X上一个测度

① K.Kuratowski, C.R.Paris, Vol.176(1923), 229.

② W.Sierpiński, Fund. Math., Vol.6(1924), 39.

μ,并假设

(i) 对于Y的任意紧子集F，$\varphi^{-1}(F)$在X中是紧的，或假设

(ii) $\mu(X)$有限.

试考虑一个任意函数$f\in\mathfrak{C}_{00}(Y)$. 不难看出,合成函数$f\circ\varphi$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\mu,\mu)$，这是因为，当(i)成立时,它属于$\mathfrak{C}_{00}(X)$，而$f\circ\varphi$在不管哪种情况下都是有界连续函数,从而当$\mu(X)$有限时，它就属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\mu,\mu)$. 因此，映射

$$\text{(iii)}\qquad f\rightarrow\int_X f\circ\varphi(x)d\mu(x)$$

乃是$\mathfrak{C}_{00}(Y)$上一个非负线性泛函. 由此Y上必存在§9意义下的一个测度ν，使对于一切$f\in\mathfrak{C}_{00}(Y)$，都有

$$\text{(iv)}\qquad \int_X f\circ\varphi(x)d\mu(x)=\int_Y f(y)d\nu(y).$$

测度ν叫做**测度μ在连续映射φ下的象.**

(12.46) **定理** 记号如(12.45)所设. 则对于Y的一切σ有限ν可测子集B，都有

$$\text{(i)}\qquad \nu(B)=\mu(\varphi^{-1}(B))=\int_X\xi_B\circ\varphi(x)d\mu(x).$$

而对于任意函数$f\in\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{M}_\nu,\nu)$，$f\circ\varphi$必属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\mu,\mu)$，并且有

$$\text{(ii)}\qquad \int_Y f(y)d\nu(y)=\int_X f\circ\varphi(x)d\mu(x).$$

证 我们分几步进行证明.

先假设U是Y的一个非空开子集. 命$\mathfrak{K}$为$\mathfrak{C}_{00}^+(Y)$中满足$f\leqslant\xi_U$的函数f全体所成的集. 由Urysohn定理(6.80)推知，$\sup\{f:f\in\mathfrak{K}\}=\xi_U$，因此，显而易见，$\mathfrak{K}$在(9.11)意义下是向上的. 注意到(12.35)，并两次应用(9.11)，便得出

$$\nu(U)=\int_Y\xi_U(y)d\nu(y)$$

$$=\sup\left\{\int_Y f(y)d\nu(y): f\in\mathfrak{K}\right\}$$

$$=\sup\left\{\int_X f\circ\varphi(x)d\mu(x): f\in\mathfrak{K}\right\}$$

$$=\int_X \sup\{f\circ\varphi(x): f\in\mathfrak{K}\}d\mu(x)$$

$$=\int_X \xi_U\circ\varphi(x)d\mu(x)$$

$$=\mu(\varphi^{-1}(U)). \qquad (1)$$

其次假设B是Y的任意一个子集．定理(9.24)及(1)式表明

$$\nu(B)=\inf\{\nu(U):U\text{是}Y\text{中开集，}U\supset B\}$$
$$=\inf\{\mu(\varphi^{-1}(U)):U\text{是}Y\text{中开集，}U\supset B\}$$
$$\geqslant\mu(\varphi^{-1}(B)). \qquad (2)$$

特别说来，如果$\nu(B)=0$，那么就B来说(i)成立．如果F是Y的一个紧子集，那么F包含在一个开集U中，而U^-是紧的(6.79)．这样，$\nu(U)$必有限(9.27)，从而

$$\nu(U)-\nu(U\cap F')=\nu(F). \qquad (3)$$

把(1)应用于(3)，并注意到$U\cap F'$也是开集，得

$$\nu(F)=\mu(\varphi^{-1}(U))-\mu(\varphi^{-1}(U\cap F'))$$
$$=\mu(\varphi^{-1}(U)\cap(\varphi^{-1}(U\cap F'))')$$
$$=\mu(\varphi^{-1}(F)). \qquad (4)$$

我们知道，凡σ有限的ν可测集B都可以写成

$$B=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\cup P, \qquad (5)$$

其中$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$，每个$F_n$是紧的，$P$与$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$不相交，$\nu(P)=0$．这一结论容易由(10.34)推出，推导细节从略．把(4)应用于(5)，并利用(10,13)，便得到

$$\nu(B)=\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(\varphi^{-1}(F_n))$$

$$=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-1}(F_n)\right)=\mu\left(\varphi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right)$$

$$\leqslant\mu(\varphi^{-1}(B)). \tag{6}$$

现由(6)和(2)就推出(i).

我们来证对于任意$B\in\mathscr{M}_\nu$，都有$\varphi^{-1}(B)\in\mathscr{M}_\mu$. 如果$B$是$\sigma$有限的，利用(5)，记

$$\varphi^{-1}(B)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-1}(F_n)\cup\varphi^{-1}(P);$$

则因为φ是连续的，所以每个$\varphi^{-1}(F_n)$是闭集，又由于(2)，便有$\mu(\varphi^{-1}(P))=0$. 如果B不是σ有限的，设E是X的任意紧子集. 则有

$$E\cap\varphi^{-1}(B)=E\cap\varphi^{-1}(\varphi(E)\cap B),$$

这是因为φ是单值的缘故. 集$\varphi(E)\cap B$分明是ν可测的，关于ν又是有限的，因此，正如刚才所证的，$\varphi^{-1}(\varphi(E)\cap B)$是$\mu$可测的. 这样，$E\cap\varphi^{-1}(B)$便属于$\mathscr{M}_\mu$. 从而由(10.31)推知$\varphi^{-1}(B)$也属于$\mathscr{M}_\mu$.

因此，显而易见，对于Y上任意的ν可测复函数f，X上函数$f\circ\varphi$必是μ可测的. 利用(i)不难证明(ii). 试考察$f\in\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{M}_\nu,\nu)$；不妨假设$f\geqslant0$. 根据(11.35)，必存在一个非减的$\nu$可测简单函数序列$(s_n)_{n=1}^{\infty}$，使得在$Y$上处处成立$\lim_{n\to\infty}s_n(y)=f(y)$. 很明显，

$$\int_Y s_n(y)d\nu(y)\leqslant\int_Y f(y)d\nu(y)<\infty. \tag{7}$$

记$s_n=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\xi_{B_k}$，式中$0<\alpha_1<\cdots<\alpha_m$，则正如(7)所表明的，对于一切$k$，$\nu(B_k)$有限，于是由(12.4)及(i)推知

$$
\begin{aligned}
\int_Y \bar{s}_n(y)d\nu(y) &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \nu(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(\varphi^{-1}(B_k)) \\
&= \int_X \Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi_{\varphi^{-1}(B_k)}(x) \Big) d\mu(x) \\
&= \int_X s_n \circ \varphi(x) d\mu(x).
\end{aligned} \tag{8}
$$

(8)式两边当$n\to\infty$时取极限，并引用B.Levi定理(12.22)，便证明了(ii)． □

在结束本节前，我们布置以下一大组习题．其中习题(12.48)，(12.51)，(12.54)及(12.63)，有的不久要用到，有的则有助于弄清迄今所阐述的理论，所以都很重要．希望读者至少要做完这几个题目，大多数读者则要完成全部习题．

(12.47) **习题** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个有限测度空间，$\mathfrak{F}$是X上复值$\mathscr{A}$可测函数全体所成的集．对于f，$g\in\mathfrak{F}$，规定

$$\rho(f, g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

试证明下列断言：

(a) $\rho(f, g)=0$的充要条件是$f=g$ a.e.

(b) $\rho(f, g)=\rho(g, f)$.

(c) $\rho(f, h)\leqslant\rho(f, g)+\rho(g, h)$.

(d) 如果$(f_n)_{n=1}^{\infty}$满足$\lim\limits_{m, n\to\infty}\rho(f_n, f_m)=0$，则存在一个复值可测函数$g$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, g)=0$.

换句话说，假如把a.e.相等的函数看作是等同的，我们便定义了一个完备度量空间$\mathfrak{F}$.

(e) 对于$f\in\mathfrak{F}$及$(f_n)\subset\mathfrak{F}$；$\rho(f_n-f)\to 0$成立的充要条件是依测度$f_n\to f$．由于这个缘故，我们称ρ为**依测度收敛的度量**.

(12.48) **习题** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是任意一个测度空间，f 是 X 上一个非负、实值、有界、$\mathscr{A}$ 可测函数. 命

$$\alpha=\inf\{f(x): x\in X\},$$
$$\beta=\sup\{f(x): x\in X\}.$$

对于 $n\in N$ 及 $j=1,2,\cdots,n-1$，命

$$A_j=\left\{x\in X: \alpha+\frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n}\right.$$

$$\left.\leqslant f(x)<\alpha+\frac{j(\beta-\alpha)}{n}\right\},$$

$$A_n=\left\{x\in X: \alpha+\frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n}\leqslant f(x)\leqslant\beta\right\}.$$

f 的 Lebesgue 和数规定为数值

$$s_n=\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha+\frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n}\right)\mu(A_j).$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_X f\,d\mu.$

又假定 $\mu(X)<\infty$，并设 f 是 X 上任意一个有界、实值、$\mathscr{A}$ 可测函数. 规定 s_n 如上. 试证：$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_X f d\mu.$

(12.49) **习题** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是任意一个有限测度空间，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 f 都是 X 上复值、$\mathscr{A}$ 可测函数，并且 $f_n\to f$ a.e. 假定存在 $\beta\in R$，使对于一切 $n\in N$，都有 $|f_n|\leqslant\beta$ a.e. 试利用 Egorov 定理，而不利用(12.21)—(12.24)或(12.30)，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

(12.50) **习题** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个 σ 有限测度空间，g 是 X 上一个 $\mathscr{A}$ 可测函数，并且对于任意 $f\in\mathfrak{L}_1$，$fg\in\mathfrak{L}_1$. 试证：存在数 $\alpha\in R$，满足 $\mu(\{x\in X: |g(x)|>\alpha\})=0$. 试举例说明如果

去掉σ有限性假设，结论可能不成立.

(12.51) **习题** 设$-\infty<a<b<\infty$，f是$[a, b]$上任意一个有界实值函数，对于每个$\delta>0$以及每个$x\in[a, b]$，规定

$$m_\delta(x)=\inf\{f(t):t\in[a,b]\cap]x-\delta,x+\delta[\},$$

$$M_\delta(x)=\sup\{f(t):t\in[a,b]\cap]x-\delta,x+\delta[\},$$

并规定

$$m(x)=\lim_{\delta\downarrow 0}m_\delta(x),\quad M(x)=\lim_{\delta\downarrow 0}M_\delta(x).$$

(a) 试证：f在x连续的充要条件是$m(x)=M(x)$.

设$(\Delta_j)_{j=1}^{\infty}$是$[a, b]$的一个细分序列，比如说

$$\Delta_j=\{a=x_0^{(j)}<x_1^{(j)}<\cdots<x_{n_j}^{(j)}=b\},$$

并满足

$$\lim_{j\to\infty}\max\{x_k^{(j)}-x_{k-1}^{(j)}:1\leqslant k\leqslant n_j\}=0.$$

命

$$m_k^{(j)}=\inf\{f(t):x_{k-1}^{(j)}\leqslant t\leqslant x_k^{(j)}\},$$

$$M_k^{(j)}=\sup\{f(t):x_{k-1}^{(j)}\leqslant t\leqslant x_k^{(j)}\},$$

$$\varphi_j=\sum_{k=1}^{n_j}m_k^{(j)}\xi_{]x_{k-1}^{(j)},x_k^{(j)}[},\quad\psi_j=\sum_{k=1}^{n_j}M_k^{(j)}\xi_{]x_{k-1}^{(j)},x_k^{(j)}[}.$$

试证：

(b) 如果$x\in[a, b]$，而x与所有$x_k^{(j)}$都不相同，那么

$$\lim_{j\to\infty}\varphi_j(x)=m(x),\quad\lim_{j\to\infty}\psi_j(x)=M(x);$$

(c) m，M在$[a, b]$上都是Lebesgue可测的；

(d) 如果$L(f, \Delta_j)$与$U(f, \Delta_j)$分别为关于函数f、并相应于细分Δ_j的Darboux下和与Darboux上和[规定$\alpha(x)=x$]，则

$$\lim_{j\to\infty}L(f,\Delta_j)=\int_a^b m(x)dx,$$

$$\lim_{j\to\infty}U(f,\Delta_j)=\int_a^b M(x)dx;$$

(e) f在$[a, b]$上Riemann可积的充要条件是f几乎处处连续，就是说$\lambda(\{x\in[a, b]: f在x间断\})=0$;

(f) 如果f在$[a,b]$上Riemann可积，则$f\in\mathfrak{L}_1([a,b],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$，并且

$$S(f:[a,b])=\int_a^b f(x)dx,$$

其中S表示Riemann积分(8.6)．（读者应注意，上述命题仅适用于有限区间上的有界函数．）

(12.52) **习题** 在$[0, 1]$上试求一个实值函数f，使得f在$]0,1]$上连续，$\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\int_{[\delta,1]}fd\lambda$有限，而$f$在$[0,1]$上的Lebesgue积分没有定义．

(12.53) **习题** 在$[0, 1]$上试求一个有界、实值、Lebesgue可测函数f，使对于$[0, 1]$上每个Riemann可积函数g，都有$\int_{[0,1]}|f-g|d\lambda>0$．

(12.54) **习题** 设$-\infty<a<b<\infty$，f是$[a, b]$上一个Lebesgue可测函数，并且对于每个$x\in[a, b]$，都有$\int_a^x f(t)dt=0$．试证：$f=0$ λ-a.e.〔后面定理(16.34)的证明要用本题．提示如下．由于$\int_a^b f(t)dt$存在且有限，$|f|$便属于$\mathfrak{L}_1([a, b],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$．显而易见，由(6.59)，(12.32)以及我们的假设知道，对于$[a, b]$的一切开子集U，都有$\int_U fd\lambda=0$．利用(9.24)推知，对于一切λ可测集$A\subset[a, b]$，都有$\int_A fd\lambda=0$．由此直接得到恒等式$f=0$ λ-a.e.〕

(12.55) **习题** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，并且X的每个开子集都是σ紧的．假定μ是定义在$\mathscr{B}(X)$上的一个测度，并且对于一切紧集$F\subset X$，$\mu(F)<\infty$．试证μ是正则测度．〔先考虑X是紧的情况．考察族$\mathscr{R}=\{E\in\mathscr{B}(X):\mu(E)=\inf\{\mu(U):U是开集，U\supset E\}, \mu(E)=\sup\{\mu(F):F是紧集，F\subset E\}\}$．〕

(12.56) **习题** 设μ是定义在$\mathscr{B}(R)$上的一个测度，并且$\mu([0, 1])=1$，又对于任意$E\in\mathscr{B}(R)$及任意$x\in R$，都有$\mu(E+x)=\mu(E)$．试证：对于一切$E\in\mathscr{B}(R)$，成立$\mu(E)=\lambda(E)$．〔先证

对于任意$x \in R$，都有$\mu(\{x\}) = 0$，再证对于R中任意$a < b$，都有$\mu(]a, b[) = b - a$. 利用(12.55)].

(12.57) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个任意的测度空间，f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$都是X上复值可测函数. 假定依测度$f_n \to f$，并且存在一个函数$g \in \mathfrak{L}_1^{+}$，使对于一切$n \in N$，都有$|f_n| \leqslant g$ a.e. 试证$\lim\limits_{n \to \infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0$，〔假设$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \int_X |f - f_n| d\mu = \alpha > 0$，选取一子序列$(f_{n_k})$，适合$\lim\limits_{k \to \infty} \int_X |f - f_{n_k}| d\mu = \alpha$. 然后利用(11.26)].

(12.58) 习题 设I是(9.41)所定义的$\mathfrak{C}_{00}(R_d \times R)$上的非负线性泛函. 在$\mathscr{B}(R_d \times R)$上由下式定义$\eta$：

$$\eta(E) = \sum_{x \in R} \lambda(\{y : (x, y) \in E\}).$$

试证：

(a) η是$\mathscr{B}(R_d \times R)$上一个测度；

(b) 对于任意$f \in \mathfrak{C}_{00}(R_d \times R)$，都有$I(f) = \int_{R_d \times R} f d\eta$；

(c) η不是正则测度.

(12.59) 习题 设X是一个局部紧Hausdorff空间，μ是定义在X的子集所成的一个σ代数$\mathscr{A}$上的一个正则测度〔自然有$\mathscr{A} \supset \mathscr{B}(X)$〕，并且对于任意$x \in X$，都有$\mu(\{x\}) = 0$. 假设$B$属于$\mathscr{A}$，并且

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F\text{是紧的}, F \subset B\} < \infty.$$

试证：对于每个$\alpha \in [0, \mu(B)]$，总存在一个σ紧集$A \subset B$，使$\mu(A) = \alpha$.

(12.60) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是(10.56.a)所说的测度空间，f是X上一个$\mathscr{A}$可测函数. 试证：除去一个μ测度为零的集外，f在每个E_k上是常值函数，并由此把积分$\int_X f d\mu$写成某个有限和.

(12.61) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是(10.3)意义下的一个退化测度空间：对于任意$A \in \mathscr{A}$，都有$\mu(A) = 0$或$\mu(A) = \infty$. 试证：

凡$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$中的函数$f$除去在$\mu$测度为零的一个集上外都等于零，而且$\int_X |f|\,d\mu=0$.〔这一令人不愉快的性质说明了，所考虑的测度空间之所以冠以“退化的”这一术语，是颇有道理的.〕

（12.62） **习题** 设X是一个局部紧、σ紧的Hausdorff空间，μ是定义在X的子集所成的一个σ代数$\mathscr{A}$〔$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}(X)$〕上的一个正则测度. 又设$f$是$X$上一个$\mathscr{A}$可测函数，并且合于条件：$f(X)\subset[0,\infty]$，又对于$X$的任意紧子集$F$，都有$f\xi_F\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$.（这种函数$f$称为**局部$\mu$可积的**.）$\mathscr{A}$上规定集函数$\nu$为

$$\nu(A)=\int_A f(x)\,d\mu(x).$$

试证ν是$\mathscr{A}$上一个正则测度.

（12.63） **习题 测度空间的完全化上的积分.** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一个测度空间，$(X,\overline{\mathscr{A}},\overline{\mu})$为其完全化(11.21).

(a) 设$\overline{f}$是定义在X上的一个复值或广义实值$\overline{\mathscr{A}}$可测函数.试证：必有一个$\mathscr{A}$可测函数f，使得在X上$\overline{\mu}$几乎处处成立$f=\overline{f}$.〔提示：假设$\overline{f}$为广义实值的. 利用(11.35)，求得一个实值、$\overline{\mathscr{A}}$可测、简单函数序列$(\overline{s}_n)$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{s}_n=\overline{f}$处处成立. 每个$\overline{s}_n$具有$\sum\limits_k\alpha_{n,k}\xi_{A_{n,k}}$的形状，其中$A_{n,k}\in\overline{\mathscr{A}}$，诸$A_{n,k}$两两不相交. 每个$A_{n,k}$包含在一个集$B_{n,k}\in\mathscr{A}$中，这里$\overline{\mu}(B_{n,k}\cap A'_{n,k})=0$. 命$s_n=\sum\limits_k\alpha_{n,k}\xi_{B_{n,k}}$，并规定$f$为$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.〕

(b) 设$\overline{f}$是$\mathfrak{L}_1(X,\overline{\mathscr{A}},\overline{\mu})$中一个函数。试证：$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$中必有一个函数$f$，满足

$$\int_X |f-\overline{f}|\,d\overline{\mu}=0$$

及

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f\,d\overline{\mu}.$$

〔只要考虑非负函数 f 就可以了. μ测度为 0 的集加起来，则不难把(a)小题中那些简单函数 s_n作成一个非减序列. 根据(12.22)，便得到

$$\int_X \bar{f}\,d\bar{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_X \bar{s}_n d\bar{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

另一等式是显而易见的. 〕

(c) 设X是一个局部紧Hausdorff空间，$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$如 §9, §10所设. 假定$X$关于$\iota$为$\sigma$有限. 命$\mathscr{B}(X)$表示$X$的Borel集. 试证$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$乃是$(X, \mathscr{B}(X), \iota)$的完全化. 而有关Borel可测函数和任意$\mathscr{M}_\iota$可测函数，这表明了什么? 〔可利用(a)小题. 〕

(d) 去掉(c)中X为σ有限的假设. 设f是$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$中任意函数. 试证：$X$上必有一个Borel可测函数$f_1$，使得$\iota$几乎处处成立$f_1=f$，并且 $|f_1| \leqslant |f|$. 〔考虑X的一个子集Y，它关于ι为σ有限，并且f在Y'上等于零（您愿意，就把Y取作开集好了），然后如(c)小题那样进行论证. 〕

(12.64) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，f是X上一个复值$\mathscr{A}$可测函数. 试证：$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$的充要条件是存在一个简单函数序列$(s_n)$，满足：$(s_n) \subset \mathfrak{L}_1$，依测度$s_n \to f$，并且

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_X |s_m - s_n|\,d\mu = 0.$$

这时有

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu.$$

〔如果人们先就复值、$\mathscr{A}$可测、简单函数，定义$\int_X s d\mu$，则可利用上述事实定义$\mathfrak{L}_1$以及$\mathfrak{L}_1$上的积分. 在论述其值在Banach空间中的函数时，这一方法很有用处. 它并不象我们所建立的积分定义那样直接依赖于实数的序关系. 〕

第四章　函数空间与Banach空间

在第三章所阐述的积分理论的基础上，我们可以定义某些函数空间．由于这些函数空间具有不少值得注意的性质，因而在分析学及其应用中极为重要．§7曾考虑过一些空间，其中的点为函数．为了规定两函数之间的距离，我们在§7仅考虑了一致范数$\|\ \|_u$〔参见(7.3)〕．而本章所涉及的一些范数，则是用某种积分方法来规定的．§13规定并研究其中最重要的一些范数．这些特殊范数很自然地引导我们来研究抽象Banach空间——§14要专门研究这种空间．尽管我们并未论述Banach空间本身，但必然的事实是，如同对§§7，13所定义的特殊Banach空间那样，许多结果都可同样容易地证明对一切Banach空间（也许需要附加某个性质）都是成立的．处理这一问题，我们希望既省力又能解释清楚，这就促使我们在一般 Banach 空间内讨论这些结果．§15提供了函数空间$\mathfrak{L}_p(1<p<\infty)$的共轭空间的一种精确计算结构．我们之所以选定这一结构，是由于其基本属性，还基于这样的认识，即熟练地使用不等式乃是每个研究分析的学生都应掌握的一种基本技能．§16中，我们考虑Hilbert空间——它乃是抽象化的$\mathfrak{L}_2$空间，还举出了某些具体例子，并作了说明．

本章各节都很重要，建议读者学习全章．

§13　空间$\mathfrak{L}_p(1\leqslant p<\infty)$

照例，我们从定义讲起．

(13.1)　定义　设p是一个正实数，$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意的测度空间．又设f是μ-a.e.定义在X上的一个复值$\mathscr{A}$可测函数，

并且$|f|^p \in \mathfrak{L}_1$. 这时就说$f\in \mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$,并规定记号$\|f\|_p$为

$$\|f\|_p=\left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

如不致引起混淆，就把$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$写成$\mathfrak{L}_p$.①当$p\geqslant 1$，$f\in \mathfrak{L}_p$时，$\|f\|_p$叫做$f$**的范数**，或叫做$f$**的$\mathfrak{L}_p$范数**.②有些作者用记号$L^p$，$L_p$，$\mathfrak{L}^p$等来表示$\mathfrak{L}_p$.

当$1\leqslant p<\infty$时，$\mathfrak{L}_p$上函数$f\to\|f\|_p$满足(7.5)所列出的全部范数公理，仅有的例外是正性条件，即当$f\neq 0$时，$\|f\|_p>0$.〔如果$\mathscr{A}$包含一个$\mu(E)=0$的非空集E，那么$\xi_E\neq 0$，但却有$\|\xi_E\|_p=0$.〕值得验证的只是三角不等式(7.5.iii)，就$\mathfrak{L}_p$而言，三角不等式为

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

因此我们先来证明这一不等式，要注意这里可能出现等式，与此同时还得到另外一些不等式，它们在后文都很有用.

(13.2) **定理(Young不等式)** 设φ是定义在$[0,\infty[$上的一个连续、实值、严格递增函数，并且$\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=\infty$，$\varphi(0)=0$. 命$\psi=\varphi^{-1}$. 对于任意$x\in[0,\infty[$，规定

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(u)du,$$

$$\Psi(x)=\int_0^x \psi(v)dv.$$

则当$a,b\in[0,\infty[$时，有

$$ab\leqslant\Phi(a)+\Psi(b),$$

①考虑到断言(12.28.i)，当$p=1$时，现在的定义与上文(12.26)所给出的$\mathfrak{L}_1$的定义是一致的.

②就$0<p<1$的情况而言，除少数几个测度空间之外，$\mathfrak{L}_p$上函数$f\to\|f\|_p$并非(7.5)意义下的范数. 供作讨论，请参看(13.25.c).

而等号成立的充要条件是 $b=\varphi(a)$.

证 利用这样一个事实，可以进行正规证明，即对于任意 $c\geqslant 0$，总成立

$$\int_0^c \varphi(u)du+\int_0^{\varphi(c)}\psi(v)dv=c\varphi(c).$$

不过，把积分看作面积，则由附图 6，结论是显而易见的. □

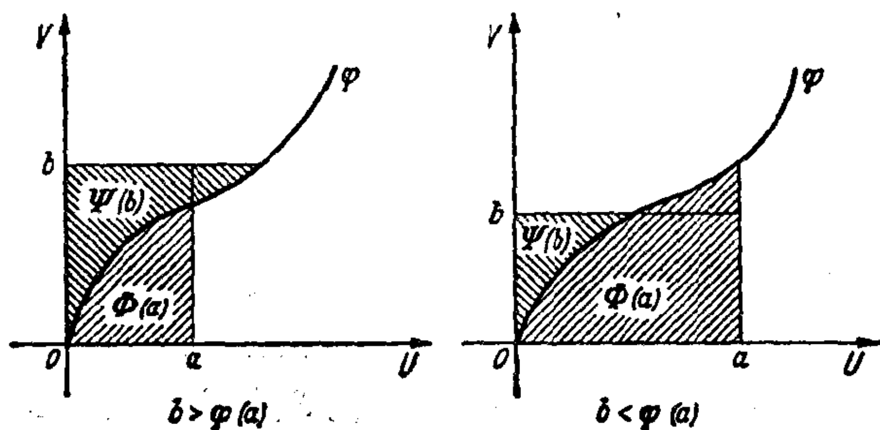


图 6

对于任意正实数 p ($p\neq 1$)，规定

$$p'=\frac{p}{p-1}$$

$\left(这样，\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$.

(13.3) **推论** 设 $p>1$，而 a，b 是两个任意的非负实数，则有

(i) $$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}.$$

(i)中等号成立的充要条件是$a^p=b^{p'}$.

证 对于$u\in[0,\infty[$，规定$\varphi(u)=u^{p-1}$；那么φ是连续的、严格递增的，$\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=\infty$，$\varphi(0)=0$. φ的逆函数ψ由$\psi(v)=v^{\frac{1}{p-1}}$给出. 则有

$$\Phi(a)=\int_0^a\varphi(u)du=\int_0^a u^{p-1}du=\frac{a^p}{p},$$

$$\Psi(b)=\int_0^b\psi(v)dv=\int_0^b v^{\frac{1}{p-1}}dv=\frac{b^{p'}}{p'}$$

〔Riemann可积函数的Lebesgue积分与Riemann积分是一致的(12.51.f)〕. 于是由(13.2)立即得出本推论. □

(13.4) 定理($p>1$时的Hölder不等式) 设$f\in\mathfrak{L}_p$，$g\in\mathfrak{L}_{p'}$，这里$p>1$. 则$fg\in\mathfrak{L}_1$，并且有

(i) $$\left|\int fg\,d\mu\right|\leqslant\int|fg|\,d\mu,$$

(ii) $$\int|fg|\,d\mu\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'};$$

从而还有

(iii) $$\left|\int fg\,d\mu\right|\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

证 先证(ii). 〔要注意，(ii)和(12.28.ii)蕴涵(i). 〕如果f或g μ-a.e.等于零，那么(ii)显然成立. 要不然，利用(13.3)，则对于X中使$f(u)$和$g(u)$都有定义的所有u，也就是对于μ几乎所有u，便有

$$\frac{|f(u)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(u)|}{\|g\|_{p'}}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f(u)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{p'}\,\frac{|g(u)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

由此得到

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_{p'}}\int|fg|d\mu\leqslant\frac{1}{p\|f\|_p^p}\int|f|^pd\mu$$

$$+\frac{1}{p'\|g\|_{p'}^{p'}}\int|g|^{p'}d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

这就证明了(ii). 由此直接推出不等式(iii). □

当 $p=p'=2$ 时，不等式(ii)称为**Cauchy 不等式**，或 **Schwarz 不等式**，或**Bunyakovskiǐ不等式**；有时就把这三个名称列在一起.

(13.5) **(13.4)中等号成立的充要条件**. 为了得到(13.4.ii)中的等式，显然必须且只须对于几乎所有的$u\in X$，成立

$$\frac{|f(u)|}{\|f\|_p}\frac{|g(u)|}{\|g\|_{p'}}=\frac{1}{p}\frac{|f(u)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|g(u)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

根据(13.3)可知，上式成立的充要条件是$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$几乎处处成立. 这样，便得到(13.4.ii)中等号成立的充要条件是存在两个非负(但不同时为零的)实数A，B，使等式

$$A|f|^p=B|g|^{p'}$$

几乎处处成立.

根据这一结论以及(12.29)，读者可以很容易地用公式表示(13.4.iii)中等号成立的充要条件.

(13.6) **定理(0<p<1时的Hölder不等式)**. 设$0<p<1$，f和g分别是$\mathfrak{L}_p^+$和$\mathfrak{L}_{p'}^+$中的函数. 则有

(i) $$\int fg\,d\mu\geqslant\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

除非$\int g^{p'}d\mu=0$(注意$p'<0$).

证 在定理条件下，我们考虑到既然$p'<0$，又有$0<\int g^{p'}d\mu<\infty$，因此可以推知，对于几乎所有$x\in X$，$g(x)>0$. 命 $q=\frac{1}{p}$，并规定 $\varphi=g^{-\frac{1}{q}}$，$\psi=g^{\frac{1}{q}}f^{\frac{1}{q}}$.不难看出，$\varphi^{q'}=g^{p'}$，从

而$\varphi\in\mathfrak{L}_{q'}$. 如果$\int fgd\mu=\infty$，那么(i)式显然成立. 否则，$fg$便属于$\mathfrak{L}_1$，从而$\psi$属于$\mathfrak{L}_q$. 应用（13.4），用$q$代替$p$，则得到

$$\int f^p d\mu=\int\varphi\psi d\mu\leqslant\left(\int\psi^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\varphi^{q'}d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$=\left(\int fgd\mu\right)^p\left(\int g^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{q'}},$$

由此直接得出

$$\int fgd\mu\geqslant\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^{p'}d\mu\right)^{-\frac{1}{q'p}}$$

由于$-\frac{1}{q'p}=\frac{1}{p'}$，定理得证. □

（13.7） **定理（Minkowski不等式）** 设$1\leqslant p<\infty, f, g\in\mathfrak{L}_p$，则有

(i) $$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

证 先假设$p<1$. 则有

$$|f+g|^p\leqslant(|f|+|g|)^p\leqslant(2\max\{|f|, |g|\})^p$$
$$=2^p\max\{|f|^p, |g|^p\}\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p).$$

这一粗略估计表明$|f+g|^p\in\mathfrak{L}_1$，也就是$f+g\in\mathfrak{L}_p$. 这样，由（13.4）可推出

$$\|f+g\|_p^p=\int|f+g|^p d\mu\leqslant\int|f+g|^{p-1}|f|d\mu$$

$$+\int|f+g|^{p-1}|g|d\mu$$

$$\leqslant\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^{(p-1)p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+\left(\int|g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^{(p-1)p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=(\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

于是成立不等式

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{p'}}\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

注意到 $p-\dfrac{p}{p'}=1$，便得出 $p>1$ 时的Minkowski不等式．既然$\int|f+g|d\mu\leqslant\int|f|d\mu+\int|g|d\mu$，当 $p=1$ 时不等式(i)显然成立．□

现在给出Minkowski不等式中等号成立的条件．

(13.8) **定理** 当 $p=1$ 时，(13.7.i)中等号成立的充要条件是：存在一个正可测函数 ρ，使得在集$\{x:f(x)g(x)\neq 0\}$上几乎处处成立

$$f(x)\rho(x)=g(x).$$

当 $1<p<\infty$时，等号成立的充要条件是：几乎处处成立

$$Af=Bg,$$

这里A，B是两个非负实数，并且$A^2+B^2>0$．

证 留作习题．

(13.9) **定理** 设 $0<p<1$，f，$g\in\mathfrak{L}_p^+$，则有

(i) $$\|f+g\|_p\geqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

证 (13.7)中对$|f+g|^p$所作的估计已表明 $f+g\in\mathfrak{L}_p$．为了证明(i)，可利用(13.6.i)，以及(13.7)的论证．□

以下我们描述，在什么精确意义下$\mathfrak{L}_p$能成为一个赋范线性空间($p\geqslant1$)．

(13.10) **定理** 设$1\leqslant p<\infty$，则$\mathfrak{L}_p$是K上的一个赋范线性空间，这里我们约定：$f=g$的涵义是对于μ几乎所有$x\in X$，$f(x)=g(x)$．〔也可以叙述成：命$\mathfrak{N}=\{f\in\mathfrak{L}_p$：在$X$上$f(x)=0$ a.e.成立$\}$；则$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{L}_p$的一个闭线性子空间．在a.e.相等的所谓等同函数意义下，我们所说的$\mathfrak{L}_p$其实就是$\mathfrak{L}_p/\mathfrak{N}$．〕

证 $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\ \|f\|_p$是显然的事实. 所需的其他验证都已作过了. □

以下定理在积分论的许多应用中至为重要. 它的很特殊的情况，即Riesz-Fischer定理①，于1906年首次发表曾轰动一时. 现在我们看到，一般定理也是不难证明的.

(13.11) **定理** 设$1\leqslant p<\infty$，则$\mathfrak{L}_p$是一个复Banach空间，这就是说，关于度量$\rho(f,g)=\|f-g\|_p$，$\mathfrak{L}_p$成为一个完备度量空间.

证 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{L}_p$中一个Cauchy序列，就是说(f_n)具有性质：$\lim\limits_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|_p=0$. 数列$(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$可能在任何点$x\in X$都不收敛〔例如(11.27)所构造的序列$(f_n)$就是如此〕. 不过，可以求出$(f_n)$的一个子序列，它确乎$\mu$几乎处处收敛. 事实上，把$(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$取作$(f_n)$的这样的子序列，即使得$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，而且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}+f_{n_k}\|_p=\alpha<\infty.$$

这样选取办得到：比如说，可以挑选递增的n_k，使对于一切$m\geqslant n_k$，都有$\|f_m-f_{n_k}\|_p<2^{-k}$. 现规定

$$g_k=|f_{n_1}|+|f_{n_2}-f_{n_1}|+\cdots+|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,k=1,2,3,\cdots.$$

显而易见

$$\begin{aligned}\|g_k^p\|_1=\|g_k\|_p^p&=(\|\,|f_{n_1}|+|f_{n_2}-f_{n_1}|+\\&\qquad\cdots+|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\,\|_p)^p\\&\leqslant\Big(\|f_{n_1}\|_p+\sum_{j=1}^{k}\|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_p\Big)^p\\&\leqslant(\|f_{n_1}\|_p+\alpha)^p<\infty.\end{aligned}$$

命$g=\lim\limits_{k\to\infty}g_k$. 根据B.Levi定理(12.22)以及上述估计，得到

$$\int g^p d\mu=\int\lim_{k\to\infty}g_k^p d\mu=\lim_{k\to\infty}\int g_k^p d\mu<\infty.$$

---

①见(16.39). ——译者注

所以 g 属于 $\mathfrak{L}_p$；也就是说，

$$\int\left[|f_{n_1}|+\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|\right]^p d\mu<\infty.$$

上述非负被积函数必定μ-a.e.有限，从而级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|$$

μ-a.e.收敛. 显然，级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x))$$

也同样μ-a.e.收敛. 这个级数的第k个部分和正是$f_{n_{k+1}}(x)$，从而对于任意$x\in A$，序列$(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$收敛于一个复数$f(x)$，这里$A\in\mathscr{A}$，$\mu(A')=0$. 对于任意$x\in A'$，则规定$f(x)$为0. 不难看出，$f$是$\mathscr{A}$可测的，在$X$上$f$显然还是复值的.

我们来证明f是序列(f_n)在$\mathfrak{L}_p$中的极限，由此自然就证实了关于由$\mathfrak{L}_p$范数导出的度量$\mathfrak{L}_p$是完备的. 给定$\varepsilon>0$，设l充分大，使得

$$\|f_s-f_t\|_p<\varepsilon,\quad s,t\geqslant n_l.$$

那么当$k\geqslant l$，$m>n_l$时，便有

$$\|f_m-f_{n_k}\|_p<\varepsilon.$$

根据Fatou引理（12.23），则有

$$\int|f-f_m|^p d\mu=\int\varliminf_{k\to\infty}|f_{n_k}-f_m|^p d\mu$$

$$\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int|f_{n_k}-f_m|^p d\mu\leqslant\varepsilon^p.$$

这样，对于每个$m>n_l$，函数$f-f_m$便属于$\mathfrak{L}_p$，从而$f=f-f_m+f_m$也属于$\mathfrak{L}_p$；而且

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0. \quad \square$$

(13.12) **评注** 当$1\leqslant p<\infty$时，函数空间$\mathfrak{L}_p^r$(μ-a.e.定义在X上并满足$\|f\|_p=(\int|f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}<\infty$的实值$\mathscr{A}$可测函数全体)为实赋范线性空间，并且还是完备的. 其证明很类似于就复空间$\mathfrak{L}_p$情况的证明.

(13.13) **例** 设D是任意非空集，试考虑D上满足$\sum\limits_{x\in D}|f(x)|^p<\infty$ ($0<p<\infty$)的复值函数f全体. [忆及

$$\sum_{x\in D}|f(x)|^p=\sup\left\{\sum_{x\in F}|f(x)|^p: F\text{是}D\text{的有限子集}\right\}.$$

]如果$\mathscr{A}$是D的子集全体，μ是(10.4.a)所定义的计数测度，那么这些函数都是$\mathfrak{L}_p(D, \mathscr{A}, \mu)$的元素，习惯上，这个空间记为$l_p(D)$，当$D=N$时，就简记为$l_p$. 假如$1\leqslant p<\infty$，则$l_p(D)$是一个完备度量空间，其中度量是由范数

$$\|f\|_p=\left(\sum_{x\in D}|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

决定的.

Hölder不等式及Minkowski不等式分别具有如下形式：

$$\sum_{x\in D}|f(x)g(x)|\leqslant\left(\sum_{x\in D}|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{x\in D}|g(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

及

$$\left(\sum_{x\in D}|f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{x\in D}|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{x\in D}|g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

如果D有限，比如说$D=\{1, 2, \cdots, n\}$，那么前述事实便引出K^n和R^n上的l_p范数及其相应度量. 两点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$之间的距离为$\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 当$p=2$

时，便得到古典Euclid度量，由K^n和R^n上的l_p度量生成的拓扑则是完全一样的〔参看（6.17）〕.

图7表示当p等于不同值时，R^2中单位球的第一象限情况.

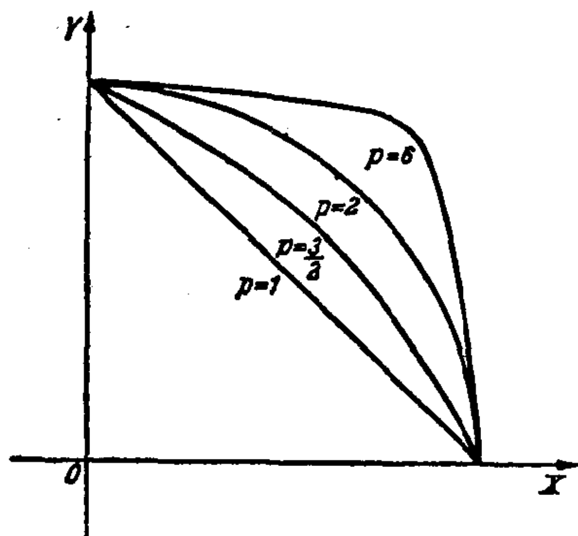


图 7

（13.14）例 空间$\mathfrak{L}_p([0,1])$和$\mathfrak{L}_p(R)$，其中$0<p<\infty$（当然$\mu=\lambda$，$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$），在纯粹分析与应用分析中都是极其重要的函数空间.

（13.15）例 当$p=2$时，我们得到有名的函数空间$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$. 这时$p=p'=2$，因而对于$f$，$g\in\mathfrak{L}_2$，Hölder不等式具有以下形式

$$\int|fg|\,d\mu\leqslant\|f\|_2\|g\|_2$$

试考虑按以下规则把$\mathfrak{L}_2\times\mathfrak{L}_2$映入$K$的映射：

$$(f,g)\to\int f\bar{g}\,d\mu=\langle f,g\rangle,$$

其中等式定义了$\langle f,g\rangle$. 这个映射具有下列性质：

$$\langle f_1+f_2,g\rangle=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle;$$

$$\langle\alpha f,g\rangle=\alpha\langle f,g\rangle,\quad\alpha\in K;$$

$$\overline{\langle f,g\rangle}=\langle g,f\rangle;$$

$$\langle f,f\rangle>0,\quad f\neq0.$$

从这些恒等式可推出（或者说可直接得出）：

$$\langle f,g_1+g_2\rangle=\langle f,g_1\rangle+\langle f,g_2\rangle,$$

$$\langle f,\alpha g\rangle=\bar{\alpha}\langle f,g\rangle,$$

$$\langle 0,f\rangle=\langle f,0\rangle=0.$$

空间$\mathfrak{L}_2$可以抽象地明确表述如下.

（13.16）定义 设H是K上一个线性空间，并具有把$H\times H$映入K的一个内积

$$(x,y)\to\langle x,y\rangle\in K,$$

满足以下条件①

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,$$
$$\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle,\alpha\in K,$$
$$\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle,$$
$$\langle x,x\rangle>0,x\neq 0.$$

〔可以由上述关系式证明：（13.15）中就$\mathfrak{L}_2$所列出的$\langle\ ,\ \rangle$的其他性质对于H也是成立的.〕则称H为一个**内积空间**或**准Hilbert空间**.

设$x\in H$，规定

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

可以证明以下两个不等式成立：

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

这样，H便成为一个赋范线性空间. 如果H按照这一范数是完备的，则称H为一个**Hilbert空间**.

对Hilbert空间的研究，已形成内容极其广泛的理论. 后面§16要学习这一理论的基础知识. 这一理论最引人注目的事实之一是，凡Hilbert空间都可以看作与某个$l_2(D)$在Hilbert空间意义下是等同的. 这样，特别说来，凡$\mathfrak{L}_2$空间都认为与某个空间$l_2(D)$一致. 我们在（16.29）要论述这一识别问题.

我们现在回到空间$\mathfrak{L}_p$，证明几个比较简单的定理.

（13.17） **定理** 如果$\mu(X)<\infty$，$0<p<q<\infty$，则$\mathfrak{L}_q\subset\mathfrak{L}_p$，并且当$f\in\mathfrak{L}_q$时，成立不等式

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_q(\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

证 命$r=\dfrac{q}{p}>1$. 对于任意$f\in\mathfrak{L}_q$，有

①读者留意，内积所满足的条件蕴涵着：(i)$\langle x,x\rangle\geqslant 0$. (ii)$\langle x,x\rangle=0$的充要条件是$x=0$. ——译者注

$$\int |f|^p d\mu \leqslant \left(\int |f|^{pr} d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int 1^{r'} d\mu \right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$= \left(\int |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}}.$$

由此可见$f \in \mathfrak{L}_p$，并且

$$\| f \|_p \leqslant \| f \|_q (\mu(X))^{\frac{q-p}{pq}} = \| f \|_q (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

(13.18) 定理 如果$0 < p < q < \infty$，则$l_p(D) \subset l_q(D)$；当D无限时，这一包含关系是真包含关系.

证 假设$f \in l_p(D)$；则有

$$\sum_{x \in D} |f(x)|^q = \sum_{x \in D} |f(x)|^p |f(x)|^{q-p}$$

$$\leqslant A^{q-p} \sum_{x \in D} |f(x)|^p,$$

其中A是一个常数，使对于任意$x \in D$，都有$|f(x)| < A$. 读者该不难举例说明，当D无限时，包含关系是真包含关系. $\square$

(13.19) 定理 设$f \in \mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q$，其中$0 < p < q < \infty$，又设$p < r < q$，则$f \in \mathfrak{L}_r$. 同时，$[p, q]$上由

$$\varphi(r) = \log(\| f \|_r^r)$$

定义的函数φ为凸的，就是说，$0 < \alpha < 1$蕴涵

$$\varphi(\alpha p + (1-\alpha)q) \leqslant \alpha\varphi(p) + (1-\alpha)\varphi(q).$$

证 命$r = \alpha p + (1-\alpha)q$，$0 < \alpha < 1$. 利用关于$\frac{1}{\alpha}$的Hölder不等式(注意，$\left(\frac{1}{\alpha}\right)' = \frac{1}{1-\alpha}$)，得到

$$\int |f|^r d\mu = \int |f|^{\alpha p + (1-\alpha)q} d\mu$$

$$\leqslant \left(\int |f|^{\alpha p \cdot \frac{1}{\alpha}} d\mu \right)^{\alpha} \left(\int |f|^{(1-\alpha)q \frac{1}{1-\alpha}} d\mu \right)^{1-\alpha}$$

$$=\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\alpha}\left(\int |f|^q d\mu\right)^{1-\alpha}.$$

〔注意，函数$|f|^{\alpha p}$及$|f|^{(1-\alpha)q}$分别属于$\mathfrak{L}_{\frac{1}{\alpha}}$及$\mathfrak{L}_{(\frac{1}{\alpha})'}$．〕由此得到$f\in\mathfrak{L}_{\alpha p+(1-\alpha)q}$，而且

$$\|f\|_{\alpha p+(1-\alpha)q}^{\alpha p+(1-\alpha)q}\leqslant(\|f\|_p^p)^{\alpha}(\|f\|_q^q)^{1-\alpha}.$$

这一不等式两边取对数，便得到

$$\varphi(\alpha p+(1-\alpha)q)\leqslant\alpha\varphi(p)+(1-\alpha)\varphi(q),$$

这就是说，φ是凸的．□

(13.20)　定理　设有任意$\mathfrak{L}_p$，$1\leqslant p<\infty$．则对于每个$f\in\mathfrak{L}_p$及每个$\varepsilon>0$，必存在一个简单函数$\sigma\in\mathfrak{L}_p$，它满足$|\sigma|\leqslant|f|$，$\|\sigma-f\|_p<\varepsilon$．特别说来，$\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p$在$\mathfrak{L}_p$中稠密．

证　首先注意到$\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p\subset\mathfrak{L}_p$．其次假设$f\geqslant0$，$f\in\mathfrak{L}_p$．根据（11.35），必存在一个非减的非负简单函数序列(s_n)，满足$s_n(x)\to f(x)$　μ-a.e.对于每个$n\in N$，有

$$|f-s_n|^p\leqslant f^p\in\mathfrak{L}_1.$$

由关于控制收敛的Lebesgue定理（12.24）知道

$$\lim_{n\to\infty}\int|f-s_n|^p d\mu=\int\lim_{n\to\infty}|f-s_n|^p d\mu=0,$$

从而可取$s_n\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p$，使得$s_n\leqslant f$，而$\|s_n-f\|_p$为任意小．对于任意$f\in\mathfrak{L}_p$，记$f=f_1-f_2+i(f_3-f_4)$，其中$f_j\in\mathfrak{L}_p^+$，$f_1f_2=f_3f_4=0$．任给$\varepsilon>0$，取$\sigma_j\in\mathfrak{L}_p^+\cap\mathfrak{S}$，使$\sigma_j\leqslant f_j$，$\|\sigma_j-f_j\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$（$j\in\{1,2,3,4\}$）．规定$\sigma$为$\sigma_1-\sigma_2+i(\sigma_3-\sigma_4)$；显然$\sigma$属于$\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p$．同时有

$$\|f-\sigma\|_p\leqslant\sum_{j=1}^{4}\|f_j-\sigma_j\|_p<\varepsilon,$$

而

$$|\sigma|^2=(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_3-\sigma_4)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{4}\sigma_j^2\leqslant\sum_{j=1}^{4}f_j^2=|f|^2.\ \square$$

(13.21) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι是§9所说的X上任意测度，$\mathscr{M}_\iota$是ι可测集所成的σ代数. 则当$1\leqslant p<\infty$时，$\mathfrak{C}_{00}(X)\subset\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$，而$\mathfrak{C}_{00}(X)$在$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$中稠密. 就是说，如果$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$，并任给$\varepsilon>0$，则存在一个函数$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，适合$\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$. 此外，当$f$有界时，则可取$\varphi$，使$\|\varphi\|_u\leqslant\|f\|_u$.

证 当$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(X)$时，则存在一个紧集$F$（比如说$\varphi$的支集），满足$|\varphi|^p\leqslant\|\varphi\|_u^p\xi_F$. 由于$\iota(F)<\infty$，可见$\varphi\in\mathfrak{L}_p$.

设$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$，给定$\varepsilon>0$. 应用(13.20)，求得一个函数$\sigma\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p$，适合$|\sigma|\leqslant|f|$，$\|f-\sigma\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$\sigma$仅取有限多个复数值，显而易见$\|\sigma\|_u<\infty$. 假如$\sigma=0$，那么$\sigma\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，这就完成了证明. 因此假定$\|\sigma\|_u=M>0$.

命$E=\{x\in X:\sigma(x)\neq 0\}$. 既然$\sigma\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{L}_p$，便有$\iota(E)<\infty$. 应用Luzin定理(11.36)，求得一个函数$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}$，满足：$\|\varphi\|_u\leqslant M$，而且当$A=\{x\in X:\varphi(x)\neq\sigma(x)\}$时，有$\iota(A)<\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p$. 所以得到

$$
\begin{aligned}
\|f-\varphi\|_p&\leqslant\|f-\sigma\|_p+\|\sigma-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}\\
&\quad+\left(\int_X|\sigma-\varphi|^p d\iota\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+\left(\int_A|\sigma-\varphi|^p d\iota\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left(\int_A(2M)^p d\iota\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\iota(A)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.\ \square
\end{aligned}
$$

(13.22) 定义 所谓R**上的阶梯函数**，指的是形如$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{I_k}$的任意函数，这里$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$都是复数，每个$I_k$是有界区间（开的、闭的或半开的）.

(13.23) **定理** 设ι为§9所说的R上任意测度，$1\leqslant p<\infty$. 则R上阶梯函数构成$\mathfrak{L}_p(R, \mathscr{M}_\iota, \iota)$的一个稠密子集。

证 很明显，每个阶梯函数必有界，在一个紧集外部等于零，因而凡阶梯函数都属于$\mathfrak{L}_p$.

设$f\in\mathfrak{L}_p$，给定$\varepsilon>0$. 利用(13.20)，求出一个简单函数$\sigma\in\mathfrak{L}_p$，使$\|f-\sigma\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$，比如说$\sigma=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\xi_{B_j}$，其中对于一切$j$，都有$B_j\in\mathscr{M}_\iota$. 既然$\sigma\in\mathfrak{L}_p$，就不妨假设对于一切$j$，都有$\iota(B_j)<\infty$. 命

$$\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\left(1+\sum_{j=1}^{m}|\beta_j|\right)}\right)^p,$$

并固定$\{1, 2, \cdots, m\}$中的j. 利用(9.24)，得到一个开集U_j，使$B_j\subset U_j$，$\iota(U_j)<\iota(B_j)+\delta$. 由(6.59)知道，$U_j=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{j,k}$，其中诸$I_{j,k}$都是两两不相交的开区间. 则有$\sum_{k=1}^{\infty}\iota(I_{j,k})=\iota(U_j)<\infty$，从而可取$k_0$，使$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\iota(I_{j,k})<\delta$. 命

$$V_j=\bigcup_{k=1}^{k_0}I_{j,k},\quad W_j=U_j\cap V_j'.$$

则立即看出

$$\iota(W_j)<\delta,\quad V_j\triangle B_j\subset(U_j\cap B_j')\cup W_j,$$
$$\iota(V_j\triangle B_j)\leqslant\iota(U_j\cap B_j')+\iota(W_j)<2\delta.$$

因而

$$\|\xi_{B_j}-\xi_{V_j}\|_p=\|\xi_{V_j\triangle B_j}\|_p<(2\delta)^{\frac{1}{p}}.$$

再命$s=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\xi_{V_j}$. 因为每个$V_j$是有限个区间之并，所以$s$是阶

梯函数．同时

$$\|\sigma-s\|_p=\left\|\sum_{j=1}^{m}\beta_j(\xi_{B_j}-\xi_{V_j})\right\|_p$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}|\beta_j|\cdot\|\xi_{B_j}-\xi_{V_j}\|_p$$

$$<(2\delta)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\beta_j|\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$\|f-s\|_p\leqslant\|f-\sigma\|_p+\|\sigma-s\|_p<\varepsilon.\qquad\square$$

空间$\mathfrak{L}_p(R,\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$中的范数具有一种既饶有兴味，又有实用价值的连续性特征，我们现在来证明这一属性．请读者复习一下R上函数f由实数h产生的平移f_h的定义（8.14）．

(13.24) 定理 设$X=R$，λ照常为Lebesgue测度．又设p为一实数，$1\leqslant p<\infty$，f是$\mathfrak{L}_p(R,\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$中任意函数．则

(i) $\lim\limits_{h\downarrow 0}\|f_h-f\|_p=\lim\limits_{h\uparrow 0}\|f_h-f\|_p=0$.

证 给定任意正数ε．应用（13.21），取$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，满足$\|\varphi-f\|_p<\dfrac{\varepsilon}{3}$．那么$\varphi$一致连续（7.18），同时，还存在一个正实数$\alpha$，使当$|t|\geqslant\alpha$时，有$\varphi(t)=0$．取$\delta>0$，但$\delta<1$，并且当$|h|<\delta$时，成立

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

于是当$|h|<\delta$时，便推出

$$\int_R|\varphi(t+h)-\varphi(t)|^p dt$$

$$=\int_{-(\alpha+1)}^{\alpha+1}|\varphi(t+h)-\varphi(t)|^p dt<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

也就是说

$$\|\varphi_h-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{3}.$$

根据（12.44），显而易见，对于任意$h\in R$，成立

$$\|\varphi_h-f_h\|_p=\|\varphi-f\|_p,$$

从而当$|h|<\delta$时，便得到

$$\|f_h-f\|_p\leqslant\|f_h-\varphi_h\|_p+\|\varphi_h-\varphi\|_p+\|\varphi-f\|_p<\varepsilon.\ \square$$

（13.25） **习题** 设p为一实数，$0<p<1$．又设$(X,\mathscr{A},\mu)$是任意一个测度空间，f，g是$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$中两个函数．

（a） 试证：

（i） $$\|f+g\|_p\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

〔提示．当$0\leqslant t<\infty$时，证明

$$1+t^p\geqslant(1+t)^p.$$

由此可推知

$$\|f+g\|_p^p\leqslant\|f\|_p^p+\|g\|_p^p.$$

其次考虑函数

$$\psi(t)=(1+t^{\frac{1}{p}})(1+t)^{-\frac{1}{p}}.$$

函数ψ在$[0,\infty[$内$t=1$处刚好有一个极小值．计算这一极小值，自然就可以证明(i)．〕

（b） 试证：$\rho(f,g)=\|f-g\|_p^p$是$\mathfrak{L}_p$上一个度量，按照这一度量，$\mathfrak{L}_p$成为一个完备度量空间．〔提示．仿照（13.11）的证明．〕

（c） 假设X含有两个不相交的$\mathscr{A}$可测集A和B，其中每一个都具有正的有限μ测度．试证：$\|\ \|_p$并不是范数，即证必存在两个函数$f,g\in\mathfrak{L}_p$，使得

$$\|f+g\|_p>\|f\|_p+\|g\|_p.$$

〔把数$\frac{1}{p}$写成q．注意到：对于任意正实数t，都成立$(1+t)^q > 1+t^q$．命$f=\alpha\xi_A$，$g=\beta\xi_B$，其中α，β都是正实数．然后通过计算f，g，$f+g$的$\mathfrak{L}_p$范数，并利用刚才所提供的不等式，我们可以选取α，β，以解决所给的问题．〕

(d) 本小题中，设p是任意一个正数．假定凡是$\mathscr{A}$中具有正的有限μ测度的两个集都相交．试确定$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$的完整结构．据此，试证明对于一切$p>0$，$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$都是平凡赋范线性空间．〔提示．假如根本不存在具有正的有限μ测度的集，那么每个$\mathfrak{L}_p$都成为$\{0\}$．然后假设存在某个集，它具有正的有限μ测度．则于题设条件下，所有$\mathfrak{L}_p$无非都变成K．〕

(13.26) **习题　广义Hölder不等式．** 设α_1，α_2，…，α_n都是正实数，并且$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$．则对于$\mathfrak{L}_1^+$中的$f_1$，$f_2$，…，$f_n$，有

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{L}_1^+,$$

并成立

$$\int_X (f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}) d\mu \leqslant \| f_1 \|_1^{\alpha_1} \| f_2 \|_1^{\alpha_2} \cdots \| f_n \|_1^{\alpha_n}.$$

(13.27) **习题**　试仔细写出并证明当$p=1$以及$1<p<\infty$时Minkowski不等式中等号成立的条件．

(13.28) **习题**　设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι与$\mathscr{M}_\iota$照常．假定$\iota(X)>0$，并且对于任意$x\in X$，都有$\iota(\{x\})=0$．设p是任意正数．

(a) 试求一个函数$f\in\mathfrak{L}_p$，使对于任意$\delta>0$，都有$f\notin\mathfrak{L}_{p+\delta}$．

〔提示．利用(12.59)以及对于任意$\delta>0$，都有$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n\delta}}{n^2} = \infty$这一事实．〕

(b) 试求X上一个函数f，使对于任意$\delta>0$，都有$f\in\mathfrak{L}_{p-\delta}$，

而$f\notin \mathfrak{L}_p$.〔忆及$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$当$\alpha>1$时收敛，当$0<\alpha\leqslant 1$时发散.〕

(c) 试求一个非负实值函数，它不属于任何$\mathfrak{L}_p$.

(13.29) **习题** 考虑集〔$0,\infty$〔以及其上的Lebesgue测度λ. 对于每个$p>0$，试求〔$0,\infty$〔上一个函数f，使$f\in\mathfrak{L}_p$，而当$p\neq q$时，$f\notin\mathfrak{L}_q$. [提示. 可考虑函数g，其定义为$g(x)=\dfrac{1}{x(1+|\log(x)|^2)}$.]

(13.30) **习题** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个有限测度空间，f是X上任意一个有界可测函数. 试证：

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\inf\{\alpha\in R:\alpha>0,\ \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\})=0\}.$$

(13.31) **习题** 设p是一个实数，$1\leqslant p<\infty$，f是$\mathfrak{L}_p(R)$中一个函数，而且f是一致连续的. 试证$f\in\mathfrak{C}_0(R)$. 并举例说明每个$\mathfrak{L}_p(R)$含有一个无界连续函数.

(13.32) **习题** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，并且$\mu(X)=1$，又f是$\mathfrak{L}_1^+(X,\mathscr{A},\mu)$中一个函数. 规定$\log(0)$为$-\infty$.

(a) 试证：

(i) $$\int_X \log f(x)d\mu(x)\leqslant\log\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right).$$

〔提示. 当$0\leqslant t<\infty$时验证不等式$\log(t)\leqslant t-1$. 以$\dfrac{1}{\|f\|_1}\cdot f(x)$代替$t$，并积分. 〕

(b) 试证：(i)中等号成立的充要条件是f几乎处处是一个常值函数. 〔提示. 当$t\neq 1$时验证不等式$\log(t)<t-1$. 〕

(c) 试证：

(ii) $$\lim_{r\downarrow 0}\|f\|_r=\exp\left[\int_X \log f(x)d\mu(x)\right].$$

〔提示．证明当$r\downarrow 0$时，$(f^r-1)/r$递减地趋于$\log f$，然后应用单调收敛定理证明

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{-1}\left(\int_X f^r d\mu - 1\right) = \int_X \log f d\mu.$$

利用(i)证明

$$\frac{1}{r}\left[\int_X f^r d\mu - 1\right] \geqslant \frac{1}{r}\log\int_X f^r d\mu \geqslant \frac{1}{r}\int_X \log(f^r) d\mu$$

$$= \int_X \log f d\mu.\ \Big]$$

(13.33) **习题** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，p是任意一个正实数．试证：如果f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$在$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$中，并且$\|f-f_n\|_p \to 0$，则依测度$f_n \to f$．试求一个序列$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}_p([0, 1], \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$，满足条件：依测度$f_n \to 0$，但$\|f_n\|_p$不收敛于0．

(13.34) **习题：凸函数** 设I是R的一个区间，定义在I上的一个实值函数Φ，如果只要$a, b \in I$，$a < b$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，就有

$$\Phi(ta + (1-t)b) \leqslant t\Phi(a) + (1-t)\Phi(b),$$

则称Φ为**凸函数**．这一定义中条件的等价说法是，Φ在区间$[a, b]$上的图形不会位于连接$(a, \Phi(a))$与$(b, \Phi(b))$两点所成弦（线段）的上方．设Φ是一个凸函数．

(a) 试证：如果$t_1, \cdots, t_n$都是正实数，$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset I$，则

(i) $$\Phi\left(\frac{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + \cdots + t_n}\right) \leqslant \frac{t_1\Phi(x_1) + \cdots + t_n\Phi(x_n)}{t_1 + \cdots + t_n}.$$

（用归纳法．）

(b) 试证：Φ在I的内部I^0是连续的，并举例说明Φ在I的端点则可能间断．

(c) 试证：当 c 属于 I^0 时，则存在一个实数 α，使对于任意 $u\in \dot{I}$，都有 $\Phi(u)\geqslant\alpha(u-c)+\Phi(c)$，这就是说，过 $(c,\Phi(c))$ 并具有斜率 α 的直线总位于 Φ 的图形上或者位于其下方.

(d) 试证明不等式(i)的以下推广. 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个有限测度空间. 如果 $f\in \mathfrak{L}_1^r(X,\mathscr{A},\mu)$, $f(X)\subset I$, $\Phi\circ f\in \mathfrak{L}_1^r(X,\mathscr{A},\mu)$，则

$$\text{(ii)}\quad \Phi\left[\frac{1}{\mu(X)}\int_X fd\mu\right]\leqslant\frac{1}{\mu(X)}\int_X(\Phi\circ f)d\mu.$$

不等式(i)和(ii)叫做 **Jensen 不等式**①. 〔提示. 命 c 于 $\frac{1}{\mu(X)}\int_X fd\mu$. 证明 $c\in I$. $c\in I^0$ 的情况，α 如(c)中所设. 则对任意 $x\in X$，都成立

$$\Phi\circ f(x)\geqslant\alpha(f(x)-c)+\Phi(c).$$

然后积分这一不等式两边. 另一种情况则是很容易证明的. 〕

(13.35) 习题 设 φ 是定义在区间 $[a,b[\subset R$ 上的一个实值非减函数. 对于 $a\leqslant x<b$，命 $\Phi(x)=\int_a^x\varphi(u)du$. 试证 Φ 是 $[a,b[$ 上的凸函数.

(13.36) 习题 Φ, Ψ 如Young不等式(13.2)中所设. 又设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个 σ 有限测度空间，$\mathfrak{L}_\Phi^+$ 表示 X 上满足 $\Phi\circ|f|\in\mathfrak{L}_1^+(X,\mathscr{A},\mu)$ 的复值 $\mathscr{A}$ 可测函数 f 全体所成的集.

(a) 当 Φ 急剧递增时，则可能出现 $f\in\mathfrak{L}_\Phi^+$，而 $2f\notin\mathfrak{L}_\Phi^+$ 的情况. 试举一例. $\left[\text{试用}\varphi(u)=\exp(u)-1，f(t)=\log\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).\right]$

设 $\mathfrak{L}_\Phi$ 是 X 上适合以下条件的复值 $\mathscr{A}$ 可测函数 f 全体所成的集：

---

①上述凸函数概念是由J.L.W.V.Jensen（丹麦数学家，1859—1925）提出的. 请参看：J.L.W.V.Jensen，*Sur les fonctions convexes et les inégatités entre les valeurs moyennes*. Acta Math., 30(1906). 175—193. ——译者注

$$\|f\|_{\Phi}=\sup\{\|fg\|_1 : g\in\mathfrak{L}_{\Phi}^{t},\ \int_X \Psi\circ|g|\,d\mu\leqslant 1\}<\infty.$$

试证：

(b) $\mathfrak{L}_{\Phi}^{t}\subset\mathfrak{L}_{\Phi}$〔利用（13.2）〕；

(c) $\mathfrak{L}_{\Phi}$是复线性空间；

(d) $\|\ \|_{\Phi}$是$\mathfrak{L}_{\Phi}$上的范数，这里把a.e.相等的函数看作是等同的；

(e) 按照范数$\|\ \|_{\Phi}$，$\mathfrak{L}_{\Phi}$成为一个Banach空间.〔先假设$\mu(X)<\infty$. 证明：如果$\|f_n-f_m\|_{\Phi}\to 0$，则$\|f_n-f_m\|_1\to 0$.〕

空间$\mathfrak{L}_{\Phi}$叫做**Birnbaum-Orlicz空间**. 欲知其详，请参阅Zaanen①.

(13.37) **习题** 〔0，∞〔上规定Φ如下：

$$\Phi(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ t\cdot\log t, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

Birnbaum-Orlicz空间$\mathfrak{L}_{\Phi}(X,\mathscr{A},\mu)$〔见（13.36)〕常记作$\mathfrak{L}\log^{+}\mathfrak{L}$. 试证：就测度空间（〔0，1〕，$\mathscr{M}_1$，$\lambda$）而言，当$p>1$时，有

$$\mathfrak{L}_p\subset\mathfrak{L}\log^{+}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}_1.$$

在Fourier分析中会很自然地出现空间$\mathfrak{L}\log^{+}\mathfrak{L}$，请参看比如Zygmund②以及后面定理（21.80）.

(13.38) **习题：Vitali收敛定理** 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是一个测度空间，$1\leqslant p<\infty$. 又设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$中一个序列，$f$是一个$\mathscr{A}$可测函数，并且$f$是$\mu$-a.e.有限的，$f_n\to f$ μ-a.e. 则$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$及$\|f-f_n\|_p\to 0$的充要条件是

(i) 对于每个$\varepsilon>0$，存在一个集$A_\varepsilon\in\mathscr{A}$，满足条件：

---

① A. C. Zaanen, *Linear Analysis*, Vol. I, New York: Interscience Publishers, 1953.

② A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 第二版, 2 Vols. Cambridge University Press, Cambridge. 1959.

$\mu(A_\varepsilon)<\infty$，又对于任意$n\in N$，都有$\int_{A'_\varepsilon}|f_n|^p d\mu<\varepsilon$；及

(ii) 对于n一致地成立

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E |f_n|^p \mathrm{d}\mu=0,$$

就是说，对于每个$\varepsilon>0$，有一个$\delta>0$，使当$E\in\mathscr{A}$，$\mu(E)<\delta$时，对于任意$n\in N$，都有

$$\int_E |f_n|^p d\mu<\varepsilon.$$

试证明这一定理.〔为了证明(i)的必要性，设给定$\varepsilon>0$，取$n_0\in N$，使对于任意$n\geqslant n_0$，有$\|f-f_n\|_p<\varepsilon$. 取具有有限测度的B_ε，$C_\varepsilon\in\mathscr{A}$，使$\int_{B'_\varepsilon}|f|^p d\mu<\varepsilon$，$\int_{C'_\varepsilon}|f_n|^p d\mu<\varepsilon$（$n=1,\cdots,n_0$）. 然后命$A_\varepsilon=B_\varepsilon\cup C_\varepsilon$. 利用（12.34）可类似证明(ii)的必要性. 其次假设(i)，(ii)成立. 利用(i)、Fatou引理、Minkowski不等式把问题化为$\mu(X)<\infty$的情况. 设$\varepsilon>0$，δ如(ii)中所设. 利用Egorov定理求出$B\in\mathscr{A}$，满足：$\mu(B)<\delta$，并且在B'上一致地成立$f_n\to f$. 利用Fatou引理证明$\int_B|f|^p d\mu\leqslant\varepsilon$. 然后利用Minkowski不等式证实：对于一切充分大的n，有$\int_X|f-f_n|^p d\mu<3^p\varepsilon$. 这样一来，就可得出结论：$f=(f-f_n)+f_n\in\mathfrak{L}_p$，$\|f-f_n\|_p\to 0$.〕

Vitali收敛定理在理论上相当重要，此外还常应用它去证明其他一些有用的定理. 下一个习题也很有实用价值〔比如参看后文（20.58）〕，因此对其证明作了充分提示.

(13.39) **习题** $(X,\mathscr{A},\mu)$，p，(f_n)，f皆如(13.38)所设. 假定$f_n\to f$ μ-a.e.对于每对$(n,k)\in N\times N$，命

$$B_{n,k}=\{x\in X:|f_n(x)|^p\geqslant k\}.$$

(a) 假如条件（13.38.i）成立〔例如就设$\mu(X)<\infty$〕，试证明下列四个断言等价：

(i) $f\in\mathfrak{L}_p$，$\|f-f_n\|_p\to 0$；

(ii) 如果$(E_k)_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$，$E_1\supset E_2\supset\cdots$，$\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\varnothing$，则对于$n$一致地有$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f_n|^p d\mu=0$；

(iii) 对于n一致地有$\lim_{k\to\infty}\int_{B_{n,k}}|f_n|^p d\mu=0$①；

(iv)条件(13.38.ii)成立。

〔提示．根据(13.38)，(i)和(iv)这两个断言是等价的．为了证明(i)蕴涵(ii)，考虑$\varepsilon>0$以及$n_0\in N$，使当$n\geqslant n_0$时，就有$\|f_n-f\|_p<\varepsilon$．那么当$n\geqslant n_0$时，便得到

$$\left(\int_{E_k}|f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_{E_k}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E_k}|f_n-f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$<\left(\int_{E_k}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon\text{；}\qquad(1)$$

现在把控制收敛性应用于$(|f|^p\xi_{E_k})_{k=1}^{\infty}$，证明对于$k\geqslant k_0$及一切$n\geqslant n_0$，(1)小于$2\varepsilon$．当$n\in\{1,\cdots,n_0\}$时，则

$$\int_{E_k}|f_n|^p d\mu\leqslant\int_{E_k}\max\{|f_1|^p,\cdots,|f_{n_0}|^p\}d\mu,$$

而控制收敛性便蕴涵(ii)．

其次假设(ii)成立，记$E_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}B_{n,k}$．显然$E_1\supset E_2\supset\cdots$，并且在$\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$上$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x)|=\infty$，所以$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=0$；记$F_k=E_k\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)'$．利用(ii)，取$k_0$，使当$k\geqslant k_0$时，对于一切$n$，有

---

①称满足(iii)的序列$(|f_n|^p)_{n=1}^{\infty}$为**一致可积的**。

$$\int_{F_k} |f_n|^p d\mu < \varepsilon .$$

当 $n \geqslant k_0$时，有$B_{n,k_0} \subset E_{k_0}$，从而当$n \geqslant k_0$，$k \geqslant k_0$时，可得

$$\int_{B_{n,k}} |f_n|^p d\mu \leqslant \int_{B_{n,k_0}} |f_n|^p d\mu \leqslant \int_{E_{k_0}} |f_n|^p d\mu$$

$$= \int_{F_{k_0}} |f_n|^p d\mu < \varepsilon .$$

因为当 $n \in \{1, \cdots k_0 - 1\}$ 时，有 $|f_n|^p \leqslant \max\{|f_1|^p, \cdots, |f_{k_0-1}|^p\} = g$，所以

$$\int_{B_{n,k}} |f_n|^p d\mu \leqslant \int_{B_k} g d\mu,$$

其中$B_k = \bigcup_{n=1}^{k_0-1} B_{n,k} = \{x \in X : g(x) \geqslant k\}$. 这样，便可以应用控制收敛性，从而当(ii)成立时，(iii)也成立.

最后，假设(iii)成立. 取k_0充分大，使当 $k \geqslant k_0$，$n \in N$ 时，有

$$\int_{B_{n,k}} |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

如果$E \in \mathscr{A}$，$\mu(E) < k_0^{-1}\varepsilon^p$，那么

$$\left(\int_E |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{E \cap B_{n,k_0}} |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_{E \cap B'_{n,k_0}} |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon + \varepsilon .$$

所以当(iii)成立时，(iv)也成立.

(b) 试证(a)中的条件(ii)蕴涵(13.38.i)和(13.38.ii)这两个条件.

(13.40) **讨论** 本节最后，我们研究一下$\mathfrak{L}_p$空间中的收敛概

念，它不同于范数收敛．迄今为止，我们已论述了四类重要的函数序列收敛的概念，这就是：一致(unif.)；点态几乎处处(a.e.)；依测度（meas.）①；依$\mathfrak{L}_p$范数（mean-p）①．我们化了不少力气仔细研究了这四类收敛之间的关系．现概述其主要结果．

自然，(unif.)蕴涵(a.e.)，实际上蕴涵"处处"．容易举例说明反过来不对．然而，由（9.6）不难推知，假如X是一个紧Hausdorff空间，(f_n)是$\mathfrak{C}^r(X)$中一个单调序列，或者点态收敛于函数$f\in\mathfrak{C}^r(X)$的一个有向族，那么必一致地有$f_n\to f$．（这一事实叫做**Dini定理**．）这方面最为有用的结果当推Egorov定理（11.32）．

(a.e.)与（meas.）之间的关系曾于（11.26），（11.27），（11.31）及(11.33)充分研究过．当(a.e.)的假设减弱为(meas.)，在解决这类问题时，Riesz定理往往极有价值〔参见后文（13.45），以及（12.57）〕．

有不少定理，涉及到交换极限和积分的次序，诸如（12.21）—（12.24），（12.30），（13.38），（13.39）等等，皆属此类．这些定理都可看作建立了(a.e.)与（mean-p）之间的联系．

（13.33）阐述了（meas.）与（mean-p）之间的关系．显而易见，在有限测度空间上，（unif.）比（meas.）或（mean-p）都要强得多，但是就无限测度空间而言，则不能从其一推出另一类．

我们现在就$\mathfrak{L}_p$空间中的函数，引进第五种收敛，并研究它与以上所考虑的概念之间的关系．

(13.41) **定义** 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是一个测度空间，$1\leqslant p<\infty$，f和$(f_n)_{n=1}^{\infty}$都是$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$中的函数，当$p>1$时，如果对于任意$g\in\mathfrak{L}_{p'}$，都有

---

①"测度"的英文是*measure*．而(f_n)依$\mathfrak{L}_p$范数收敛于f，即$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$，也称$(f_n)$为**$p$方平均**（*in mean of power p*）**收敛于**f．因此这种收敛简记为mean-p．——译者注

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu=\int_X fg\,d\mu,$$

就说(f_n)（在$\mathfrak{L}_p$中）**弱收敛**于f. 当$p=1$时，如果对于X上任意有界$\mathscr{A}$可测函数g，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu=\int_X fg\,d\mu,$$

就说(f_n)（在$\mathfrak{L}_1$中）**弱收敛**于f. 把(f_n)弱收敛于f记作$f_n\overset{(w)}{\to}f$①.

(13.42) **定理** 记号如(13.41)所设. 如果$\|f-f_n\|_p\to 0$，则$f_n\overset{(w)}{\to}f$.

证 由Hölder不等式便直接得出本定理. □

(13.43) **例** 我们现在举几例说明，如果不对序列或测度空间作进一步假设，那么在弱收敛与(13.40)所讨论的四种收敛之间便没有任何关系〔当然要除去(13.42)所说的关系〕. 以下各例都采用Lebesgue测度λ.

(a) 对于每个$n\in N$，在$[0,2\pi]$上规定f_n为$f_n(x)=\cos(nx)$. 那么当$p\geqslant 1$时，$(f_n)\subset\mathfrak{L}_p([0,2\pi])$. Riemann-Lebesgue引理〔后文(16.35)要证明它〕表明，当$p\geqslant 1$时，$f_n\overset{(w)}{\to}0$. 由于对于任意$n\in N$，都有$\int_0^{2\pi}f_n^2\,d\lambda=\pi$，(12.24)及(12.57)则说明，就其他四种收敛来说，都不会有$f_n\to 0$.

(b) 取$f_n=\frac{1}{n}\xi_{[0,\frac{1}{n}]}$. 那么当$p\geqslant 1$时，$(f_n)\subset\mathfrak{L}_p([0,1])$，$f_n\to 0$ a.e.，同时依测度$f_n\to 0$，但f_n不弱收敛于0（取$g=\xi_{[0,1]}$）.

(c) 命$f_n=\frac{1}{n}\xi_{[1,\exp(n)]}$. 那么当$p\geqslant 1$时，$(f_n)\subset\mathfrak{L}_p(R)$. 设

①这一简便记法是译者规定的. 其中w为英语weakly（弱）的第一个字母. ——译者注

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

则当 $p>1$ 时，$g\in \mathfrak{L}_{p'}(R)$，$g$ 有界，而且对于一切$n\in N$，

$$\int_R f g d\lambda=\frac{1}{n}\int_1^{\exp(n)}\frac{dx}{x}=1.$$

于是，在R上一致地成立$f_n\to 0$，但在$\mathfrak{L}_p(R)$中f_n不弱收敛于0.

就有限测度空间来说，已知 $\mathfrak{L}_p\subset\mathfrak{L}_1$（$p\geqslant 1$）（13.17），所以就有限测度空间来说，一致收敛蕴涵$\mathfrak{L}_p$弱收敛.

尽管刚才都说了一些否定结果，但如果所论及的序列(f_n)满足某些附加条件，那么确实能得出一些肯定结果.

(13.44) **定理** 记号如（13.41）所设. 假定$1<p<\infty$，而$(\|f_n\|_p)_{n=1}^{\infty}$是一个有界数列. 如果$f_n\to f$ μ-a.e.，则在$\mathfrak{L}_p$中$f_n\overset{(w)}{\to} f$.

证 取$\alpha\in R$，使对于任意$n\in N$，$\|f_n\|_p\leqslant\alpha$. 根据Fatou引理（12.23），得到

$$\|f\|_p^p=\int_X|f|^p d\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}|f_n|^p d\mu$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_X|f_n|^p d\mu\leqslant\alpha^p. \tag{1}$$

设给定$\varepsilon>0$，$g\in\mathfrak{L}_{p'}$. 利用（12.34），得到$\delta>0$，使对于一切$E\in\mathscr{A}$，只要$\mu(E)<\delta$，就有

$$2\alpha\left(\int_E|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

其次取$A\in\mathscr{A}$，满足$\mu(A)<\infty$，并且

$$2\alpha\left(\int_{A'}|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

应用Egorov定理（11.32），得到$B\in\mathscr{A}$，满足：$B\subset A$，$\mu(A\cap B')<\delta$，在B上一致成立$f_n\to f$．最后，选$n_0\in N$，使当$n\geqslant n_0$时，对于任意$x\in B$，都有

$$|f(x)-f_n(x)|\,(\mu(B))^{\frac{1}{p}}\,\|g\|_{p'}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

那么当$n\geqslant n_0$时，就有

$$\left(\int_B|f-f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4)$$

这样一来，联合(1)，(2)（其中$E=A\cap B'$），(3)及(4)，并利用Hölder不等式和Minkowski不等式，则对于一切$n\geqslant n_0$，得出

$$\begin{aligned}
&\left|\int_X fg\,d\mu-\int_X f_n g\,d\mu\right|\\
&\leqslant\int_X|f-f_n|\,|g|\,d\mu\\
&=\int_{A\cap B'}|f-f_n|\,|g|\,d\mu+\int_{A'}|f-f_n|\,|g|\,d\mu\\
&\quad+\int_B|f-f_n|\,|g|\,d\mu\\
&\quad\leqslant\|f-f_n\|_p\left(\int_{A\cap B'}|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\quad+\|f-f_n\|_p\left(\int_{A'}|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\quad+\left(\int_B|f-f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\quad\square
\end{aligned}$$

(13.45) **推论** (13.44)中$f_n \to f$ μ-a.e.的假设，可以用依测度$f_n \to f$这一假设来代替.

证 倘若f_n非弱收敛于f. 取$g \in \mathfrak{L}_{p'}$，使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_X fg\,d\mu - \int_X f_n g\,d\mu\right| = \alpha \neq 0.$$

利用(6.84)，求出整数$n_1 < n_2 < \cdots$，使

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_X (f - f_{n_k})g\,d\mu\right| = \alpha. \qquad (1)$$

再利用(11.26)，可求出$(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$的一个子序列$(f_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$，使$\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_{k_j}} = f$ μ-a.e.则由(13.44)便得出

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_X (f - f_{n_{k_j}})g\,d\mu\right| = 0$$

但是这一等式与(1)式相矛盾. □

(13.46) **评注** 例(13.43.b)表明，在$p=1$的情况下，(13.44)和(13.45)都不对. 不过，要是把$(\|f_n\|_1)$为有界序列的假设换成$\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$，便得到一个强得多的结论.

(13.47) **定理** 记号如(13.41)所设. 假定$p=1$，$f_n \to f$ μ-a.e.，$\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$. 则

(i) 对于任意$E \in \mathscr{A}$，都有$\int_E |f_n|\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu$，

(ii) $\|f - f_n\|_1 \to 0$，

(iii) 在$\mathfrak{L}_1$中$f_n \overset{(w)}{\to} f$.

证 设$E \in \mathscr{A}$. Fatou引理(12.23)则表明

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E |f_n|\,d\mu &\geq \int_E |f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu - \int_{E'} |f|\,d\mu \\ &\geq \int_X |f|\,d\mu - \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E'} |f_n|\,d\mu \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_X |f_n|\,d\mu - \int_{E'} |f_n|\,d\mu\right)\end{aligned}$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E |f_n|\,d\mu.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n|\,d\mu$存在，并且(i)成立。

为了证明(ii)，设给定$\varepsilon>0$．挑选$A\in\mathscr{A}$，适合$\mu(A)<\infty$，$\int_{A'}|f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{5}$．利用（12.34），得到$\delta>0$，使当$E\in\mathscr{A}$，$\mu(E)<\delta$时，有$\int_E |f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{5}$．再应用Egorov定理(11.32)，求出$B\in\mathscr{A}$，满足：$B\subset A$，$\mu(A\cap B')<\delta$，在$B$上一致成立$f_n\to f$．选取$n_0\in N$，使当$n\geqslant n_0$时，

$$\left[\sup_{x\in B}|f(x)-f_n(x)|\right]\cdot\mu(B)<\frac{\varepsilon}{5}.$$

现在应用(i)得到

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_X |f-f_n|\,d\mu\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\int_{A'}|f-f_n|\,d\mu+\int_{A\cap B'}|f-f_n|\,d\mu+\int_B|f-f_n|\,d\mu\right]\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\int_{A'}|f|\,d\mu+\int_{A'}|f_n|\,d\mu+\int_{A\cap B'}|f|\,d\mu\right.\\
&\qquad\left.+\int_{A\cap B'}|f_n|\,d\mu\right]+\frac{\varepsilon}{5}\\
&=2\int_{A'}|f|\,d\mu+2\int_{A\cap B'}|f|\,d\mu+\frac{\varepsilon}{5}<\frac{2\varepsilon}{5}+\frac{2\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

既然ε是任意的，便证明了(ii)．由(ii)则直接得出结论(iii)．□

(13.48) **注意** 定理（13.42）容许部分反过来，其中不含有点态收敛或依测度收敛的假设．一旦建立了某些不等式之后，这类逆命题是不难证明的，因此留待后文（15.17）再提出这个问题．

(13.49) **习题** 记号如(13.41)所设. 假定$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. 试证:

(a) 如果$f_n \to f$ μ-a.e., 那么$\|f-f_n\|_p \to 0$.

(b) 如果依测度$f_n \to f$, 那么$\|f-f_n\|_p \to 0$. (记住$1 \leqslant p < \infty$.)

(13.50) **习题** 记号如(13.41)所设. 假定$f_n \to f$ μ-a.e. 并且存在一个函数$g \in \mathfrak{L}_1^+$, 使对于一切$n \in N$, $|f_n|^p \leqslant g$. 试证: 任给$\varepsilon > 0$, 总存在一个集$B \in \mathscr{A}$, 满足: $\mu(B') < \varepsilon$, 在B上一致成立$f_n \to f$. 〔细读(11.30)的证明, 然后象(11.32)那样进行证明.〕

(13.51) 习题 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间, 并且对于任意$x \in X$, 有$\{x\} \in \mathscr{A}$, $\mu(\{x\}) > 0$. 又设$f, f_n \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$ $(n=1, 2, \cdots)$. 试证(a)-(c), 并做(d)题.

(a) 如果在$\mathfrak{L}_1$中$f_n \overset{(w)}{\to} f$, 那么对于任意$x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.

(b) 除非X为有限集, 否则(a)的逆命题是不成立的.

(c) 如果$f_n \overset{(w)}{\to} f$, 那么$\|f-f_n\|_1 \to 0$. 〔记$f_0 = f$, 并注意$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) \neq 0\}$为可数集. 可利用(a)及(13.47).〕

(d) 设$p > 1$, 试求一序列$(f_n) \subset l_p$, 满足$f_n \overset{(w)}{\to} 0$, 但$\|f_n\|_p$不收敛于0. 〔参见(13.13.)〕

§14 抽象Banach空间

我们曾经定义过Banach空间(7.7), 也看到了几个具体例子: §7的$\mathfrak{C}(X)$和$\mathfrak{C}_0(X)$, §13的$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$. 本节对抽象Banach空间理论作一简明扼要的介绍, 并证明有关这些空间的一些重要定理. 至于这一课题的详尽论述, 请读者参看文献

N.Dunford和J.T.Schwartz①.

本节始终用F表示域R或域K.

(14.1) **定义** 设A, B是F上两个线性空间，T是A到B内的一个函数，如果对于任意x, $y\in A$及任意$\alpha\in F$，成立

(i) $T(x+y)=T(x)+T(y)$,

(ii) $T(\alpha x)=\alpha T(x)$,

就称T为**线性变换**（或**线性算子**）. 如果A,B是两个赋范线性空间，T是A到B内的一个线性变换，假如存在一个非负实数M，使对于一切$x\in A$都成立

(iii) $\|T(x)\|\leqslant M\|x\|$

（就是说，T在A的单位球面上有界),就称T是**有界的**. 这时T**的范数**规定为满足(iii)的M全体所成集的下确界，记作$\|T\|$. 这个范数称为**算子范数**（operator norm）.

(14.2) **定理** 设A, B是两个赋范线性空间，T是A到B内的一个有界线性变换. 则

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}:x\in A,x\neq 0\right\}$$

$$=\sup\{\|T(x)\|:x\in A,\|x\|=1\}$$

$$=\sup\{\|T(x)\|:x\in A,\ \|x\|\leqslant 1\},$$

又对于一切$x\in A$,

$$\|T(x)\|\leqslant\|T\|\cdot\|x\|.$$

证 留作习题.

(14.3) **定理** 设A, B是两个赋范线性空间，T是A到B内的一个线性变换. 则下列三个语句相互等价：

(i) T有界；

(ii) T在A上一致连续；

①N.Dunford and J.T.Schwartz, *Linear Operators Part* I, Interscience Publishers, New York, 1958.

(iii) T在A的某个点连续.

本节的连续性语句，总是理解为相对于度量拓扑而言的，这里度量拓扑是在A和B上由各自的范数导出的.

证 设(i)成立，则对于任意x，$y\in A$，都成立

$$\|T(x)-T(y)\|=\|T(x-y)\|\leqslant\|T\|\cdot\|x-y\|,$$

由此得出(ii). (ii)蕴涵(iii)是显然的事实. 再假设(iii)成立，比如说T在$x_0\in A$连续. 那么必存在$\delta<0$，使得只要$\|x-x_0\|\leqslant\delta$，就有$\|T(x)-T(x_0)\|\leqslant 1$，因而由$\|x\|\leqslant 1$可推出$\|(\delta x+x_0)-x_0\|\leqslant\delta$，由此推出

$$\|T(x)\|=\frac{1}{\delta}\|T(\delta x+x_0)-T(x_0)\|\leqslant\frac{1}{\delta}.$$

于是T有界，$\|T\|\leqslant\frac{1}{\delta}$. □

(14.4) **定理** 设A，B是F上两个赋范线性空间，命$\mathfrak{B}(A, B)$表示A到B内的有界线性变换全体所成的集. 则按照点态线性运算及算子范数，$\mathfrak{B}(A, B)$成为赋范线性空间. 此外，当B还是Banach空间时，$\mathfrak{B}(A, B)$也是Banach空间.

证 只证明：当B完备时，$\mathfrak{B}(A, B)$也完备；其余都是常规验证，从略. 假定B完备，并设(T_n)是$\mathfrak{B}(A, B)$中的Cauchy序列. 对于$x\in A$，有

$$\|T_n(x)-T_m(x)\|\leqslant\|T_n-T_m\|\cdot\|x\|,$$

从而$(T_n(x))$是B中的Cauchy序列. 于是，对于每个$x\in A$，有一个向量$T(x)\in B$，满足$\|T_n(x)-T(x)\|\to 0$. 这就规定了把A映入B的一个映射T. 设x，$y\in A$，则有

$$\|T(x+y)-[T(x)+T(y)]\|\leqslant\|T(x+y)-T_n(x+y)\|$$
$$+\|T_n(x)-T(x)\|+\|T_n(y)-T(y)\|\to 0,$$

因而$T(x+y)=T(x)+T(y)$. 同样可证：对于任意$x\in A$和任意$\alpha\in F$，都有$T(\alpha x)=\alpha T(x)$. 这样T便是线性的.

既然(T_n)是Cauchy序列，便有一个正常数β，使对于任意

$n\in N$，都有 $\|T_n\|\leqslant\beta$. 当 $\|x\|\leqslant 1$ 时，得到

$$\|T(x)\|\leqslant\|T(x)-T_n(x)\|+\|T_n(x)\|\leqslant 1+\beta$$

（对于一切充分大的n成立），所以T有界，即$T\in\mathfrak{B}(A, B)$.

还需证明 $\|T-T_n\|\to 0$. 任给$\varepsilon>0$，取充分大的一个整数p，使当m，$n\geqslant p$时，$\|T_m-T_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 设$x\in A$，满足 $\|x\|\leqslant 1$，并取$m_x\in N$，满足$m_x\geqslant p$，$\|T(x)-T_{m_x}(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $n\geqslant p$ 时

$$\|T(x)-T_n(x)\|\leqslant\|T(x)-T_{m_x}(x)\|+\|T_{m_x}-T_n\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可见，当$n\geqslant p$时

$$\|T-T_n\|=\sup\{\|T(x)-T_n(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}\leqslant\varepsilon. \quad \square$$

（14.5） **评注** 读者应注意，上述证明与（7.9）的证明的类似之处.

（14.6） **定义** 设E是F上一个线性空间. 所谓E上的一个**线性泛函**，指的是E到F内的一个线性变换（这里把F看作F上的一维线性空间）. 如果E是赋范线性空间（绝对值作为F上的范数），则命E^*表示E上有界线性泛函全体所成的空间，就是说$E^*=\mathfrak{B}(E,F)$. 既然F是完备的，那么由（14.4）知道，E^*是 Banach 空间. 空间E^*称为E**的共轭空间**（或**伴随空间，对偶空间**）. 空间E^*的共轭空间E^{**}则称为E**的第二共轭空间**，等等.

（14.7） **讨论** 设E是一个赋范线性空间. 存在一个所谓E**到E^{**}内的自然映射**. 定义如下：对于$x\in E$，在E^*上规定$\hat{x}$为

$$\hat{x}(f)=f(x)$$

通过简单计算就可以明白，每个$\hat{x}$都是E^*上的线性泛函，而映射$x\to\hat{x}$则为线性变换. 此外，对于每个$x\in E$，还有

$$\sup\{|\hat{x}(f)|:f\in E^*, \|f\|\leqslant 1\}$$
$$=\sup\{|f(x)|:f\in E^*, \|f\|\leqslant 1\}$$

$$\leqslant \sup\{\|f\|\|x\|: f\in E^*, \|f\|\leqslant 1\}\leqslant \|x\|.$$

于是，映射 $x\to\hat{x}$ 便是E到E^{**}内的一个有界线性变换，其范数$\leqslant$ 1．这就产生了几个问题：

（1） 这个映射是否是 1－1 的？

（2） 它是否保持范数不变？

（3） 它是否映满E^{**}？

（4） E^*中是否一定存在任意一个非零元素？

一般说来，这些问题的答案并不是显而易见的；不过，要是借助于Hahn-Banach定理——接下去就要介绍——便可以回答（1），（2），（4）．问题（3）则放在习题中解决．

(14.8) **定义** 设E是一个实线性空间．又设p是定义在E上的一个实值函数，如果对于任意x，$y\in E$及任意正实数α，成立

(i) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$,

(ii) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$,

就说p是一个**次线性泛函**．应当指出，范数就是次线性泛函．

(14.9) Hahn-Banach定理①设E是一个实线性空间，M是E的一个线性子空间．假定p是定义在E上的次线性泛函，f是定义在M上的线性泛函，并且对于任意$x\in M$，

$$f(x)\leqslant p(x)$$

则必存在定义在E上的一个线性泛函g，使得g成为f的一个开拓(即$f\subset g$)，并且对于任意$x\in E$，

$$g(x)\leqslant p(x)$$

证 设$\mathfrak{Z}$是满足以下条件的实函数h全体所成的集：$\mathrm{dom}h$是E的线性子空间，h是线性的，$f\subset h$，以及对于一切$x\in\mathrm{dom}h$，成立$h(x)\leqslant p(x)$．注意，$f\in\mathfrak{Z}$．由$\subset$可半序化$\mathfrak{Z}$（记住：函数乃是有序偶所成的集）．设$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{Z}$中任意一个链，命$h=\bigcup\mathfrak{C}$．那么，借助于（2.19），便看出$h\in\mathfrak{Z}$．应用Zorn引理（3.10），还看出

---

①即通常所说的Hahn-Banach开拓定理．——译者注

$\mathfrak{Z}$有一个极大元，比如说g. 为了完成证明，只要证$\mathrm{dom}g=E$就行了.

如果不然，设y是$E\cap(\mathrm{dom}g)'$中任意一个元素. 命$G=\mathrm{dom}g$，规定

$$H=\{x+\alpha y: x\in G,\ \alpha\in R\}$$

很清楚，H是E的线性子空间，并且$G\subsetneqq H$. 设c是任意固定的实数，在H上规定h为

$$h(x+\alpha y)=g(x)+\alpha c.$$

h是完全确定的. 这是因为，如果$x_1+\alpha_1 y=x_2+\alpha_2 y$，其中$x_1$，$x_2\in G$，$\alpha_1$，$\alpha_2\in R$，则$(\alpha_1-\alpha_2)y=x_2-x_1\in G$，因此$\alpha_1=\alpha_2$，$x_1=x_2$. 显然$h$是一个线性泛函，并且$g\subsetneqq h$. 假如能选取$c$，使对于一切$x\in H$，都有$h(x)\leqslant p(x)$，那么便有$h\in\mathfrak{Z}$，这与$g$的极大性相矛盾，从而就完成了证明. 因此剩下的问题只是证明c如此选取是办得到的.

我们要证明：对于一切$x\in G$，$\alpha\in R$，成立

$$g(x)+\alpha c=h(x+\alpha y)\leqslant p(x+\alpha y)$$

根据g的线性和p的次线性，这等价于证明以下两条：

$$g\left(\frac{x}{\alpha}\right)+c\leqslant p\left(\frac{x}{\alpha}+y\right),\quad x\in G,\quad \alpha>0,$$

及

$$g\left(\frac{x}{\alpha}\right)+c\geqslant -p\left(-\frac{x}{\alpha}-y\right),\quad x\in G;\quad \alpha<0.$$

因此只要证明对于一切u，$v\in G$，能成立

$$g(u)-p(u-y)\leqslant c\leqslant -g(v)+p(v+y)$$

就可以了. 但对于一切u，$v\in G$，确实成立

$$g(u)+g(v)=g(u+v)\leqslant p(u+v)\leqslant p(u-y)+p(v+y).$$

记

$$a=\sup\{g(u)-p(u-y): u\in G\},$$
$$b=\inf\{-g(v)+p(v+y): v\in G\}$$

显而易见，$a \leqslant b$. 因此取c为满足$a \leqslant c \leqslant b$的任意实数，便完成了证明. □

(14.10) 评注 Hahn-Banach定理最重要的一点是，开拓泛函仍然为p所上界定. 假定不作这一要求，则只要取M的任意一个Hamel基，把它扩大成E的一个Hamel基，在新基向量上随意规定g，并在E上规定g成为线性的，这样便可得到f的一个开拓.

(14.11) 推论 设E是一个实赋范线性空间，M是E的一个线性子空间. 如果$f \in M^*$，则存在$g \in E^*$，满足：$f \subset g$，$\|g\| = \|f\|$.

证 在E上规定p为$p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$，那么p是E上一个次线性泛函，并且对于任意$x \in M$，$f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x)$. 应用(14.9)，便得到$E$上的一个线性泛函$g$，满足$f \subset g$，并且对于任意$x \in E$，$g(x) \leqslant p(x)$. 显然$g \in E^*$，$\|g\| \leqslant \|f\|$. 但另一方面又有

$$
\begin{aligned}
\|g\| &= \sup\{|g(x)| : x \in E, \ \|x\| \leqslant 1\} \\
&\geqslant \sup\{|g(x)| : x \in M, \|x\| \leqslant 1\} \\
&= \sup\{|f(x)| : x \in M, \|x\| \leqslant 1\} = \|f\|.
\end{aligned}
$$

于是$\|g\| = \|f\|$. □

(14.12) 定理 (Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov). 设E是一个复赋范线性空间，M是E的一个线性子空间. 如果$f \in M^*$，则存在$g \in E^*$，满足：$f \subset g$，$\|g\| = \|f\|$.

证 对于每个$x \in M$，记

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

其中f_1，f_2都是实值的. 经简单计算可知，f_1，f_2都是M上实线性泛函，也就是$f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y)$，$f_j(\alpha x) = \alpha f_j(x)$ ($\alpha \in R$). 同时显然成立

$$|f_j(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|,$$

从而f_1，f_2都有界，并且$\|f_j\| \leqslant \|f\|$. 现在，把E和M看作实线性空间（如果纯量乘法只限于实纯量乘法），则应用(14.11)，便得到E上一个有界实线性泛函g_1，满足$f_1 \subset g_1$，$\|g_1\| = \|f_1\|$.

其次在E上规定g为

$$g(x)=g_1(x)-ig_1(ix)$$

不难看出，g是一个复线性泛函，例如$ig(x)=ig_1(x)+g_1(ix)=g_1(ix)-ig_1(i(ix))=g(ix)$. 为了看出$f\subset g$，注意到对于$x\in M$，有

$$g_1(ix)+if_2(ix)=f_1(ix)+if_2(ix)=f(ix)=if(x)$$
$$=-f_2(x)+if_1(x)=-f_2(x)+ig_1(x),$$

所以$g_1(ix)=-f_2(x)$，因而

$$g(x)=g_1(x)-ig_1(ix)=f_1(x)+if_2(x)=f(x)$$

只须证明g有界，并且$\|g\|=\|f\|$. 设有任意$x\in E$，记

$$g(x)=r\exp(i\theta),$$

其中$r\geqslant 0$，$\theta\in R$. 则得到

$$|g(x)|=r=\exp(-i\theta)g(x)$$
$$=g(\exp(-i\theta)x)=g_1(\exp(-i\theta)x)$$
$$\leqslant\|g_1\|\cdot\|x\|=\|f_1\|\cdot\|x\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|.$$

这就证明了g有界，并且$\|g\|\leqslant\|f\|$. 正如(14.11)，显而易见$\|f\|\leqslant\|g\|$. 因此得到$\|g\|=\|f\|$. □

(14.13) **推论** 设E是一个赋范线性空间，S是E的一个线性子空间. 假定$z\in E$，$\mathrm{dist}(z, S)=d>0$. 则存在$g\in E^*$，满足：$g(S)=\{0\}$，$g\{z\}=d$，$\|g\|=1$. 特别，当$S=\{0\}$时，则有$g(z)=\|z\|$.

证 命

$$M=\{x+\alpha z: x\in S, \alpha\in F\}.$$

那么M是E的线性子空间. 在M上定义f为

$$f(x+\alpha z)=\alpha d.$$

显然f是M上一个完全确定的线性泛函，并满足$f(S)=\{0\}$，$f(z)=d$. 同时

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{|\alpha d|}{\|x+\alpha z\|}: x+\alpha z\in M, \|x+\alpha z\|\neq 0\right\}$$

$$=\sup\left\{\frac{d}{\|-y+z\|}:y\in S\right\}=\frac{d}{d}=1.$$

当$F=R$时应用(14.11)，当$F=K$时，则应用(14.12)，便得到所要求的泛函$g\in E^*$. □

我们现在回到(14.7)中所讨论过的映射$x\to\hat{x}$.

(14.14) 定理 设E是一个赋范线性空间，π是E到E^{**}内的自然映射：$\pi(x)(f)=f(x)$. 则π是E到E^{**}内的一个保范线性变换，由此π是1-1的.

证 我们在(14.7)中已经看到过，π是E到E^{**}内的有界线性变换，$\|\pi\|\leqslant 1$. 命x为E的任意一个非零元素. 按照(14.13)，存在一个元素$g\in E^*$，满足$\|g\|=1$ $g(x)=\|x\|$. 于是

$\|x\|=g(x)\leqslant\sup\{|f(x)|:f\in E^*,\|f\|=1\}=\|\pi(x)\|\leqslant\|x\|$，

即

$$\|\pi(x)\|=\|x\|.$$

显然$\|\pi(0)\|=0=\|0\|$.这样就证明了π保持范数不变.由此，如果在E中$x\neq y$，那么$\|\pi(x)-\pi(y)\|=\|\pi(x-y)\|=\|x-y\|\neq 0$，所以$\pi(x)\neq\pi(y)$. □

(14.15) 评注 鉴于(14.14)，一个赋范线性空间E，在赋范空间意义下，是不能与E^{**}的子空间$\pi(E)$区别开的. 映射π并不一定映满E^{**}〔参看(14.26)〕. 当$\pi(E)=E^{**}$时，则称空间E为**自反的**. 既然E^{**}是完备的，π又是一个等距，所以凡自反的赋范线性空间必是Banach空间. §15我们要证明，凡$\mathfrak{L}_p$空间($1<p<\infty$)都是自反的.

下面介绍三个定理，一般认为它们与Hahn-Banach定理一起，奠定了泛函分析的发展基础. 这三个定理是：开映射定理、闭图象定理和一致有界性原理. 在一些推论和习题中将举出这些定理的若干应用. 与Hahn-Banach定理所不同的是，这三个定理都依赖于完备性.

(14.16) 开映射定理(Banach) 设A，B是两个Banach空

间，T是A到B上的一个有界线性变换．则对于A的每个开子集U，$T(U)$也是B中的开集．

证 对于每个$\varepsilon>0$，规定

$$A_\varepsilon=\{x\in A: \|x\|<\varepsilon\},$$
$$B_\varepsilon=\{y\in B: \|y\|<\varepsilon\}.$$

给定$\varepsilon>0$．要证存在$\delta>0$，使$T(A_\varepsilon)\supset B_\delta$．对于每个$n\in N$，命$\varepsilon_n=\frac{\varepsilon}{2^n}$．显而易见，当固定$n$时，则

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty} jA_{\varepsilon_n}$$

〔象(5.6.f)那样定义jA_{ε_n}〕，从而又有

$$B=T(A)=\bigcup_{j=1}^{\infty} T(jA_{\varepsilon_n}).$$

既然B是完备的，那么由Baire范畴定理（6.54）推知，并非所有$T(jA_{\varepsilon_n})$（$j=1,2,\cdots$）都是无处稠密的．这样，必存在一个$j_n\in N$，使得$[T(j_nA_{\varepsilon_n})]^-$具有非空内部．但是

$$[T(A_{\varepsilon_n/2})]^-=\frac{1}{2j_n}[T(j_nA_{\varepsilon_n})]^-,$$

而当$\alpha\neq 0$时，αW是B中的开集，W则是B中的开集．于是存在一个非空开集$V_n\subset[T(A_{\varepsilon_n/2})]^-$．由此可见

$$[T(A_{\varepsilon_n})]^-\supset[T(A_{\varepsilon_n/2})-T(A_{\varepsilon_n/2})]^-\supset[T(A_{\varepsilon_n/2})]^- -[T(A_{\varepsilon_n/2})]^-\supset V_n-V_n.$$ ①

既然$0\in V_n-V_n$，$V_n-V_n=\bigcup\{V_n-x:x\in V_n\}$是$B$中的开集，所以存在$\delta_n>0$，满足

$$B_{\delta_n}\subset V_n-V_n\subset[T(A_{\varepsilon_n})]^-. \qquad (1)$$

对于任意$n\in N$，不妨假设$\delta_n<\frac{1}{n}$．现在要证$B_{\delta_1}\subset T(A_\varepsilon)$．

---

①对于B的两个子集C和D，记$C-D=\{x-y: x\in C, y\in D\}$；参看（5.6.f）．（也可参看（10.26），并注意（10.57）译注①．——译者注）

为此，设y是B_{δ_1}的任意一个元素．必须找到$x\in A_\varepsilon$，使$T(x)=y$．根据(1)，存在$x_1\in A_{\varepsilon_1}$，使

$$\|y-T(x_1)\|<\delta_2,$$

因此$y-T(x_1)\in B_{\delta_2}$．鉴于(1)，又存在$x_2\in A_{\varepsilon_2}$，使

$$\|y-T(x_1)-T(x_2)\|<\delta_3.$$

按照有限归纳法，继续这一过程，便得到一序列$(x_n)_{n=1}^\infty$，它满足：对于每个$n\in N$，x_n属于A_{ε_n}，而

$$\left\|y-\sum_{k=1}^{n}T(x_k)\right\|<\delta_{n+1}. \tag{2}$$

命$z_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$．当$m<n$时，有

$$\|z_n-z_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\frac{\varepsilon}{2^m},$$

上式右端当$m\to\infty$时有极限0．这样(z_n)便是A中的Cauchy序列；既然A完备，便有$x\in A$，使$\|x-z_n\|\to 0$．显而易见

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|z_n\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,$$

从而x便属于A_ε．由(2)式知道$\|y-T(z_n)\|\to 0$．由于T连续，就有$\|T(z_n)-T(x)\|\to 0$，所以$y=T(x)$．

最后，设U是A的任意一个非空开子集，y是$T(U)$的任意一个元素．则存在$x\in U$，使$T(x)=y$．既然U是开集，便有$\varepsilon>0$，使$x+A_\varepsilon\subset U$．应用上述结果，可知存在$\delta>0$，使得$B_\delta\subset T(A_\varepsilon)$．因而

$$y+B_\delta\subset T(x)+T(A_\varepsilon)=T(x+A_\varepsilon)\subset T(U).$$

这样y便是$T(U)$的一个内点，所以$T(U)$是开集．□

(14.17) 推论 如果A，B是两个Banach空间，T是A到B上的1-1连续线性变换，则T^{-1}也是连续的。

证 如果U是$A=\mathrm{rng}\,T^{-1}$中的开集，那么$(T^{-1})^{-1}(U)=T(U)$就是$B=\mathrm{dom}\,T^{-1}$中的开集．□

(14.18) **推论** 设E是F上一个线性空间，假定$\| \ \|$和$\| \ \|'$是E的两个Banach空间范数①. 则E上由$\| \ \|$和$\| \ \|'$导出的度量拓扑恒同的充要条件是存在一个正常数α，使对于任意$x\in E$，都有

$$\alpha\|x\|\geqslant\|x\|'$$

证 把E上的恒等映射看作是Banach空间$(E, \| \ \|)$到Banach空间$(E, \| \ \|')$上的一个线性变换. 证明细节留作习题. □

(14.19) **引理** 设A, B是两个赋范线性空间. 则$A\times B$按照坐标式线性运算和范数

$$\|(x, y)\|=\|x\|+\|y\|$$

成为一个赋范线性空间. 此外，$A\times B$完备的充要条件是A, B都完备.

证 留作习题.

(14.20) **定义** 设A, B是两个赋范线性空间. 又设$T: A\to B$是一个线性变换，如果只要在A中$x_n\to x$，在B中$T(x_n)\to y$，就有$T(x)=y$，这就是说，T作为有序偶所成的集是$A\times B$中的闭集，则称T有**闭图象**.

如果T连续，那么T有闭图象，乃是一件平凡事实. 逆命题就不一定对. 然而，当A, B都是Banach空间时，逆命题肯定成立.

(14.21) **闭图象定理** 设A, B是两个Banach空间，T是A到B内的一个线性变换，而且T有闭图象. 则T连续.

证 设$G=\{(x, T(x)): x\in A\}$是T的图象(其实G正是T). 那么G是Banach空间$A\times B$的闭线性子空间，从而G也是Banach空间. 设P_1和P_2分别是G到A内和B内的射影，换句话说，对于一切$x\in A$，成立

$$P_1(x, T(x))=x,$$

①就是说，E按照$\| \ \|$和$\| \ \|'$都成为Banach空间. ——译者注

$$P_2(x,T(x))=T(x).$$

则有

$$\|P_1(x,T(x))\|=\|x\|\leqslant\|(x,T(x))\|,$$
$$\|P_2(x,T(x))\|=\|T(x)\|\leqslant\|(x,T(x))\|.$$

因而P_1,P_2都是连续线性变换. 因为T是单值的,dom$T=A$,所以P_1是1-1的,并映满A. 由)14.17)知道,P_1^{-1}连续. 显然$T=P_2\circ P_1^{-1}$,从而T连续. □

(14.22) 引理 设B是一个Banach空间,I是一个非空集. 又设γ是I到B内的函数,并满足

(i) $\sup\{\|\gamma(\iota)\|:\iota\in I\}<\infty.$

命Γ表示这样的函数γ全体所成的集,又命$\|\gamma\|$表示(i)中的上确界. 则Γ按照点态线性运算及上述范数,成为一个Banach空间.

证明差不多与(7.9)所提供的证明完全一样,因此从略.

(14.23) 定理:一致有界性原理 设A,B是两个Banach空间,$\{T_\iota:\iota\in I\}$是A到B内的有界线性变换所成的一个非空族. 如果对于每个$x\in A$,有

$$\sup\{\|T_\iota(x)\|:\iota\in I\}<\infty,$$

则

$$\sup\{\|T_\iota\|:\iota\in I\}<\infty.$$

证 Γ如(14.22)所设. 规定映射$S:A\to\Gamma$为

$$S(x)(\iota)=T_\iota(x),\quad x\in A,\quad \iota\in I.$$

由题设,族$\{T_\iota:\iota\in I\}$是逐点有界的,这说明对于每个$x\in A$,$S(x)\in\Gamma$. 显然S是线性的. 现在利用闭图象定理来证明S还是连续的. 因此假设在A中$x_n\to x$,在Γ中$S(x_n)\to\gamma$. 对于每个$\iota\in I$,得出

$$\begin{aligned}&\|\gamma(\iota)-S(x)(\iota)\|\\ &\quad\leqslant\|\gamma(\iota)-S(x_n)(\iota)\|+\|S(x_n)(\iota)-S(x)(\iota)\|\\ &\quad\leqslant\|\gamma-S(x_n)\|+\|T_\iota(x_n)-T_\iota(x)\|.\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时,末尾表达式有极限0,这是因为T_ι是连续的. 因而对于任意$\iota\in I$,$\gamma(\iota)=S(x)(\iota)$,所以$\gamma=S(x)$. 这就证明了$S$的图象

是闭集，于是 S 连续，也就是说

$$\|S\|=\sup\{\|S(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}<\infty.$$

因为对于每个 $\iota\in I$，有

$$\begin{aligned}\|T_\iota\|&=\sup\{\|T_\iota(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}\\&=\sup\{\|S(x)(\iota)\|:\|x\|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{\|S(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}=\|S\|,\end{aligned}$$

由此得出结论

$$\sup\{\|T_\iota\|:\iota\in I\}\leqslant\|S\|<\infty. \qquad \square$$

(14.24)　推论（Banach Steinhaus定理）　设 A，B 是两个Banach空间，$(T_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 A 到 B 内的有界线性变换所成的一个序列，而且是点态收敛的．则由下式所规定的映射 $T:A\to B$

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x),$$

是有界线性变换．

证　显而易见，T 是线性的．同时，对于每个 $x\in A$，分明有

$$\sup\{\|T_n(x)\|:n\in N\}<\infty.$$

由（14.23）知道，存在一个正常数 M，使对于一切 $n\in N$，都成立

$$\|T_n\|\leqslant M$$

这样，当 $x\in A$ 时，便推出

$$\|T(x)\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|\leqslant M\|x\|,$$

从而 T 有界，$\|T\|\leqslant M$．$\square$

(14.25)　习题　设 D 是一个非空集，又设 f 是定义在 D 上的复值函数，并满足：对于每个 $\varepsilon>0$，$\{x\in D:|f(x)|\geqslant\varepsilon\}$ 是有限集，命 $c_0(D)$ 表示这样的函数 f 全体所成的集．于是 $c_0(D)=\mathfrak{C}_0(D)$，其中 D 赋以离散拓扑〔参见（7.12）〕．在 $c_0(D)$ 上点态定义线性运算，并对于 $f\in c_0(D)$，规定

$$\|f\|_u=\sup\{|f(x)|:x\in D\}.$$

试证：

(a) $c_0(D)$是一个Banach空间.

(b) $c_0(D)$可分的充要条件是D可数.

(c) 如果φ是$c_0(D)$上一个有界线性泛函,则存在一个函数$g\in l_1(D)$〔参见(13.13)〕，它满足：对于任意$f\in c_0(D)$，有

$$\varphi(f)=\sum_{x\in D}f(x)g(x).$$

(d) (c)中所说的映射$\varphi\to g$乃是$c_0(D)^*$到$l_1(D)$上的保范同构.

(14.26) **习题** 设D是一个非空集，$l_\infty(D)$表示定义在D上的有界复值函数全体所成的集.〔有些作者用$m(D)$表示空间$l_\infty(D)$.〕在$l_\infty(D)$中点态定义线性运算，并对于$f\in l_\infty(D)$，规定

$$\|f\|_u=\sup\{|f(x)|:x\in D\}.$$

注意，$l_\infty(D)=\mathfrak{C}(D)$，其中$D$具有离散拓扑. 记号如(14.25)所设. 试证：

(a) 当$\varphi\in l_1(D)^*$时,则$l_\infty(D)$中存在g,它满足：对于任意$f\in l_1(D)$，有

$$\varphi(f)=\sum_{x\in D}f(x)g(x).$$

(b) (a)中所说的映射$\varphi\to g$乃是$l_1(D)^*$到$l_\infty(D)$上的保范同构.

(c) 当D无限时,则$c_0(D)$不是自反的.〔显式计算$c_0(D)$到$l_\infty(D)$内的自然映射.〕

所谓拓扑空间X的**稠密性特征标**(density character)是指满足以下条件的最小基数：存在X的一个稠密子集，它具有那个基数.

(d) 当D无限,$\overline{\overline{D}}=\mathfrak{d}$时，则$c_0(D)$和$l_1(D)$都具有稠密性特征标$\mathfrak{d}$，而$l_\infty(D)$具有稠密性特征标$2^{\mathfrak{d}}$.

(e) 当D无限时,则存在一个元素$\varphi\in l_\infty(D)^*$,它满足：对于任

意$f\in c_0(D)$，$\varphi(f)=0$，以及$\|\varphi\|=1$．（利用某个开拓定理．）

(f) 如果$l_1(D)$是自反的，则D有限．〔利用(b)和(e)．关于$l_\infty(D)^*$的显式计算，请参看下文（20.27）—（20.35）．〕

(14.27) 习题 设E是一个实线性空间，$P\subset E$满足以下条件：

(i) x，$y\in P$及α，$\beta\geqslant 0$蕴涵$\alpha x+\beta y\in P$；

(ii) $x\in P$及$-x\in P$蕴涵$x=0$．

则P称为一个**凸锥**．对于x，$y\in E$，规定$x\leqslant y$表示$y-x\in P$．试证$\leqslant$是E上的一个半序关系．设S是E的一个线性子空间，使对于任意$x\in E$，$(x+S)\cap P\neq\varnothing$的充要条件是$(-x+S)\cap P\neq\varnothing$．假定$f$是$S$上一个线性泛函，它满足：$x\in S$，$x\geqslant 0$蕴涵$f(x)\geqslant 0$．试证可以把$f$开拓成$E$上的一个线性泛函$g$，它满足：$x\in E$，$x\geqslant 0$蕴涵$g(x)\geqslant 0$．〔对于$S\cup P$的线性张成中的任意$x$，规定

$$p(x)=\inf\{f(y):y\in S,y\geqslant x\},$$

利用Hahn-Banach定理．也可以利用Zorn引理直接证明．〕这一结果叫做**关于非负线性泛函的Kreĭn开拓定理**．

(14.28) 习题 试证不可能存在满足以下条件的复数列$(c_n)_{n=1}^\infty$：一个复数项无穷级数$\sum_{n=1}^\infty a_n$绝对收敛的充要条件是$(c_na_n)_{n=1}^\infty$是有界数列．〔假定存在这样的一个序列，对于一切n，$c_n\neq 0$．可考虑由$T(f)(n)=\dfrac{f(n)}{c_n}$所给出的映射$T$：$l_\infty(N)\to l_1(N)$，并利用开映射定理．〕

(14.29) 习题 设E是一个赋范线性空间，D是E的一个非空子集，而且对于每个$f\in E^*$，

$$\sup\{|f(x)|:x\in D\}<\infty.$$

试证：$\sup\{\|x\|:x\in D\}<\infty$．〔考虑$\pi(D)\subset E^{**}$．〕

(14.30) 习题 设E是一个Banach空间，A和B是E的两个闭线性子空间，而且$A\cap B=\{0\}$．试证：

(a) 如果$A+B$是E中闭集，那么对于$x\in A$，$y\in B$，映射$x+y$

$\to x$是把$A+B$映满A的连续线性映射.

(b) 对于$x\in A$, $y\in B$, 命

$$\|x+y\|'=\|x\|+\|y\|.$$

那么$\|\ \ \|'$是$A+B$的一个完备范数.

(c) 集$A+B$是E中闭集的充要条件是$\|\ \ \|$和$\|\ \ \|'$导出$A+B$上的同一拓扑.

(14.31) 习题 (a) 设E是一个赋范线性空间, M是E的一个闭线性子空间. 假定$z\in E\cap M'$. 命

$$S=\{x+\alpha z: x\in M, \alpha\in F\}.$$

于是S就是包含M和z的E的最小线性子空间. 试证S是E中闭集. 〔在S上规定f为$f(x+\alpha z)=\alpha$. 证明$f\in S^*$, $\|f\|\leqslant\frac{1}{\operatorname{dist}(z,M)}$. 然后利用$F$为完备的这一事实. 〕

(b) 试证: 凡是E的有限维线性子空间都是E中闭集. 〔利用(a)及归纳法〕.

(14.32) 习题 试证不存在代数维数为card N的Banach空间〔利用(14.31)以及Baire范畴定理. 〕对于一个任意的非零基数$\mathfrak{m}$(有限或无限), 试构造一个代数维数为$\mathfrak{m}$的赋范线性空间.

(14.33) 习题 设A, B是两个Banach空间, T是A到B内的一个线性变换, 而且对于任意$g\in B^*$, $g\circ T\in A^*$. 试证T连续.

(14.34) 习题 设A, B是两个赋范线性空间, T是A到B内的一个有界线性变换. 对于$g\in B^*$, 规定

$$T^*(g)=g\circ T.$$

(变换T^*习惯上叫做T**的伴随**)试证:

(a) T^*是B^*到A^*内的有界线性变换;

(b) $\|T^*\|=\|T\|$;

(c) T^*是1-1的, 其充要条件是$T(A)$在B中稠密;

(d) T是1-1的, 其充要条件是$T^*(B^*)$分离A的点.

(14.35) 习题 设A是一个赋范线性空间.

(a) 试证: 存在一个Banach空间B和一个保范线性变换$T: A\to$

B，使得$T(A)$在B中稠密．（考虑A到A^{**}内的自然映射．）

(b) 试证：如果B_1和B_2是具有(a)小题中B所具备的性质的任意两个Banach空间，那么必存在B_1到B_2上的一个保范线性变换．

(14.36) **习题** 设I是一个非空集，又对于$\iota \in I$，设E_ι是F上一个赋范线性空间．设p是一个实数，$p \geqslant 1$．再设E是适合$\sum\limits_{\iota \in I} \|x_\iota\|^p < \infty$的$x = (x_\iota) \in \mathop{\times}\limits_{\iota \in I} E_\iota$全体所成的集，又对于任意$x \in E$，命

$$\|x\| = \left[\sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

则

(i) 按照线性运算

$$(x+y)(\iota) = x(\iota) + y(\iota),$$
$$(\alpha x)(\iota) = \alpha(x(\iota)),$$

以及刚才所规定的范数，E成为一个赋范线性空间．

(ii) 空间E是Banach空间的充要条件是各个E_ι是Banach空间．

试证上述两个断言．

(14.37) **习题** 设E是一个有限维线性空间，$\|\ \|_1$，$\|\ \|_2$是E上的两个范数．试证：存在两个正数α，β，使对于任意$x \in E$，成立

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1.$$

这样，E上的任意一对范数都是所谓"等价的"，任意范数都使E成为Banach空间．

(14.38) **习题** 设E是一个赋范线性空间，M是E的一个闭线性子空间．考虑商空间

$$E/M = \{x + M : x \in E\},$$

这里线性运算规定如下：

$$(x+M) + (y+M) = (x+y) + M,$$
$$\alpha(x+M) = (\alpha x) + M.$$

在E/M下按下述规则定义**商范数**:

(i) $\|x+M\|=\inf\{\|x+m\|:m\in M\}$

试证:

(a) 公式(i)定义了E/M上的一个范数.

(b) 如果E是一个Banach空间,那么E/M 也是一个Banach空间.〔对于E/M中给定的一个Canchy序列,取一子序列$(x_n+M)_{n=1}^{\infty}$,使

$$\|x_k-x_n+M\|<2^{-n}\quad(k\geqslant n).$$

然后取$z_n\in M$, 使对于每个n,

$$\|x_{n+1}-x_n+z_n\|<2^{-n}.$$

命

$$y_n=x_n+z_{n-1}+z_{n-2}+\cdots+z_1.$$

证明(y_n)乃是E中一个Cauchy序列, 命$y_n\to y$, 证明在E/M中, 有$x_n+M\to y+M$. 〕

(c) 把E映满E/M的自然映射$\varphi:\varphi(x)=x+M$, 乃是有界线性变换, 并且$\|\varphi\|\leqslant 1$, 而φ则把开集映满开集.

(d) 如果E是一个Banach空间, 那么φ把E的开单位球映满E/M的开单位球.

(e) 如果M和E/M都是完备的, 那么E也是完备的.

(14.39) **习题** 设E是一个可分Banach空间, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$是E的一个可数稠密子集, 命$B=\{f\in E^*:\|f\|\leqslant 1\}$. 对于$f$, $g\in B$, 规定

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|}.$$

试证:

(a) ρ是B的一个度量,

(b) 按照度量ρ, B成为一个紧度量空间.

设P为Cantor三分点集.

(c) 试证:存在E到$\mathfrak{C}(P)$的闭子空间上的一个保范线性变换T,

其中$\mathfrak{C}(P)$并具有一致范数.〔利用(b)及(6.100)，得到一个把P映满B的连续映射φ. 规定$T(x)(t)=\varphi(t)(x)$，$x\in E$，$t\in P$. 〕

(d) 试证：如果把P换成〔0，1〕，（c）仍正确.

(14.40) **习题** 设E是一个赋范线性空间，S是E的一个线性子空间，并设S在E中稠密. 假定f是S上一个有界线性泛函. 试不依靠Hahn-Banach定理，证明：存在唯一的一个$g\in E^*$，满足：对于任意$x\in S$，$g(x)=f(x)$. 再证明$\|g\|=\|f\|$.

§15. $\mathfrak{L}_p(1<p<\infty)$的共轭空间

本节构造一类Banach空间的共轭空间，所挑选的Banach空间虽然是特殊的一类，但却是很重要的. 整个这一节，$(X,\mathscr{A},\mu)$表示任意一个确定的测度空间，p（$1<p<\infty$）表示任意一个确定的实数. 我们把$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$简写成$\mathfrak{L}_p$. 并记住$p'=p/(p-1)$（§13）.

(15.1) **定理** 设$g\in\mathfrak{L}_{p'}$，并在$\mathfrak{L}_p$上规定L_g如下：对于任意$f\in\mathfrak{L}_p$，有

$$L_g(f)=\int_X f\overline{g}\,d\mu.$$

则$L_g\in\mathfrak{L}_p^*$，$\|L_g\|=\|g\|_{p'}$.

证 根据Hölber不等式（13.4），得出

$$|L_g(f)|\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

这样L_g乃是$\mathfrak{L}_p$上一个有界线性泛函（L_g具有线性是显然的事实），而且

$$\|L_g\|\leqslant\|g\|_{p'}.$$

其实，这里成立等号，即$\|L_g\|=\|g\|_{p'}$. 为了证明这一点，命f等于$|g|^{p'-1}\operatorname{sgn}(g)$；则得到$|f|^p=|g|^{p'}$. 于是$f$属于$\mathfrak{L}_p$，并且

$$\|f\|_p=\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}=\|g\|_{p'}^{p'-1}.$$

所以下列等式成立：

$$L_g(f)=\int f\bar{g}\,d\mu=\int|g|^{p'-1}\operatorname{sgn}(g)\bar{g}\,d\mu=\int|g|^{p'}d\mu$$

$$=\|g\|_{p'}^{p'}=\|g\|_{p'}^{p'-1}\|g\|_{p'}=\|f\|_p\|g\|_{p'},$$

从而又得出 $\|L_g\|\geqslant\|g\|_{p'}$. 因此有 $\|L_g\|=\|g\|_{p'}$. ① □

(15.2) **评注** 本节旨在证明 $\mathfrak{L}_p$ 上每个有界线性泛函，都对于某个 $g\in\mathfrak{L}_{p'}$ 而言具有 L_g 的形状. 由此可见，尽管 $\mathfrak{L}_p^*$ 和 $\mathfrak{L}_{p'}$ 完全可以由截然不同的实体构成，但是，作为Banach空间，它们却是不能区别开的. 证明方法是很初等的，并没有用到什么精深知识，微积分工具就够用了.

(15.3) **引理** 设 $p\geqslant2$. 则对于任意 $x\in[0,1]$，成立不等式

$$\text{(i)}\qquad\left(\frac{1+x}{2}\right)^p+\left(\frac{1-x}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(1+x^p).$$

证：命

$$F(x)=\left(\frac{1+x}{2}\right)^p+\left(\frac{1-x}{2}\right)^p-\frac{1}{2}(1+x^p).$$

须证：当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$F(x)\leqslant0$. 因为 $F(0)=2^{-1}(2^{-p+2}-1)$，$p\geqslant2$，所以有 $F(0)\leqslant0$. 设 $0<x\leqslant1$，这时较为方便的是考虑由下式定义的函数 Φ：

$$\Phi(x)=\frac{2^p}{x^p}F(x). \qquad (1)$$

于是

$$\Phi(x)=\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^p+\left(\frac{1}{x}-1\right)^p-2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p}+1\right)\right];$$

---

①正因如此，在泛函 L_g 的定义里，我们本来可以把 g 用作 $\bar{g}$. 我们在§16会看到，就 $p=2$ 的情况来说，$\bar{g}$ 更为自然，所以这里保留了它.

显然$\Phi(1)=0$．我们来证明：当$0<x<1$时，$\Phi'(x)\geqslant 0$．对$\Phi(x)$求导，得到

$$\Phi'(x)=-\frac{p}{x^{p+1}}[(1+x)^{p-1}+(1-x)^{p-1}-2^{p-1}]. \qquad (2)$$

记$\alpha=p-1$（注意$\alpha\geqslant 1$），并考虑由下式定义的函数Ψ：

$$\Psi(x)=(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}-2^{\alpha}.$$

则有

$$\Psi'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha(1-x)^{\alpha-1}\geqslant 0 \quad (0<x<1).$$

这样，Ψ便是$[0,1]$上的非减函数，因为$\Psi(1)=0$，由中值定理推得$\Psi(x)\leqslant 0$（$0\leqslant x\leqslant 1$）．回到（2）式，则得出：当$0<x<1$时，$\Phi'(x)\geqslant 0$．但因为$\Phi(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$\Phi(x)$非正．定义（1）则表明，当$0<x<1$时，$F(x)$也是非正的．□

（15.4）**引理** 设z,w是两个复数，假定$p\geqslant 2$．则有

(i) $$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p\leqslant\frac{|z|^p}{2}+\frac{|w|^p}{2}.$$

证 当$w=0$时，不等式(i)成为$\frac{|z|^p}{2^{p-1}}\leqslant\frac{|z|^p}{2}$，既然$p-1\geqslant 1$，这一不等式是成立．因此不妨假设$|z|\geqslant|w|>0$．不等式(i)等价于

$$\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{w}{z}\right)\right|^p+\left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{w}{z}\right)\right|^p\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{w}{z}\right|^p\right). \qquad (1)$$

现在证明（1）．不等式（1）可写成以下形式

$$\left|\frac{1+r\exp(i\theta)}{2}\right|^p+\left|\frac{1-r\exp(i\theta)}{2}\right|^p$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+r^p), \qquad (2)$$

其中 $0<r\leqslant 1$， $0\leqslant\theta<2\pi$. 当$\theta=0$时，不等式(2)恰为(15.3.i). 如果能证得(2)式左边，对于固定的r，当$\theta=0$时取极大值，那就完成了引理的证明. 显然，可以只考虑适合$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$的$\theta$值. 因此须证由

$$g(\theta)=|1+r\exp(i\theta)|^p+|1-r\exp(i\theta)|^p$$

定义的函数g在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上当$\theta=0$时有极大值. 我们有

$$g(\theta)=[1+r^2+2r\cos(\theta)]^{\frac{p}{2}}+[1+r^2-2r\cos(\theta)]^{\frac{p}{2}}$$

从而

$$\begin{aligned}g'(\theta)=&\frac{p}{2}(1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(-2r\sin(\theta))\\&+\frac{p}{2}(1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(2r\sin(\theta))\\=&-pr\sin(\theta)\Big[(1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}\\&-(1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}\Big].\qquad(3)\end{aligned}$$

既然$p\geqslant 2$，由(3)式显然可知，当$\theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(\theta)\leqslant 0$. 因而函数$g$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内非增，这就是说，$g$在0处必取极大值. □

(15.5) $p\geqslant 2$时的Clarkson不等式 设$p\geqslant 2$，f，$g\in\mathfrak{L}_p$. 则有

(i) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

证 不妨假设f和g都取复值，而且μ-a.e.有定义.〔(12.18)及(12.26)〕. 那么，对于使$f(x)$和$g(x)$有定义的任意$x\in X$，由(15.4.i)可推出

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p+\left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p$$

$$\leqslant \frac{|f(x)|^p}{2} + \frac{|g(x)|^p}{2}. \qquad (1)$$

在X上积分(1)式两边，便得到(i). □

当$1<p<2$时，成立与(15.5.i)类似的不等式，见下. 由于某种原因，这一不等式及其证明较之$p\geqslant 2$的情况要复杂一些.

(15.6) **引理** 设$1<p\leqslant 2$. 则对于任意$x\in[0,1]$，成立不等式

(i) $(1+x)^{p'}+(1-x)^{p'}\leqslant 2(1+x^p)^{\frac{1}{p-1}}$.

证 当$p=2$时，(i)显然成立. 因此设$1<p<2$. 对于$x=0$及$x=1$，(i)成为等式. 当u从0到1取值时，函数$\frac{1-u}{1+u}$从1（严格）递减到0. 于是要证的不等式(i)等价于

$$\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right)^{p'}+\left(1-\frac{1-u}{1+u}\right)^{p'}$$

$$\leqslant 2\left(1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\right)^{\frac{1}{p-1}},\quad 0<u<1. \qquad (1)$$

用$(1+u)^{p'}$乘(1)式两边，得到

$$2^{p'}(1+u^{p'})\leqslant 2[(1+u)^p+(1-u)^p]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (2)$$

将(2)式两边$(p-1)$次乘方，得出

$$(1+u^{p'})^{p-1}\leqslant \frac{1}{2}[(1+u)^p+(1-u)^p],\quad 0<u<1. \qquad (3)$$

显而易见，从(i)到(3)的各步都是可逆的，因此只要证明(3)就行了. 通过展成幂级数，得

$$\frac{1}{2}[(1+u)^p+(1-u)^p]-(1+u^{p'})^{p-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}u^k+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^k u^k\right]-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}u^{p'k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{p}{k}u^{2k}-\binom{p-1}{k}u^{p'k}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}u^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}u^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}u^{p'2k}\right]. \quad (4)$$

正如（7.25）所说，（4）式末尾的级数对于$u\in[0, 1]$绝对收敛并且一致收敛. 我们要证这个级数的各项[…]非负. 很清楚，由此就证明了（3）式. 级数的第k项为

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(2k-1))}{(2k)!}u^{2k}$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-(2k-1))}{(2k-1)!}u^{p'(2k-1)}$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-2k)}{(2k)!}u^{p'2k}$$

$$=\frac{p(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}u^{2k}$$

$$-\frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}u^{p'(2k-1)}$$

$$+\frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}u^{p'2k}$$

$$=u^{2k}\ \frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}$$

$$\times\left[\frac{p(p-1)}{(2k)(2k-p)}-\frac{(p-1)}{(2k-p)}u^{p'(2k-1)-2k}\right.$$

$$\left.+\frac{(p-1)}{(2k)}u^{p'2k-2k}\right].$$

这里第一个因子显然为正. 方括号内的表达式可改写为

$$\left[\frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}}-\frac{1}{\frac{2k}{p-1}}-\frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}}u^{\frac{2k-p}{p-1}}+\frac{1}{\frac{2k}{p-1}}u^{\frac{2k}{p-1}}\right]$$

$$=\left[\frac{1-u^{\frac{2k-p}{p-1}}}{\frac{2k-p}{p-1}}-\frac{1-u^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right]. \qquad (5)$$

初等论证（请读者补出证明）表明，对于任意$u>0$，有值$\frac{1-u^t}{t}$（$0<t<\infty$）的函数，它作为t的函数是递减的．由于$\frac{2k-p}{p-1}<\frac{2k}{p-1}$，可见（5）为正．□

(15.7) **定理** 设z，w是两个复数，并假定$1<p\leqslant 2$．则有

(i) $|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'}\leqslant 2(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p-1}}$.

证 当$z=0$或$w=0$时，(i)显然成立．否则，不妨设$0<|z|\leqslant|w|$．要证的不等式则等价于不等式

$$\left|1+\frac{z}{w}\right|^{p'}+\left|-1+\frac{z}{w}\right|^{p'}\leqslant 2\left(\left|\frac{z}{w}\right|^p+1\right)^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (1)$$

把（1）写成以下形式

$$|1+r\exp(i\theta)|^{p'}+|-1+r\exp(i\theta)|^{p'}\leqslant 2(r^p+1)^{\frac{1}{p-1}}, \qquad (2)$$

其中$\frac{z}{w}=r\exp(i\theta)$，$0<r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta<2\pi$．当$\theta=0$时，不等式（2）恰为（15.6.i）．正如（15.4.2）的证明，可以证实（2）式左边的表达式在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上当$\theta=0$时达到极大值．这样（2）式对于任意$\theta$都成立．□

(15.8) **$1<p<2$时的Clarkson不等式** 对于Ω_p中的函数f和g，成立不等式

(i) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

证 根据 $0<p<1$ 时的Minkowski不等式（13.9），得到

$$\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}$$

$$\leqslant\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}. \qquad (1)$$

（1）式左边正是(i)式左边，这是因为对于任何 $h\in\mathfrak{L}_p$，$\||h|^{p'}\|_{p-1}=\|h\|_p^{p'}$. 而右边为

$$\left[\int\left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p}+\left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}d\mu\right]^{\frac{1}{p-1}},$$

根据（15.7），它小于或等于

$$\left[\int 2^{p-1}\left(\left|\frac{f}{2}\right|^{p}+\left|\frac{g}{2}\right|^{p}\right)d\mu\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad \square$$

(15.9)—（15.11）各段中，p是确定的、大于 1 的实数，$\mathfrak{L}_p$表示一个任意的$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$，$L$是$\mathfrak{L}_p$上一个任意的非零有界线性泛函.

(15.9) 定理 存在一个函数$\varphi_0\in\mathfrak{L}_p$，适合$\|\varphi_0\|_p=1$，而且$L(\varphi_0)=\|L\|$，这就是说，$L$在$\mathfrak{L}_p$的单位球上取极大绝对值.

证 $\|L\|$的定义（14.1）表明，$\mathfrak{L}_p$中有一个序列$(\varphi_n')_{n=1}^{\infty}$，满足：$\|\varphi_n'\|_p=1$，$|L(\varphi_n')|>\frac{1}{2}\|L\|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|L(\varphi_n')|=$

$\|L\|$. 命$\varphi_n=\mathrm{sgn}[\overline{L(\varphi_n')}]\varphi_n'$. 那么显然有

$$L(\varphi_n)=|L(\varphi_n')|>\frac{1}{2}\|L\|>0; \tag{1}$$

$$\|\varphi_n\|_p=1; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}L(\varphi_n)=\|L\|. \tag{3}$$

我们要证(φ_n)乃是$\mathfrak{L}_p$中的Cauchy序列. 如果不是这样，便存在一个正数α及两个子序列$(\varphi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，$(\varphi_{m_k})_{k=1}^{\infty}$，使

$$\|\varphi_{n_k}-\varphi_{m_k}\|_p>\alpha \quad (k=1,2,\cdots).$$

当$p\geqslant 2$时，利用Clarkson不等式(15.5)得出

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^p$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi_{n_k}\|_p^p+\frac{1}{2}\|\varphi_{m_k}\|_p^p=1. \tag{4}$$

而当$1<p<2$时，则利用Clarkson不等式(15.8)得出

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{2}\|\varphi_{m_k}\|_p^p+\frac{1}{2}\|\varphi_{n_k}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}}=1. \tag{5}$$

当$p\geqslant 2$时，由不等式(4)推知

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^p<1-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p, \tag{6}$$

而当$1<p<2$时，则由不等式(5)推知

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'}<1-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p'}. \tag{7}$$

对于每个$p>1$，从(6)，(7)可以找到与k无关的一个数$\beta\in]0,1[$，使

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2} \right\|_p < 1-\beta, \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{8}$$

试考虑由下式规定的函数序列$(g_k)_{k=1}^{\infty}$：

$$g_k = \frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\|_p}. \tag{9}$$

(9)式的分母不可能为0，因为如果是零，就有$\varphi_{n_k}=-\varphi_{m_k}$，从而应成立等式$L(\varphi_{n_k})=-L(\varphi_{m_k})$，这与(1)相违背了.就$k=1, 2, \cdots$来说，(8)和(9)表明

$$L(g_k) = \frac{1}{\left\| \frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2} \right\|_p} \left[\frac{1}{2} L(\varphi_{m_k}) + \frac{1}{2} L(\varphi_{n_k}) \right]$$

$$> \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{1}{2} L(\varphi_{m_k}) + \frac{1}{2} L(\varphi_{n_k}) \right]. \tag{10}$$

而根据(3)式，有$\lim\limits_{k\to\infty} L(\varphi_{m_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} L(\varphi_{n_k}) = \|L\|$. 于是，由(10)便推出

$$\lim_{k\to\infty} L(g_k) \geqslant \frac{1}{1-\beta} \|L\|.$$

由于$\|g_k\|_p=1$，这是明显的矛盾.因此(φ_n)必是$\mathfrak{L}_p$中的Cauchy序列，从而在$\mathfrak{L}_p$中有极限φ_0(13.11). 显然，由(3)式得到$\lim\limits_{n\to\infty} L(\varphi_n) = L(\varphi_0) = \|L\|$. □

(15.10) **引理**① 设E是一个复赋范线性空间，L是E上的一个非零有界线性泛函，并且存在$g\in E$，满足条件：$\|g\|=1$，$L(g)=\|L\|$. 设有定义在R上的函数

(i) $$t \to \|g+tf\| = \psi_f(t),$$

其中f是E的任意一个元素. 如果ψ_f和ψ_{-if}都在$t=0$可微，则有

---

①本引理是由 E.J.McShane建立的[Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), p.402].

(ii) $$\frac{1}{\|L\|}L(f)=\psi_f'(0)+i\psi'_{-if}(0).$$

证 不失一般性，假设 $\|L\|=1$．对于任意复数z，都有

$$L(g+z(f-L(f)g))=L(g)+z(L(f)-L(f)L(g))$$
$$=L(g)=1．$$

由于对于一切$h\in E$，$|L(h)|\leqslant\|h\|$，可见

$$\|g+z(f-L(f)g)\|\geqslant 1，z\in K.$$

就不等于$\frac{-1}{L(f)}$的每个$t\in R$来说，可以把$g+tf$写成以下形式

$$g+tf=(1+tL(f))\left[g+t\frac{1}{1+tL(f)}(f-L(f)g)\right].$$

方括号内的表达式，对于任意 t 其范数大于或等于 1 ，$t=0$ 时则等于1．所以

$$\|g+tf\|-\|g\|\geqslant|1+tL(f)|-1$$
$$=[(1+t\mathrm{Re}(L(f)))^2+(t\mathrm{Im}(L(f)))^2]^{\frac{1}{2}}-1$$
$$\geqslant 1+t\mathrm{Re}(L(f))-1=t\mathrm{Re}(L(f)),$$

由此得到

$$\frac{\|g+tf\|-\|g\|}{t}\geqslant\mathrm{Re}(L(f)),\quad t>0, \qquad (2)$$

$$\frac{\|g+tf\|-\|g\|}{t}\leqslant\mathrm{Re}(L(f)),\quad t<0. \qquad (3)$$

当$L(f)=0$时，由(1)显然可以得出(2)，也可以得出(3)．由此可见，

$$\psi_f'(0)=\mathrm{Re}(L(f)),\qquad f\in E. \qquad (4)$$

把(4)式应用于函数$-if$，则得到

$$\psi'_{-if}(0)=\mathrm{Re}(L(-if))=\mathrm{Im}(L(f)); \qquad (5)$$

由(4)和(5)便推出(ii)．□

(15.11) **定理**（F.Riesz） 设L是$\mathfrak{L}_p$（$1<p<\infty$）上一个

有界线性泛函．则存在一个函数$h\in \mathfrak{L}_{p'}$，使对于任意$f\in \mathfrak{L}_p$，

$$L(f)=\int_X f\bar{h}\,d\mu.$$

证 当$L=0$时，定理显然成立，因此假设$L\neq 0$．利用(15.9)，选取函数$g\in \mathfrak{L}_p$，适合$L(g)=\|L\|$，$\|g\|_p=1$．我们打算应用(15.10)，为此须证：对于任意$f\in \mathfrak{L}_p$来说，函数

$$t\to \|tf+g\|_p=\psi_f(t)$$

在$t=0$可微．命

$$\omega(t)=\psi_f^p(t)=\int_X |tf+g|^p d\mu.$$

如果记$f=f_1+if_2$，$g=g_1+ig_2$，则有

$$|tf+g|^p=[(tf_1+g_1)^2+(tf_2+g_2)^2]^{\frac{p}{2}},$$

从而对于任意t，在X上几乎处处有

$$\frac{d}{dt}|tf+g|^p=p\,|tf+g|^{p-2}[(tf_1+g_1)f_1+(tf_2+g_2)f_2].\quad (1)$$

[如果$1<p<2$，而$x\in X$与$t\in R$两点又满足$tf(x)+g(x)=0$，那么$\frac{d}{dt}|tf+g|^p$的上述表达式中第一个因子就没有意义了，第二个因子则等于零．这时，读者可以验证，导数其实是等于零的．]只要$t\neq 0$，便有

$$\frac{\omega(t)-\omega(0)}{t}=\int_X \frac{|tf+g|^p-|g|^p}{t}\,d\mu.\quad (2)$$

可以利用中值定理以及(1)式，来改写(2)式中的被积函数，这样就得到

$$\frac{\omega(t)-\omega(0)}{t}$$

$$= \int_X p\,|t'f+g|^{p-2}[(t'f_1+g_1)f_1+(t'f_2+g_2)f_2]\,d\mu, \tag{3}$$

其中 $0<|t'|<|t|$，而 t' 是 $x\in X$ 的函数．〔如果 $1<p<2$，而 $t'f(x)+g(x)=0$，那么被积函数等于零．〕由于 $(t'f_j+g_j)\leqslant|t'f+g|$，$f_j\leqslant|f|$，所以（3）中被积函数的绝对值小于或等于 $2p\,|t'f+g|^{p-1}|f|$．而当 $|t|\leqslant 1$ 时，则有

$$2p\,|t'f+g|^{p-1}|f|\leqslant 2p(|f|+|g|)^{p-1}|f|.$$

函数 $|f|$ 和 $|g|$ 都是属于 $\mathfrak{L}_p$ 的，因此 $(|f|+|g|)^{p-1}$ 属于 $\mathfrak{L}_{p'}$，从而根据Hölder不等式(13.4)知道，$(|f|+|g|)^{p-1}|f|$ 就属于 $\mathfrak{L}_1$．这样一来，当 $|t|\leqslant 1$ 时，（3）中被积函数便小于或等于确定的函数 $2p(|f|+|g|)^{p-1}|f|$，后者属于 $\mathfrak{L}_1$．于是，由Lebesgue控制收敛定理(12.24)推知

$$\lim_{t\to 0}\int_X \frac{|g+tf|^p-|g|^p}{t}\,d\mu$$

$$= \int_X p\,|g|^{p-2}(g_1f_1+g_2t_2)\,d\mu. \tag{4}$$

〔如果 $1<p<2$，而 $g(x)=0$，那么（4）式以及下面各积分中的被积函数就等于零．〕联合（2）和（4），便看出 $\omega'(0)$ 存在，并且

$$\omega'(0)= \int_X p\,|g|^{p-2}(g_1f_1+g_2f_2)\,d\mu. \tag{5}$$

由此，$\psi_f'(0)$ 也必存在．利用（5）式，并可写出

$$\psi_f'(0)=\frac{1}{p}\left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\omega'(0)$$

$$=\frac{1}{p}\|g\|_p^{1-p}\omega'(0)$$

$$= \int_X |g|^{p-2}(g_1f_1+g_2f_2)\,d\mu. \tag{6}$$

这样，由引理(15.10)及(6)式推知

$$L(f)=\|L\|(\psi_f'(0)+i\psi'_{-if}(0))$$

$$=\|L\|\int_X |g|^{p-2}((g_1f_1+g_2f_2)+i(g_1f_2-g_2f_1))d\mu$$

$$=\|L\|\cdot\int_X |g|^{p-2}\overline{g}fd\mu.$$

若命

$$h=\|L\|\cdot|g|^{p-1}\mathrm{sgn}(g),$$

则得出定理的结论；就是说

$$L(f)=\int_X f\overline{h}d\mu. \quad \square$$

(15.12) 定理 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个任意的测度空间，p是一个实数，并且$1<p<\infty$. 则由

$$T(g)=L_{\overline{g}}$$

〔参见(15.1)〕所规定的映射T是把$\mathfrak{L}_{p'}$映满$\mathfrak{L}_p^*$的一个保范线性变换. 于是，作为两个Banach空间，$\mathfrak{L}_{p'}$和$\mathfrak{L}_p^*$乃是同构的.

证 T是把$\mathfrak{L}_{p'}$映入$\mathfrak{L}_p^*$的保范映射这一事实已为(15.1)所证明. 从(15.11)推知，T还是映满$\mathfrak{L}_p^*$的. 而T为线性的乃是平凡的事实. 既然T既是线性的又是保范的，T便是1-1的. $\square$

(15.13) 习题(J.A. Clarkson) 设$(Y, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，并且$\mathscr{A}$含有两个不相交的具有有限正测度的集. 有(唯一的)一个最小正数c，它满足条件：对于任意$f, g\in\mathfrak{L}_p(1<p<\infty)$，只要$\|f\|_p$和$\|g\|_p$不同时为零，就成立

$$\frac{1}{c}\leqslant\frac{\|f+g\|_p^2+\|f-g\|_p^2}{2(\|f\|_p^2+\|g\|_p^2)}\leqslant c.$$

试证：c是存在的，并且$c=2^{\frac{|2-p|}{p}}$. 同时，常数c和$\frac{1}{c}$都是

可以达到的①.

(15.14) **习题** (a) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，p 是一个实数，$p>1$. 又设 f 是 X 上一个 $\mathscr{A}$ 可测函数，它满足：

(i) $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中可数个具有有限测度的集之并；

(ii) 对于任意 $g\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$，$fg\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$.

则 f 属于 $\mathfrak{L}_{p'}(X,\mathscr{A},\mu)$. 〔提示. 构造一个函数序列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$，它适合条件：$(|f_n|)_{n=1}^{\infty}$ 非减，处处有 $|f_n|\to|f|$，以及除了在一个具有有限测度的集上而外，各个 f_n 都等于零. 然后利用(12.22)，(15.1)及(14.23)，以得出结论：$f\in\mathfrak{L}_{p'}$. 〕

(b) (E.B.Leach). 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，假定 $\mathscr{A}$ 中凡是 $\mu(A)=\infty$ 的集 A 都包含一个集 $B\in\mathscr{A}$，适合 $0<\mu(B)<\infty$. 又设 f 是 X 上满足上述条件(ii)的任意一个 $\mathscr{A}$ 可测函数. 则 f 属于 $\mathfrak{L}_{p'}(X,\mathscr{A},\mu)$. 〔提示. 命 $A_n=\{x\in X: |f(x)|\geq\frac{1}{n}\}$. 倘若 $\mu(A_m)=\infty$，便可利用(10.56.d)，求得 A_m 的一个子集 C，满足 $C\in\mathscr{A}$，$\mu(C)=\infty$，C 是 σ 有限的. 那么 $f\xi_C$ 满足上述条件(i)，同时也满足条件(ii)，这是因为 f 是满足(ii)的. 由此得出 $f\xi_C\in\mathfrak{L}_{p'}$，矛盾. 所以 f 必满足(i). 然后应用(a). 〕

(15.15) **习题** (a) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是(10.56.b)所说的测度空间. 试说明：就这个测度空间而言，当 $1<p<\infty$ 时，(15.13)的结论不成立.

(b) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，并且存在一个集 $D\in\mathscr{A}$，它具有性质：$\mu(D)=\infty$，同时 D 的任意 $\mathscr{A}$ 可测子集都不具有有限正测度. 试证：X 上有一个 $\mathscr{A}$ 可测、非负、实值函数 f，使得(15.14.ii)成立，而 f 并不属于 $\mathfrak{L}_r$ $(0<r<\infty)$.

(16.16) **习题** 设 E 是一个（实或复）赋范线性空间，并满足

①原文为"are attained（被达到）"，自然应改为"can be attained（是可以达到的）". 这指的是，必存在 f，$g\in\mathfrak{L}_p$，使左（右）不等式取等号. ——译者注

条件：对于任意$\varepsilon>0$及x，$y\in E$，如果$\|x\|=\|y\|=1$，并且$\|x-y\|>\varepsilon$，则成立不等式

$$\text{(i)}\qquad \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\leqslant(1-\delta);$$

其中$\delta=\delta(\varepsilon)$与$x$，$y$无关，并且$0<\delta<1$. 这种空间称为**一致凸的**〔有些作者则称之为**一致圆的**（uniformly rotund）〕.

(a) 设E是一个一致凸Banach空间，L是E上一个有界线性泛函. 试证：存在$x\in E$，使得$\|x\|=1$，$L(x)=\|L\|$.〔仿照(15.9)的证明，这里要注意：(15.9.8)无非就是断言$\mathfrak{L}_p$是一致凸的. 〕

(b) 试举例说明，如果去掉一致凸性的假设，(a)的结论可能不成立.

(c) 设E是一个一致凸赋范线性空间，S是E的一个真线性子空间，而且关于E上的范数，S是完备的①，又设x是$E\cap S'$的任意一个元素. 试证明：有一个并且仅有一个元素$y_0\in S$，适合

$$\|y_0-x\|=\inf\{\|y-x\|:y\in S\}.$$

(15.17) 习题：弱收敛与Radon-Riesz定理

(13.41)定义了$\mathfrak{L}_p$中函数序列的弱收敛概念，此后又研究了弱收敛与其他几种收敛之间的关系. 也可以就任意的赋范线性空间E中的序列(x_n)来定义弱收敛如下.

所谓序列(x_n)**弱收敛于**$x\in E$，是指对于E的共轭空间E^*中的任意f，都有$f(x_n)\to f(x)$.

定理(15.11)说明，这里的定义与(13.41)就$E=\mathfrak{L}_p$ $(1<p<\infty)$的情况所下的定义是一致的——$E=\mathfrak{L}_1$的情况，见下文(20.19).

---

①例如，当E是Banach空间时，S可以是E的任意闭子空间；S也可以是任何空间E的任意一个有限维子空间〔参看(14.31.b)及(14.37)〕.

(a) 设E是(R上或K上的)一个赋范线性空间，并具有性质：如果(x_n)是E中的一个序列，$x\in E$，$\|x_n\|=1$，以及$\|x\|=1$，那么当

$$\left\|\frac{x_n+x}{2}\right\|\to 1$$

时，就有

$$\|x_n-x\|\to 0.$$

(这种空间称为**局部一致凸的**.)设(y_n)是E中的一个序列，y是E的一个元素，并满足条件：

(i) $\|y_n\|\to\|y\|$；

(ii) $y_n\xrightarrow{(w)}y$.

试证：$\|y_n-y\|\to 0$.〔当$\|y\|=0$时，断言显然成立．否则记$x_n=\|y_n\|^{-1}y_n$，$x=\|y\|^{-1}y$．那么$x_n\xrightarrow{(w)}x$，并且$\|x_n\|=\|x\|=1$．同时，如果$\|x_n-x\|\to 0$，由此可推出$\|y_n-y\|\to 0$．所以只要证$\|x_n-x\|\to 0$就行了．设若不然，则根据局部一致凸性，便有一个子序列$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，使

$$\left\|\frac{1}{2}(x_{n_k}+x)\right\|<\alpha<1\quad(k=1,2,3,\cdots).\qquad(1)$$

根据(14.13)，有$f\in E^*$，使$\|f\|=1$，$f(x)=1$．对于这个f，由(1)推知

$$\frac{1}{2}|f(x_{n_k})+1|<\alpha,$$

所以x_n并**非**弱收敛于x.〕

(b)(Radon-Riesz定理).设p是一个实数，$1<p<\infty$，$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间．把$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$写成$\mathfrak{L}_p$．又设$(f_n)$是$\mathfrak{L}_p$中一个函数序列，$f$是$\mathfrak{L}_p$中一个函数，并且$f_n\xrightarrow{(w)}f$，$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$．试证$\|f_n-f\|_p\to 0$.〔利用Clarkson不等式(15.5)

和(15.8)来证明$\mathfrak{L}_p$是局部一致凸的. 然后应用(a)小题.[①]〕

(15.18) **习题** 在$[0, 2\pi]$上按以下规则定义f和f_n($n = 1, 2, \cdots$): $f(x) = 1$, $f_n(x) = 1 + \sin(nx)$. 注意到对于任意$n \in N$, $f, f_n \in \mathfrak{L}_1([0, 2\pi], \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$. 试证:

(a) 在$\mathfrak{L}_1$中$f_n \xrightarrow{(w)} f$〔利用(16.35)〕;

(b) 对于任意$n \in N$, $\|f\|_1 = \|f_n\|_1 = 2\pi$;

(c) 依测度f_n不收敛于f;

(d) $\|f_n - f\|$不收敛于0;

(e) f_na.e.不收敛于f;

(f) $\mathfrak{L}_1([0, 2\pi], \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$不是局部一致凸的.

§16 抽象Hilbert空间

(16.1) **内积空间** 请回忆(13.16), 所谓**内积空间**, 指的是K上的线性空间H, 它具有把$H \times H$映入K的映射$(x, y) \to \langle x, y\rangle$: 并满足以下条件: (对于任意$x, y, z \in H$及$\alpha \in K$, 成立)

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle;$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle;$$

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle};$$

$$\langle x, x\rangle > 0, \quad x \neq 0$$

由以上关系式不难推出: 对于任意$x, y, z \in H$及$\alpha \in K$, 成立

$$\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0;$$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle;$$

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

---

①Radon-Riesz定理的这一简洁证明, 以及(a)小题, 是I.Glicksberg教授慨然提供给我们的.

可以类似定义R上的内积空间；这时有$\langle y, x\rangle=\langle x, y\rangle$. 由于种种原因，在分析数学中复内积空间要比实内积空间更为有用.

(16.2) 定理(Cauchy-Bunyakovskiǐ-Schwarz). 对于x, $y\in H$，有

(i) $|\langle x, y\rangle|^2\leqslant\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

(i)中等号成立的充要条件是x与y线性相关.

证 当$y=0$时，(i)中等号成立，这时有$0x=1y$. 因此假定$y\neq 0$，设$\gamma\in K$. 则有

$$0\leqslant\langle x-\gamma y, x-\gamma y\rangle=\langle x,x\rangle-\gamma\langle y,x\rangle-\bar{\gamma}\langle x, y\rangle+|\gamma|^2<\langle y,y\rangle. \tag{1}$$

在(1)中命$\gamma=\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$，便得到

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle x, x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\\&\quad-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle}{\langle y,y\rangle^2}\\&=\langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}.\end{aligned}$$

显而易见，在以上计算过程中，除$x-\gamma y=0$时之外，严格不等式成立.

如果$\alpha x=\beta y$，这里$|\alpha|+|\beta|\neq 0$，则不难看出(i)式两边相等. □

(16.3) 定理 命$\|x\|=\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. 则按照这样规定的范数，内积空间$H$成为赋范线性空间.

证 我们只验证$\|\quad\|$满足三角不等式，因为$\|\quad\|$是H上范数的其他条件显然满足. 容易看出

$$\|x+y\|^2=\langle x+y, x+y\rangle$$

$$=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2$$

应用(16.2)，得到

$$2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leqslant 2|\langle x,y\rangle|\leqslant 2\|x\|\cdot\|y\|.$$

因此$\|x+y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2$，从而$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. □

(16.4) **习题** 试求等式$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$成立的充要条件.

(16.5) **习题：极化恒等式** 试证：如果H是一个复内积空间，则对于任意x，$y\in H$，恒有

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2.$$

(16.6) **习题** 设E是一个复赋范线性空间. 试证：为使E上存在一个导出(16.3)所述已知范数的内积，其充要条件是这一已知范数满足**平行四边形定律**，即对于任意x，$y\in E$，成立

(i) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

〔当(i)式成立时，规定$\langle x,y\rangle$为

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2),$$

$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2).$$

那么(16.1)是不难验证的. 读者应画图说明：(i)正是熟知的初等事实，即平行四边形两对角线与四边所具有的基本数量关系. 本习题说明，内积空间乃是这样的赋范线性空间，即其中所有二维子空间“看来象”欧几里得空间的样子.

(16.7) **定义** 一个内积空间，当按照(16.3)所规定的范数成为Banach空间时，则叫做**Hilbert空间**，不完备的内积空间有时叫做**准Hilbert空间**.

(16.8) **例** (a) 如果$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个测度空间，那么$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu)$就是一个Hilbert空间〔(13.11)和(13.15)〕.

(b) 具有内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

的空间$\mathfrak{C}_{00}(R)$是一个不完备的内积空间. 为了看出这一点，可以用如下所定义的连续函数序列$(g_n)_{n=1}^{\infty}$来逼近$\xi_{[0,1]}$：当$-\infty<x\leqslant-\frac{1}{n}$，$1+\frac{1}{n}\leqslant x<\infty$时，$g_n(x)=0$；当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$g_n(x)=1$；在$\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$和$\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$上，$g_n$则是线性的. 序列$(g_n)$收敛于$\mathfrak{L}_2$中的$\xi_{[0,1]}$，从而是Cauchy序列. 但是，显而易见，$(g_n)$却不收敛于$\mathfrak{C}_{00}(R)$中的函数.

(c) 序列空间$l_2(N)$是由满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$$

的复序列$x=(x_n)$全体所组成的，其中规定

$$\langle(x_n), (y_n)\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}.$$

则$l_2(N)$是一个Hilbert空间.〔正如在(13.13)所看到的那样，$l_2(N)$其实就是空间$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$，其中X是集$N$，$\mathscr{A}$是X的子集全体，$\mu$是计数测度.〕

(d) x_n终归是零的序列$x=(x_n)$全体所组成的空间是一个不完备的内积空间（内积是指l_2所导出的内积）. 例如，设

$$x^m=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{m},0,0,\cdots\right),$$

则序列$(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$在l_2中收敛，但是其极限却没有零项. 读者应注

意这个空间与$\mathfrak{C}_{00}(R)$之间的类似性：其实，如果正整数集N赋以离散拓扑，那么所考虑的空间就是$\mathfrak{C}_{00}(N)$.

现在引进一个概念，眼前它是就任意内积空间提出来的，后面还要用来把全体Hilbert空间进行分类.

(16.9) **定义** 设H是一个内积空间. 对于H的两个元素x，y，当$\langle x, y\rangle = 0$时，就说x与y**互相正交**，记作$x \perp y$. 设E是H的一个子集，如果对于任意$x, y \in E$，只要$x \neq y$，就有$\langle x, y\rangle = 0$，就说E是**正交的**. 此外，如果对于任意$x \in E$，又有$\|x\| = 1$，则称E是**正规正交的**. 设E和F是H的两个子集，假如对于任意$x \in E$，及任意$y \in F$，都有$x \perp y$，这时我们说E与F**正交**，记作$E \perp F$①.

对于任意$x \in H$，集$\varnothing$与$\{x\}$正交. 向量0与H中任意向量正交.

(16.10) **定理** 如果$\{z_1, \cdots, z_n\}$是H中的一个正交集，则

$$\|z_1 + \cdots + z_n\|^2 = \|z_1\|^2 + \cdots + \|z_n\|^2.$$

证 我们有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} z_k\right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} z_j, \sum_{k=1}^{n} z_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle z_j, z_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle z_j, z_j\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \|z_j\|^2. \qquad \square$$

(16.11) **定义** 设E是一个赋范线性空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是E的元素所成的一个序列. 如果存在$x \in E$，使

$$\lim_{p \to 0} \left\| x - \sum_{n=1}^{p} x_n \right\| = 0,$$

①特别当$E = \{x\}$时，我们说x与F正交，记作$x \perp F$. ——译者注

就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

(16.12) 定理 设H是一个Hilbert空间，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中的一个正交集，就是说，当$n \neq m$时，$z_n \perp z_m$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$，则 $\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2$.

证 当$n > m$时，显然

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{m} z_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \|z_k\|^2.$$

因此，$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right)_{n=1}^{\infty}$ 是H中的Cauchy序列的充要条件是 $\left(\sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2 \right)_{n=1}^{\infty}$ 是R中的Cauchy序列。这就证明了定理的第一个断言.

现设 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z$. 记 $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$，则有

$$\|z - s_n\| \to 0, \quad \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2$$

于是$(\|z\| + \|s_n\|)_{n=1}^{\infty}$是一个有界数列. 同时还有

$$\big| \|z\| - \|s_n\| \big| \leqslant \|z - s_n\| \to 0,$$

从而

$$\left|\|z\|^2-\sum_{k=1}^{n}\|z_k\|^2\right|=|\|z\|^2-\|s_n\|^2|$$

$$=(\|z\|+\|s_n\|)|\|z\|-\|s_n\||\to 0,$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|z_k\|^2=\|z\|^2. \qquad \square$$

(16.13) **定理** 设H是一个内积空间，E是H的不含0的正交子集. 则E线性无关.

证 假设$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset E$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$都是纯量，并且

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=0.$$

则对于每个$j\in\{1,\cdots,n\}$，得到

$$0=\langle 0, x_j\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k, x_j\right\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle x_k, x_j\rangle=\alpha_j\|x_j\|^2.$$

但$x_j\neq 0$，从而$\|x_j\|^2\neq 0$. 因此所有α_j必等于0. $\square$

(16.14) **定义** 设E是内积空间H中的一个任意的正交集. 对于$x\in H$及$z\in E$，定义x**关于**z**的Fourier系数**为数$\langle x, z\rangle$.

在实Hilbert空间R^3（即三维Euclid空间）中，向量

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$$

组成一个正规正交集，而向量x关于这各个单位向量的Fourier系数，无非就是x分别在各个单位向量所确定的方向上的垂直射影的长度.

下例说明，为什么在(16.14)中要采用"Fourier系数"这一术语.

(16.15) **例** 试考虑空间$\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi], \mathscr{M}_\lambda, \frac{1}{2\pi}\lambda)$. 在这

一空间中，内积为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f,g\in \mathfrak{L}_2).$$

对于$n\in Z$，χ_n: $t\to\exp(int)$是定义在R上的连续函数，因而属于$\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$．我们要证这些函数组成一个正规正交集．对于每个$n\in Z$，有

$$\|\chi_n\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_n(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dt=1.$$

如果Z中$m\neq n$，则有

$$\begin{aligned}\langle\chi_m,\chi_n\rangle&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_m(t)\overline{\chi_n(t)}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i(m-n)t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)t)dt\\&\quad+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((m-n)t)dt=0.\end{aligned}$$

（利用初等微积分方法可求出这些积分值．）所以$\{\chi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$确是一个正规正交集．在经典Fourier级数理论中，当$f\in\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$时，$f$的第$n$ Fourier系数乃是数值

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\exp(-int)dt=\langle f,\chi_n\rangle.$$

就一个内积空间H和一个正规正交集$\{z_1,\cdots,z_n\}\subset H$而言，人们往往想知道，怎样用各个$z_k$的线性组合按照$H$的度量来精确逼近一个元素$x\in H$．以下定理则圆满回答了这个问题．

(16.16) **定理** 设H是一个内积空间，$\{z_1,\cdots,z_n\}$是H中的一个正规正交集，x是H的任意一个元素．则K^n上由

(i) $\quad f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\left\| x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k z_k \right\|$

所定义的函数 f 在 K^n 的一点且唯一的一点，即 $\alpha_k=\langle x,\ z_k\rangle$ ($k=1,\cdots,\ n$) 取绝对极小值．此外，还成立不等式

(ii) $\quad \sum_{k=1}^{n}|\langle x,\ z_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$

证 我们有

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k z_k \right\|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle x,z_k\rangle-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle z_k,x\rangle+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2$$

$$=\|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}\{|\langle x,z_k\rangle|^2-\overline{\alpha_k}\langle x,z_k\rangle-\alpha_k\overline{\langle x,z_k\rangle}+|\alpha_k|^2\}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,\ z_k\rangle|^2$$

$$=\|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,z_k\rangle-\alpha_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,z_k\rangle|^2.$$

所以，当且仅当 $\alpha_k=\langle x,z_k\rangle(k=1,\cdots,n)$ 时，$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 为极小值；这时，我们看出

$$0\leqslant\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,z_k\rangle|^2.\quad\square$$

(16.17) 定理（Bessel不等式） 设 E 是内积空间 H 中的一个非空正规正交集，$x\in H$．则成立不等式

(i) $\quad \sum_{z\in E}|\langle x,z\rangle|^2\leqslant\|x\|^2,$

从而 $\{z\in E:\ \langle x,\ z\rangle\neq 0\}$ 可数．

证 由不等式(16.16.ii)推知，对于每个非空有限集$F\subset E$，成立

$$\sum_{z\in F}|\langle x,z\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

因此

$$\sum_{z\in E}|\langle x,z\rangle|^2=\sup\left\{\sum_{z\in F}|\langle x,z\rangle|^2:\ F\neq\varnothing,\ F\text{有限},\ F\subset E\right\}\leqslant\|x\|^2.\quad\square$$

(16.18) **定理** 设$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$是Hilbert空间H中的一个正规正交集. 则对于任意$x\in H$，在H中必存在向量$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,z_k\rangle z_k$，而且$x-y$正交于每个$z_k$.

证 由(16.12)及Bessel不等式可知，y的存在性是没问题的. 设$m\in N$，须证$\langle x-y,z_m\rangle=0$. 对于每个$n\in N$，命

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\langle x,z_k\rangle z_k.$$

那么对于一切$n\geqslant m$，都有

$$\begin{aligned}|\langle x-y,z_m\rangle|&\leqslant|\langle x-y_n,z_m\rangle|+|\langle y_n-y,z_m\rangle|\\&\leqslant\left|\langle x,z_m\rangle-\sum_{k=1}^{n}\langle x,z_k\rangle\langle z_k,z_m\rangle\right|\\&\qquad+\|y_n-y\|\,\|z_m\|\\&=0+\|y_n-y\|.\end{aligned}$$

这里利用了$\{z_k\}$是正规正交的这一事实. 由于$\|y_n-y\|\to0$，可见$\langle x-y,z_m\rangle=0$. $\square$

我们立即就研究把内积空间的任意元素写成正规正交集的元素其线性组合之极限这一问题. 先引进一个定义.

(16.19) **定义** 设E是内积空间H的一个正规正交集，如果只有零向量才与E的所有元素正交，就说E是**完全的**.

(16.20) **定理** 凡不是$\{0\}$的内积空间H必含有一个完全正规正交集. 其实，H的每个正规正交子集都含在一个完全正规正交集之中.

证 我们利用Tukey引理(3.8)进行证明. 设A是H的任意一个非空正规正交子集；比如说，$A=\{\|x\|^{-1}x\}$，其中$x\neq 0$，$x\in H$. 再设

$$\mathscr{F}=\{B:B\subset H,\ A\cup B\text{是正规正交集}\}.$$

由于要检验正规正交性，只是一次检验两个向量而已，因此很清楚，$\mathscr{F}$是具有有限特征的. 同时因为$A\in\mathscr{F}$，所以$\mathscr{F}$又非空. 这样，根据Tukey引理，$\mathscr{F}$必有一个极大元E. 显而易见$E\supset A$.

我们断言E是完全的. 假定$y\neq 0$，而$y\perp E$. 命$z=\|y\|^{-1}y$. 则

$$E\cup\{z\}\in\mathscr{F},\qquad E\subsetneqq E\cup\{z\}.$$

这与E的极大性相矛盾. 于是当$y\perp E$时，必有$y=0$. □

上述证明是非构造性的；它并没有提供任何线索——在任意的已知内积空间中，究竟怎样来构造一个完全正规正交集. 实用上有一些方法，其计算量并不大，可以用来构造完全正规正交集. 我们现在就来研究这种构造方法.

(16.21) **引理** 设S是内积空间H的一个稠密子集. 如果$x\perp S$，则$x=0$.

证 在S中取一序列(y_n)，使$\|x-y_n\|\to 0$. 那么

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\langle x,x\rangle-\langle x,y_n\rangle=\langle x,x-y_n\rangle\\&\leqslant\|x\|\cdot\|x-y_n\|\to 0.\end{aligned}$$

因此$\|x\|=0$. □

(16.22) **Gram-Schmidt正规正交化方法** 设H是一个内积空间，$\{y_1,\cdots,y_n,\cdots\}$是$H$的一个有限或可数无限的线性无关子集. 又设$z_1=y_1$，命

$$u_1=\|z_1\|^{-1}z_1,$$

$$z_2=y_2-\langle y_2,u_1\rangle u_1.$$

这里z_2不是零向量，因为y_2不是y_1的倍数．规定

$$u_2=\|z_2\|^{-1}z_2.$$

则有

$$\langle u_2,u_1\rangle=\|z_2\|^{-1}\langle z_2,u_1\rangle=0.$$

于是集$\{u_1, u_2\}$是正规正交的，而且$\{u_1,u_2\}$与$\{y_1,y_2\}$张成相同的二维子空间．

我们归纳定义一个正规正交集$\{u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$，使对于每个正整数$k$，集$\{u_1,\cdots,u_k\}$与$\{y_1,\cdots,y_k\}$张成相同的子空间．这样，假设已构造好了$\{u_1,\cdots,u_n\}$，并且$\text{span}\{u_1,\cdots,u_k\}=\text{span}\{y_1,\cdots,y_k\}$①（$k=1,\cdots,n$）．如果$\{y_1,\cdots,y_n\}$是全体$y$，那么就终止构造过程．如果存在$y_{n+1}$，则命

$$z_{n+1}=y_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\langle y_{n+1},u_k\rangle u_k.$$

这里z_{n+1}不是零向量，原因在于$y_{n+1}\notin\text{span}\{y_1, \cdots, y_n\}=\text{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$．再规定

$$u_{n+1}=\|z_{n+1}\|^{-1}z_{n+1}.$$

当$1\leqslant j\leqslant n$时，得到

$$\begin{aligned}\langle u_{n+1},u_j\rangle&=\|z_{n+1}\|^{-1}\left\langle y_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\langle y_{n+1},u_k\rangle u_k,u_j\right\rangle\\&=\|z_{n+1}\|^{-1}(\langle y_{n+1},u_j\rangle-\langle y_{n+1},u_j\rangle\cdot\langle u_j,u_j\rangle)\\&=0.\end{aligned}$$

于是集$\{u_1, \cdots, u_{n+1}\}$是正规正交的；尚需证明$\{u_1, \cdots, u_{n+1}\}$与$\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$张成相同的子空间．由z_{n+1}和u_{n+1}的定义，显而易见，y_{n+1}是$u_1, \cdots, u_{n+1}$的线性组合．因此

$$\{y_{n+1}\}\cup(\text{span}\{y_1,\cdots,y_n\})\subset\text{span}\{u_1,\cdots,u_{n+1}\},$$

从而

---

①span的意思是“张成”．这里用$\text{span}\{u_1, \cdots, u_k\}$表示由$\{u_1, \cdots, u_k\}$张成的子空间．——译者注

$$\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}\subset\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{n+1}\}.$$

同样，u_{n+1}是向量y_{n+1}和u_1，…，u_n的线性组合．根据归纳假设，可见$u_{n+1}\in\mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$，因此又有

$$\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{n+1}\}\subset\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}.$$

于是这两个子空间是相同的．（本来由论证维数，也可以把第一个包含关系反过来．）

Gram-Schmidt方法所得出的正规正交集是本质唯一的．更确切地说，如果对于每个n，$\{u_1, \cdots, u_n\}$与$\{y_1, \cdots, y_n\}$张成相同的子空间，那么必定有$u_1=\frac{\gamma}{\|y_1\|}y_1$，这里$|\gamma|=1$．所以，除去一个绝对值为1的常数因子不计外，$u_1$是唯一确定的．定义好了$\{u_1,\cdots,u_n\}$后，必须取$u_{n+1}\in\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_n,y_{n+1}\}$．这样，对于某些复数$\beta_1,\cdots,\beta_n$，$\alpha$，便有

$$u_{n+1}=\alpha y_{n+1}+\beta_1 u_1+\cdots+\beta_n u_n.$$

数α不可能等于零，这是因为，如果α等于零，那么$u_{n+1}\in\mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_n\}=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$，由此会得到$y_{n+1}\in\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{n+1}\}=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$．这与各个$y_i$的线性无关性相矛盾了．所以

$$\frac{1}{\alpha}u_{n+1}=y_{n+1}+\delta_1 u_1+\cdots+\delta_n u_n,$$

从而又得

$$0=\left\langle\frac{1}{\alpha}u_{n+1},u_j\right\rangle=\langle y_{n+1},u_j\rangle+\delta_j,$$

由此

$$\delta_j=-\langle y_{n+1},u_j\rangle\qquad(1\leqslant j\leqslant n).$$

于是有

$$\frac{1}{\alpha}u_{n+1}=y_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\langle y_{n+1},u_k\rangle u_k,$$

这正是我们所定义过的z_{n+1}．现在由最后这个等式，通过取范数，

并注意到$\|u_{n+1}\|=1$，便确定了数α．很明显，α从而u_{n+1}都是唯一的，至多相差一个绝对值为1的常数因子．

(16.23) **定理** 设H是一个非$\{0\}$内积空间，并含有一个可数稠密子集D．则H必包含一个可数的完全正规正交集，它是由D根据Gram-Schmidt方法所得到的．

证 不妨假设$0\notin D$，把D枚举成$(x_n)_{n=1}^{\infty}$．规定$y_1=x_{n_1}$，其中$n_1=1$．假设已规定好了$y_1=x_{n_1},\cdots,y_k=x_{n_k}$，它们线性无关，并且$n_1<n_2<\cdots<n_k$．如果没有$j>n_k$，能使$\{y_1,\cdots,y_k,x_j\}$线性无关，就终止这一过程．否则，可设$n_{k+1}$是这种$j$里最小的一个，并规定$y_{k+1}=x_{n_{k+1}}$．这样我们就确定了一个有限或可数无限的线性无关集$\{y_1,y_2,\cdots\}\subset D$．命$S$是含有$\{y_1,y_2,\cdots\}$的$H$中最小线性子空间．很清楚，$D\subset S$．这是因为如果$x_j\in D$，那么$x_j$应是$y_1,\cdots,y_k$的线性组合，其中$k$可以这样选取，使$n_k\leqslant j<n_{k+1}$（否则，$y_k$必是所选取的最末尾的$y$，并且$n_k\leqslant j$）．所以$S$在$H$中稠密．

设$\{u_1,u_2,\cdots\}$是由集$\{y_1,y_2,\cdots\}$根据Gram-Schmidt方法所得到的正规正交集．我们要证实$\{u_1,u_2,\cdots\}$是完全的．设$x\in H$，并且对于任意n，都有$\langle x,u_n\rangle=0$．那么对于各个u_n的一切线性组合，必有

$$\left\langle x,\ \sum_{n=1}^{p}\alpha_n u_n\right\rangle=0,$$

从而对于任意$y\in S$，$\langle x,\ y\rangle=0$．由(16.21)知道，$x=0$．
□

(16.24) **推论** 设$n\in N$．则一个内积空间H（作为一个内积空间）不能与K^n区别开的充要条件是H的代数维数等于n．〔在K^n中我们规定

$$\langle(z_1,\ \cdots,\ z_n),\ (w_1,\ \cdots,\ w_n)\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}z_j\bar{w}_j.\ 〕$$

证 很清楚，当H具有维数n时，上述证明中各个y的选取过

程到$\{y_1, \cdots, y_n\}$就终止了．这样便得到了一个完全正规正交集$\{u_1, \cdots, u_n\} \subset H$．由

$$\sum_{j=1}^{n} a_j u_j \to (a_1, \cdots, a_n)$$

所给定的把H映满K^n的映射保持所有内积空间结构不变，换句话说，这个映射是1-1的、映满的、线性的，乃至保内积（从而也保范数）．必要性显然． □

(16.25) **例** 为了举例说明，我们来作出某个经典的正规正交集．对于每个整数$n \geqslant 0$，在R上规定f_n为

$$f_n(x) = x^n \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

因为对于任意$n \geqslant 0$，都有$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n}}{\exp(k^2)} < \infty$，所以每个$f_n$显然属于Hilbert空间$\mathfrak{L}_2(R, \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$．既然每个多项式仅有有限多个根，集$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$在$K$上便是线性无关的．对于每个整数$n \geqslant 0$，规定

$$H_n(x) = (-1)^n \exp[x^2] \exp^{(n)}[-x^2],$$

其中上标$^{(n)}$表示函数$x \to \exp[-x^2]$的n阶导数．函数$(H_n)_{n=0}^{\infty}$分明都是多项式．H_n叫做**Hermite多项式**．前三个Hermite多项式为

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

有耐心，就可以继续算下去．再命

$$\varphi_n(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] H_n(x);$$

这些函数叫做**Hermite函数**．它们都属于$\mathfrak{L}_2(R, \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$，而且下面就要证明，它们还组成正交集．首先，我们得到

$$\varphi_n''(x)=(-1)^n\Big\{(x^2+1)\exp\Big[\frac{x^2}{2}\Big]\exp^{(n)}(-x^2)$$

$$+2x\exp\Big[\frac{x^2}{2}\Big]\exp^{(n+1)}(-x^2)$$

$$+\exp\Big[\frac{x^2}{2}\Big]\exp^{(n+2)}(-x^2)\Big\}. \qquad (1)$$

利用求乘积导数的Leib niz法则，得出

$$\exp^{(n+2)}(-x^2)=\{-2x\exp(-x^2)\}^{(n+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-2x)^{(k)}\exp^{(n+1-k)}(-x^2)$$

$$=(-2x)\exp^{(n+1)}(-x^2)$$

$$+(n+1)(-2)\exp^{(n)}(-x^2).$$

把上式代入(1)式，得到

$$\varphi_n''(x)=(-1)^n\exp\Big[\frac{x^2}{2}\Big]\{(x^2+1)\exp^{(n)}(-x^2)$$

$$+2x\exp^{(n+1)}(-x^2)+(-2x\exp^{(n+1)}(-x^2)$$

$$-2(n+1)\exp^{(n)}(-x^2))\}$$

$$=(-1)^n\exp\Big[\frac{x^2}{2}\Big]\exp^{(n)}(-x^2)(x^2-2n-1)$$

$$=(x^2-2n-1)\varphi_n(x).$$

这样，每个φ_n都满足微分方程

$$\varphi_n''(x)=(x^2-2n-1)\varphi_n(x).$$

所以，对于任意一对非负整数m，n，有

$$\varphi_n''\varphi_m-\varphi_n\varphi_m''=(x^2-2n-1)\varphi_n\varphi_m-(x^2-2m-1)\varphi_n\varphi_m$$

$$=2(m-n)\varphi_n\varphi_m.$$

当$m\neq n$时，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\varphi_m dx$$

$$=\frac{1}{2(m-n)}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_n''\varphi_m-\varphi_n\varphi_m'')dx$$

$$=\frac{1}{2(m-n)}\lim_{A\to\infty}\left\{\varphi_m\varphi_n'\Big|_{-A}^{A}-\int_{-A}^{A}\varphi_n'\varphi_m'dx-\varphi_m'\varphi_n\Big|_{-A}^{A}\right.$$

$$\left.+\int_{-A}^{A}\varphi_n'\varphi_m'dx\right\}=0.$$

（计算中需用到Lebesgue控制收敛定理.）于是$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$是正交集.

为了正规化各个φ_n，现在计算$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2dx$。先证明以下等式

$$H_n'=2nH_{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{2}$$

我们有

$$H_n'(x)=(-1)^n\{2x\exp(x^2)\exp^{(n)}(-x^2)$$
$$+\exp(x^2)\exp^{(n+1)}(-x^2)\}.$$

与前面计算一样，得出

$$\exp^{(n+1)}(-x^2)=-2x\exp^{(n)}(-x^2)-2n\exp^{(n-1)}(-x^2),$$

因而

$$H_n'(x)=(-1)^n\{2x\exp(x^2)\exp^{(n)}(-x^2)$$
$$+\exp(x^2)(-2x\exp^{(n)}(-x^2)-2n\exp^{(n-1)}(-x^2))\}$$
$$=(-1)^{n-1}2n\exp(x^2)\exp^{(n-1)}(-x^2)=2nH_{n-1}.$$

这就证明了等式（2）. 为了求出上述积分值，首先注意到以下熟知事实：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx=\pi^{\frac{1}{2}}$$

（参见下文(21.60).）其次，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)H_n^2(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)H_n(x)\exp(x^2)(-1)^n\exp^{(n)}(-x^2)dx$$

$$=(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \exp^{(n)}(-x^2) dx$$

$$=\lim_{A\to\infty} \left\{ (-1)^n H_n(x) \exp^{(n-1)}(-x^2) \Big|_{-A}^{A} + (-1)^{n-1} \int_{-A}^{A} H_n'(x) \exp^{(n-1)}(-x^2) dx \right\}$$

$$=2n \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} H_{n-1}(x) \exp^{(n-1)}(-x^2) dx$$

$$=2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx.$$

这就建立了递推公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx,$$

由此可见

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

所以，由

$$\psi_n(x) = (\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(x)$$
$$= (\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n \cdot \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] \exp^{(n)}(-x^2)$$

所给出的函数$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$组成一个正规正交集．这些函数$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$是由$\left\{x^n \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$根据Gram-Schmidt方法所得出的．这不难从对于任意n，H_n的次数为n这一事实，以及(16.22)所指出的本质唯一性推出．

(16.26) **定理** 设H是一个Hilbert空间，E是H的一个正规正交子集．则E的以下五个性质是等价的：

(i) 集E是完全的．

(ii) 对于每个 $x \in H$，成立 $x = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle z$（Fourier 级数）①.

(iii) 对于任意$x \in H$，成立 $\| x \|^2 = \sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2$（Parseval恒等式）.

(iv) 对于任意 $x, y \in H$，成立 $\langle x, y \rangle = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle \overline{\langle y, z \rangle}$（Parseval恒等式）.

(v) H 的含有E的最小子空间在H中稠密.

证 假设(i)成立，并设 $x \in H$. 按照Bessel不等式(16.17)，仅有可数多个 $z \in E$，使得$\langle x, z \rangle \neq 0$；把这些 z 枚举成(z_n). 根据(16.18)，存在向量

$$y = \sum_n \langle x, z_n \rangle z_n = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle z,$$

并且 $x - y$ 正交于E. 既然E完全，可见 $x - y = 0$；因此 (ii) 成立.

为了证明(ii)蕴涵(iv)，设给定 x，$y \in H$，并设(z_k)是适合$\langle x, z \rangle \neq 0$ 或$\langle y, z \rangle \neq 0$的所有 $z \in E$的一个枚举. 命

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k \rangle z_k,$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle y, z_k \rangle z_k.$$

则得出

$$\left| \langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k \rangle \overline{\langle y, z_k \rangle} \right|$$

①等式(ii)的涵义是，右边仅有可数多个非零项，而且用这些项的任意枚举所产生的级数按(16.11)的意义收敛于x. 等式(iii)，(iv)有类似涵义.

$$= |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle|$$
$$\leqslant |\langle x,y\rangle - \langle x_n,y\rangle| + |\langle x_n,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle|$$
$$\leqslant \| x-x_n \| \cdot \| y \| + \| x_n \| \cdot \| y_n - y \| \to 0,$$

这是因为 $\| x - x_n \| \to 0$，$\| y_n - y \| \to 0$，$\| x_n \| \to \| x \|$. 于是

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, z_k\rangle \overline{\langle y, z_k\rangle} = \sum_{z \in E} \langle x,z\rangle \overline{\langle y,z\rangle};$$

由此证实了(iv).

显而易见，(iv)蕴涵(iii). 如果(iii)成立，而且对于任意 $z \in E$，$\langle x, z\rangle = 0$，那么自然得到 $\| x \| = 0$. 因此(iii)又蕴涵(i). 这就完成了(i)，(ii)，(iii)，以及(iv)彼此等价的证明.

很清楚，(ii)蕴涵(v). 最后证明(v)还蕴涵(i). 设 $x \in H$，而且对于任意 $z \in E$，$\langle x, z\rangle = 0$. 那么不难明白，对于E的线性张成中的一切y，$\langle x, y\rangle = 0$，由(v)和(16.21)知道 $x = 0$.
□

(16.27) 定理 Hilbert空间H中的任意两个完全正规正交集，都具有相同基数.

证 不考虑平凡情况，假定 $H \neq \{0\}$. 设A，B是H中任意两个完全正规正交集. 当A有限时，由(16.26.ii)及(16.13)可知A是K上H的一个Hamel基. 由于B是线性无关的，(3.26)则表明B含在某个Hamel基C中，因此$\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$，又根据(4.58)，$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}$. 这样$B$也是有限的，而且还是一个Hamel基. 再由(4.58)，便得到 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.

尚需研究A，B都是无限集的情况. 对于每个 $a \in A$，命

$$B_a = \{b \in B : \langle a, b\rangle \neq 0\}$$

那么对于所有 $a \in A$，B_a可数. 当 $b \in B$时，则得

$$1 = \| b \|^2 = \sum_{a \in A} |\langle b,a\rangle|^2$$

(16.26.iii)，从而存在某个 $a \in A$，使 $\langle a, b\rangle \neq 0$，也就是

$b\in B_\alpha$. 这样

$$B=\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha.$$

由此可见

$$\overline{\overline{B}}\leqslant(\mathrm{card}N)\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{A}}.$$

在上述论证中互换A和B，又得出$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$. 从Schröder-Bernstein定理知道$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. □

(16.28) 定义 设H是一个Hilbert空间. 当$H\neq\{0\}$时，则定义H**的正交维数**为H中任意一个完全正规正交集的基数（它是唯一的！）. 当$H=\{0\}$时，就说H具有**正交维数零**.

(16.29) 定理 设H是一个非零Hilbert空间. 则存在一个集D以及把H映满$l_2(D)$并保内积（从而也保范数）的一个线性变换T. 同时，$\overline{\overline{D}}$还是H的正交维数.

证 设D是H中的一个任意的完全正规正交集；那么$\overline{\overline{D}}$便是H的正交维数. 对于$x\in H$，设$T(x)$是D上的函数，它满足：对于任意$z\in D$，成立

$$[T(x)](z)=\langle x,z\rangle.$$

那么T就把H映入$l_2(D)$. 这是因为根据Bessel不等式，$\sum_{z\in D}|\langle x,z\rangle|^2<\infty$. 此外，设$x,y\in H$，则对于任意$z\in D$，得到$[T(x+y)](z)=\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=[T(x)](z)+[T(y)](z)$；即$T(x+y)=T(x)+T(y)$. 类似地，对于任意$\alpha\in K$，又有$T(\alpha x)=\alpha T(\alpha)$. 这样$T$便是线性的. 利用Parseval恒等式(16.26.iv)，得到

$$\begin{aligned}\langle T(x),T(y)\rangle&=\sum_{z\in D}[T(x)(z)]\overline{[T(y)(z)]}\\&=\sum_{z\in D}\langle x,z\rangle\overline{\langle y,z\rangle}=\langle x,y\rangle,\end{aligned}$$

所以T保内积．最后，我们证实T还是映满$l_2(D)$的．如果$f\in l_2(D)$，那么$\sum_{z\in D}|f(z)|^2<\infty$，由(16.12)可知$x=\sum_{z\in D}f(z)z$属于$H$，设$(z_n)$是适合$f(z)\neq 0$或$\langle x,z\rangle\neq 0$的所有$z\in D$的一个枚举．对于一个固定的$p$以及任意$m\geqslant p$，有

$$\begin{aligned}&|\langle x,z_p\rangle-f(z_p)|\\&=\left|\langle x,z_p\rangle-\sum_{n=1}^{m}f(z_n)\cdot\langle z_n,\ z_p\rangle\right|\\&\leqslant\left\|\ x-\sum_{n=1}^{m}f(z_n)z_n\ \right\|\cdot\|z_p\|\to 0\quad(m\to\infty).\end{aligned}$$

因此对于一切$z\in D$，$f(z)=\langle x,z\rangle=T(x)(z)$：所以$f=T(x)$．□

(16.30) 评注 从(16.29)知道，每个$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$作为Hilbert空间，都由一个单一的基数完全确定，实际上是不能与某个$l_2(D)$区别开的．就$\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$，$p\neq 2$而言，著者尚不知道它也具有此类特征．同时我们还看到，相应于每个基数，恰好存在一个（复）Hilbert空间，就是说，Hilbert空间由其正交维数完全确定．

(16.31) 定理[①] 设H是一个Hilbert空间，f是H上的一个有界线性泛函．则存在唯一的$y\in H$，使对于任意$x\in H$，都成立

$$f(x)=\langle x,y\rangle.$$

而且

$$\|f\|=\|y\|.$$

证 既然可以认为H与某个$l_2(D)$是等同的，由(15.12)便推出本定理．□

(16.32) 定理 函数$\chi_n:t\to\exp(int)$（$n\in Z$）组成

---

①本定理即Riesz（泛函表示）定理．——译者注

$\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi], \mathscr{M}_\lambda, \frac{1}{2\pi}\lambda)$中的一个完全正规正交集.

证 我们曾证明过〔见(16.15)〕：$\{\chi_n\}_{n\in Z}$ 是$\mathfrak{L}_2$中的一个正规正交集. 现在证明它还是完全的. 命

$$T=\{z\in K: |z|=1\}=\{\exp(it): -\pi\leqslant t\leqslant\pi\}.$$

对于任意整数 n，函数

$$\exp(it)\to\exp(int)$$

在T上连续. 设$\mathfrak{T}$表示具有以下形状的函数全体所成的集：

$$\exp(it)\to\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\exp(ikt),$$

其中 $\alpha_k\in K$. 这些函数（由于显而易见的道理）叫做**三角多项式**. (7.35.b)已证明了$\mathfrak{T}$在$\mathfrak{C}(T)$中一致稠密. 不难明白，由此推出适合$f(-\pi)=f(\pi)$的任意函数 $f\in\mathfrak{C}([-\pi,\pi])$可以用$\mathfrak{T}$中的函数——看作 $t\in[-\pi,\pi]$的函数——来（任意精确地）一致逼近. 现设$\varphi\in\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$，$\varepsilon$是一个正实数. 利用(13.21)可选取函数$g\in\mathfrak{C}([-\pi,\pi])$，使

$$\|\varphi-g\|_2\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

然后（如有必要），对于一个适当的$\delta>0$，通过改变g在区间$[\pi-\delta,\pi]$上的值，不难找到一个函数$f\in\mathfrak{C}([-\pi,\pi])$，使

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad \|g-f\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$$

最后，取函数$p\in\mathfrak{T}$，使

$$\|f-p\|_u<\frac{\varepsilon}{3}.$$

则

$$\|\varphi-p\|_2\leqslant\|\varphi-g\|_2+\|g-f\|_2+\|f-p\|_2$$

$$<\frac{2}{3}\varepsilon+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\varepsilon$$

$$=\varepsilon.$$

于是$\mathfrak{T}$在$\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$中稠密．根据(16.26.v)知道，$\{\chi_n\}_{n\in Z}$是完全的． □

(16.33) 定义 设$f\in\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$，命

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\exp(-int)dt \quad (n\in Z).$$

数$\hat{f}(n)$叫做f的**第n项Fourier系数**．Z上的函数$\hat{f}$叫做f的**Fourier变换**．

(16.34) 定理 设$f\in\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$．如果等式$\hat{f}=0$恒成立，则在$\mathfrak{L}_1$中$f=0$①．

证 设$\mathfrak{T}$是(如(16.32)证明中所定义的)T上三角多项式全体所成的集．当$\hat{f}=0$时，对于任意$p\in\mathfrak{T}$，显然得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)p(t)dt=0.$$

设x是$]-\pi,\pi[$中一个定数．不难构造一个非减的非负连续函数序列$(g_n)_{n=1}^{\infty}$，满足：

$$g_n(-\pi)=g_n(\pi)=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}g_n(t)=\xi_{]-\pi,x[}(t) \qquad (t\in[-\pi,\pi]).$$

根据(7.35.b)，对于每个$n\in N$，存在一个多项式$p_n\in\mathfrak{T}$，使

$$\|g_n-p_n\|_u<\frac{1}{n}.$$

①原文如此．这里"$f=0$"应改为"$f=0$ a.e."．——译者注

于是得到

$$f(t)\xi_{]-\pi,\pi[}(t)=\lim_{n\to\infty}f(t)p_n(t) \qquad (t\in[-\pi,\pi]),$$

显然

$$|f(t)p_n(t)|\leqslant|f(t)|\left(|g_n(t)|+\frac{1}{n}\right)\leqslant 2|f(t)|.$$

Lebesgue控制收敛定理(12.30)表明

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\xi_{]-\pi,\pi[}(t)dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)p_n(t)dt=0.$$

由(12.54)便得出结论：在$[-\pi,\pi]$上a.e.成立$f=0$. □

(16.35) Riemann-Lebesgue引理 设$f\in\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$. 则$\lim_{|n|\to\infty}\hat{f}(n)=0$.

证 任给$\varepsilon>0$. 利用(13.21)，取$g\in\mathfrak{C}([-\pi,\pi])$，使

$$\|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然$g\in\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$. 根据Bessel不等式得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{g}(n)|^2\leqslant\|g\|_2^2.$$

这样便存在正整数p，使得只要$|n|\geqslant p$，就有$|\hat{g}(n)|<\frac{\varepsilon}{2}$.
所以当$|n|\geqslant p$时，有

$$|\hat{f}(n)|\leqslant|\hat{f}(n)-\hat{g}(n)|+|\hat{g}(n)|$$

$$<\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))\exp(-inx)dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square$$

(16.36) **评注** 就空间$\mathfrak{L}_1(R, \mathscr{M}_\lambda, \lambda)=\mathfrak{L}_1(R)$而言，也有一套类似的Fourier变换理论. 这时，对于每个$y\in R$，人们规定

$$\hat{f}(y)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-iyx)dx.$$

等式$\hat{f}=0$仍然蕴涵$f=0$ a.e.同样也有$\lim\limits_{|y|\to\infty}\hat{f}(y)=0$. 在分析数学的若干领域里，这些变换是很重要的. 借助于它们，可以证明Hermite函数组成$\mathfrak{L}_2(R)$中一个完全正规正交集；其简略证明，请参看下文(21.64.b).

(16.37) **定理**（Parseval恒等式） 设$f\in\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$，则成立等式

(i) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2.$$

证 这乃是(16.26)，(16.32)，以及$\hat{f}(n)$的定义(16.33)的直接推论. $\square$

(16.38) **评注** 可以把(16.37)推广到$\mathfrak{L}_p([-\pi,\pi])$，$1<p<2$. 这时，如果不是对于某个$\alpha\in K$及$m\in Z$，$f(x)=\alpha\exp(imx)$，则成立不等式

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这并非显然的事实，其证明相当复杂. 请参看：例如Hewitt等①.

(16.39) **定理** Riesz-Fischer定理 设$(\alpha_n)_{n=-\infty}^{\infty}$在$l_2(Z)$

---

①E. Hewitt and I. I. Hirschman Jr., Amer. J. Math. 76, 839—852 (1954).

中，也就是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$. 则必有一个函数 $f\in\mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$，使对于任意 $n\in Z$，有

$$\hat{f}(n)=\alpha_n.$$

证 这是 $\mathfrak{L}_2$ 的完备性(13.11)的简单推论. 命

$$f_k(t)=\sum_{j=-k}^{k}\alpha_j\exp(ijt)(k=1,2,\cdots).$$

则等式

$$\|f_k-f_l\|_2^2=\sum_{j=-l}^{-k-1}|\alpha_j|^2+\sum_{j=k+1}^{l}|\alpha_j|^2$$

表明 (f_k) 乃是Cauchy序列. 设 f 是 (f_k) 在 $\mathfrak{L}_2$ 中的极限. 显然有

$$\hat{f}(n)=\lim_{k\to\infty}\hat{f}_k(n)=\alpha_n. \quad \square$$

(16.40) **定理** 设 H 是一个Hilbert空间，$\mathfrak{B}(H)$ 表示 H 到 H 内的有界线性算子(变换)全体所成的空间. 则 $\mathfrak{B}(H)$ 是具有单位元的一个Banach代数，这里把合成作为乘法. 此外，对于每个 $T\in\mathfrak{B}(H)$，存在唯一的 $T^*\in\mathfrak{B}(H)$，使对于任意 x，$y\in H$，都有

$$\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle.$$

而且 $T^{**}=T$，$\|T^*\|=\|T\|$. 算子 T^* 叫做 T 的**伴随**.

证 (14.4)已证明了 $\mathfrak{B}(H)$ 是一个Banach空间. 设 T_1，$T_2\in\mathfrak{B}(H)$，$x\in H$，则有

$$\|T_1T_2(x)\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2(x)\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2\|\cdot\|x\|.$$

因此 $T_1T_2\in\mathfrak{B}(H)$，并且

$$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2\|.$$

不难看出 $\mathfrak{B}(H)$ 是 K 上的一个代数. 所以 $\mathfrak{B}(H)$ 是Banach代数.

设 $T\in\mathfrak{B}(H)$. 对于每个 $y\in H$，在 H 上定义 f_y 为

$$f_y(x) = \langle T(x), y\rangle.$$

则对于任意 $x \in H$，都有

$$|f_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| \leqslant \| T \| \cdot \| x \| \cdot \| y \|.$$

显然f_y是线性的．所以f_y是H上的一个有界线性泛函，并且 $\| f_y \| \leqslant \| T \| \cdot \| y \|$．由(16.31)知道，存在唯一的元素$T^*(y) \in H$，使对于任意 $x \in H$，都成立

$$\langle T(x), y\rangle = f_y(x) = \langle x, T^*(y)\rangle,$$

而且

$$\| T^*(y) \| = \| f_y \| \leqslant \| T \| \cdot \| y \|. \qquad (1)$$

这就在H上定义了T^*．通过简单计算可知，T^*是线性的，而(1)式蕴涵T^*是有界的，并且

$$\| T^* \| \leqslant \| T \|. \qquad (2)$$

把上述结果应用于T^*，则对于任意 x，$y \in H$，得到

$$\langle T^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, {}^*T(x)\rangle} = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \langle x, T(y)\rangle.$$

既然伴随是唯一的，由此推出$T = (T^*)^* = T^{**}$．然后应用不等式(2)，其中T换成T^*，又得到

$$\| T \| = \| T^{**} \| \leqslant \| T^* \|.$$

于是 $\| T \| = \| T^* \|$．　□

(16.41)　**定理**　H和$\mathfrak{B}(H)$如(16.40)所设．则把$\mathfrak{B}(H)$映入$\mathfrak{B}(H)$的映射$T \to T^*$具有下列性质：

(i)　$(T_1 + T_2)^* = T^*_1 + T^*_2$；

(ii)　$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$　　$(\alpha \in K)$；

(iii)　$(T_1 T_2)^* = T^*_2 T^*_1$；

(iv)　$T^{**} = T$；

(v)　$\| T^* T \| = \| T \|^2$．

证　(16.40)已确立了等式(iv)．等式(i)—(iii)可由伴随的唯一性以及下列计算得出：

$$\langle (T_1 + T_2)(x), y\rangle = \langle T_1(x), y\rangle + \langle T_2(x), y\rangle$$
$$= \langle x, T^*_1(y)\rangle + \langle x, T^*_2(y)\rangle$$

$$=\langle x,(T^*_1+T^*_2)(y)\rangle;$$

$$\langle(\alpha T)(x),y\rangle=\alpha\langle T(x),y\rangle=\alpha\langle x,T^*(y)\rangle$$

$$=\langle x,\bar{\alpha}T^*(y)\rangle;$$

$$\langle(T_1T_2)(x),\ y\rangle=\langle T_1(T_2(x)),y\rangle$$

$$=\langle T_2(x),\ T^*_1(y)\rangle$$

$$=\langle x,\ T^*_2T^*_1(y)\rangle.$$

以下证明(v). 首先有

$$\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\cdot\|T\|=\|T\|^2.$$

其次，对于任意$x\in H$，得到

$$\|T(x)\|^2=\langle T(x),\ T(x)\rangle=\langle x,\ T^*T(x)\rangle$$

$$\leqslant\|x\|\cdot\|T^*T(x)\|\leqslant\|x\|^2\cdot\|T^*T\|;$$

所以$\|T(x)\|\leqslant\|T^*T\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|$. 因此$\|T\|\leqslant\|T^*T\|^{\frac{1}{2}}$从而$\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$. □

(16.42) **习题** 设H是一个Hilbert空间，M是H的一个闭线性子空间. 试证：存在H的一个闭线性子空间$M^\perp$，它满足：$M\perp M^\perp$及$H=M\oplus M^\perp$，就是说$M+M^\perp=H$，而$M\cap M^\perp=\{0\}$. (提示·考虑M中的一个完全正规正交集；把它开拓成H中的一个完全正规正交集；然后设$M^\perp$是由增加而成的正规正交向量所张成的闭线性子空间.)

(16.43) **习题** 设H是一个内积空间，又设A是H的一个非空子集，并且按照H的范数度量是完备的，此外还具有性质：当x, $y\in A$时，$\frac{1}{2}(x+y)\in A$. 试证下列断言：

(a) A是H中的闭集.

(b) 对于$x_1,\cdots,x_n\in A$及适合$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$的正实数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，元素$\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k$属于$A$. (此即凸性属性.)

(c) H的每个有限维线性子空间按照其范数度量是完备的，这

就是说，，它是Hilbert空间.

(16.44) **习题** H，A如(16.43)所设，又设z是H的任意一个元素. 试证：存在唯一的元素$y_0 \in A$，使得

(i) $\| y_0 - z \| = \inf\{ \| y - z \| : y \in A \}$.

〔(i)式左边就是(6.87)所定义的$\{z\}$到A的距离〕.〔提示. 注意到H是一致凸的，因此可考虑用(15.16.c)；也可以直接应用平行四边形定律. 取A的元素所成的一个序列(y_n)，满足

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - z \| = \inf\{ \| y - z \| : y \in A \}.$$

应用一致凸性于$y_n - z$及$y_m + z$，可推知(y_n)是Cauchy序列，因而在A中有极限y_0. 同样可证唯一性. 〕

(16.45) **习题** 设H是一个内积空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中向量所成的一个集. 又设S_n是由$\{x_1, \cdots, x_n\}$所张成的线性空间. 假定x_n是S_n的最接近于x_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \cdots$)的元素. 〔根据(16.43.c)及(16.44)，这个元素是存在的. 〕集$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$叫做一个广义鞅(martingale in the wide sense)记$y_1 = x_1$，$y_n = x_n - x_{n-1}$ ($n > 1$). 试证：

(a) 诸向量y_n两两正交，并且$x_n = y_1 + \cdots + y_n$.

(b) 成立不等式$\| x_1 \| \leqslant \| x_2 \| \leqslant \cdots \leqslant \| x_n \| \leqslant \cdots$.

(c) 如果$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个正交集，那么$\{z_1 + \cdots + z_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个广义鞅.

(16.46) **习题** 设H是一个Hilbert空间，$T \in \mathfrak{B}(H)$. 试证：

(a) 如果对于任意$x, y \in H$，$\langle T(x), y \rangle = 0$，那么$T = 0$；

(b) 如果对于任意$x \in H$，$\langle T(x), x \rangle = 0$，那么$T = 0$；

(c) $T^*T = TT^*$的充要条件是对于任意$x \in H$，

$$\| T(x) \| = \| T^* x \|.$$

(16.47) **习题** 设H是一个Hilbert空间，M是H的一个闭线性子空间. 正如(16.42)，我们有$H = M \oplus M^{\perp}$. 试证：

(a) 对于每个$x\in H$，存在唯一的$(y, z)\in M\times M^{\perp}$，使$x=y+z$；规定$P(x)=y$；

(b) $P\in\mathfrak{B}(H)$；

(c) $P^2=P$；

(d) $P=P^*$；

(e) $P(H)=M$；

(f) $P^{-1}(0)=M^{\perp}$.

算子P称为**H到M上的射影**.

试证：如果$T\in\mathfrak{B}(H)$满足$T^2=T$及$T=T^*$，那么T就是H到H的某个闭子空间上的射影.

(16.48) 习题 某个特殊射影算子的构造 (a)设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间．$0<\mu(X)<\infty$．把$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu)$记作$\mathfrak{L}_2$．又设$\mathfrak{F}$是$\mathfrak{L}_2$的一个稠密线性子空间，它对于复共轭运算是封闭的，并且仅包括有界函数．再设$\mathfrak{M}$是$\mathfrak{L}_2$的一个闭线性子空间，它具有性质：$f\in\mathfrak{M}$及$g\in\mathfrak{F}$蕴涵$gf\in\mathfrak{M}$（也就是说，**$\mathfrak{M}$对于乘以$\mathfrak{F}$中函数是不变的**）．命P是(16.47)所定义的$\mathfrak{L}_2$到$\mathfrak{M}$上的射影.

试证：

(i) 对于任意$\varphi\in\mathfrak{L}_2$，$P(\varphi)=P(1)\cdot\varphi$；

(ii) 对于某个集$E\in\mathscr{A}$，$P(1)=\xi_E$.

这样，$\mathfrak{M}$正是$\mathfrak{L}_2$在E'上等于零的函数全体所成的集．注意，凡是这样的集显然是$\mathfrak{L}_2$的闭子空间，而且对于乘以$\mathfrak{F}$中函数是不变的．〔提示．考虑任意$h\in\mathfrak{M}^{\perp}$，$f\in\mathfrak{M}$，$g\in\mathfrak{F}$，则有

$$\int_X f\bar{g}\bar{h}d\mu=\int_X (f\bar{g})\bar{h}\,d\mu=0,$$

从而$\mathfrak{M}^{\perp}$对于乘以$\mathfrak{F}$中函数也是不变的．由于$1-P(1)\in\mathfrak{M}^{\perp}$，可见

$$P(g(1-P(1)))=0$$

从而对于任意$g\in\mathfrak{F}$，便有

$$P(g)=P(gP(1))=gP(1).$$

因为$\mathfrak{I}$在$\mathfrak{L}_2$中稠密，所以得出结论：对于任意$\varphi\in\mathfrak{L}_2$，$P(\varphi)=\varphi P(1)$．由于$P(1)=P(1)^2$，便有$P(1)=\xi_E$．〕

(b) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个σ有限测度空间，$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{I}$是正如(a)小题所设的$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$的子空间．试证：$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$到$\mathfrak{M}$上的射影算子$P$，对于某个$E\in\mathscr{A}$，具有形状

$$P(f)=\xi_E f.$$ ①

〔记$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，其中各个$F_n$是$\mathscr{A}$中具有有限测度的两两不相交的集．把(a)应用于每个子空间$\xi_{F_n}\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$，然后加起来．〕

(16.49) **习题** 设H为实Hilbert空间$l_2^r=l_2^r(N)$．规定

$$C=\left\{f\in H:\text{对于任意}n\in N,|f(n)|\leqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

试证C是H的一个紧的、无处稠密子集．度量空间C称为**Hilbert超平行体**.

(16.50) **习题** 设x，y，z都是内积空间H的元素，并且$\|x\|=\|y\|=\|z\|$．试证：

(i) $|\langle x,x\rangle\langle z,y\rangle-\langle x,y\rangle\langle z,x\rangle|^2$
$\leqslant[\langle x,x\rangle^2-|\langle y,x\rangle|^2][\langle x,x\rangle^2-|\langle z,x\rangle|^2]$.

〔提示．显然不妨设$\|x\|=\|y\|=\|z\|=1$．利用Gram-Schmidt方法，这时用K^3代替H，$(1,0,0)$代替x，$(\alpha,\beta,0)$代替y，$(\gamma,\delta,\varepsilon)$代替$z$，其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=|\gamma|^2+|\delta|^2+|\varepsilon|^2=1$．那么(i)式几乎成为平凡的了．

(16.51) **习题** x，y，z及H如(16.50)所设．试证：

(i) $\langle x,x\rangle^2(|\langle y,z\rangle|^2+|\langle y,x\rangle|^2+|\langle z,x\rangle|^2)$
$\leqslant\langle x,x\rangle^4+\langle x,x\rangle\langle z,y\rangle\langle y,x\rangle\langle x,z\rangle+\langle x,x\rangle\langle y,z\rangle\langle x,y\rangle\langle z,x\rangle$

(16.52) **习题** 试证：要使Hilbert空间H是可分的，其充要条件是H的正交维数$\leqslant\text{card}N$〔参看(16.29)〕.

---

①更为一般的结果，请参看(19.76).

(16.53) **习题** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，并且 $0<\mu(X)<\infty$. 又设 $(\mathscr{A},\rho)$ 是 (10.45) 所定义的度量空间. 命 $\mathfrak{m}$ 是 $(\mathscr{A},\rho)$ 的最小的稠密子集基数. 又命 $\mathfrak{d}$ 是Hilbert空间 $\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$ 的正交维数. 试证下列断言：当 $\mathfrak{d}$ 有限时，$\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{d}}$. 当 $\mathfrak{d}$ 无限时，$\mathfrak{m}=\mathfrak{d}$.〔提示. 首先考虑$\mu$仅取有限多个值的情况，利用(10.56.a)及(12.60)证明$\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{d}}$. 如果$\mu$取无限多个值，(10.56.c)就表明 $\mathfrak{d}$ 是无限的. 这时，通过简单论证可知，不等式$\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{d}$ 和 $\mathfrak{d}\leqslant\mathfrak{m}$ 同时成立.〕

(16.54) **习题** 设H为实Hilbert空间$l_2^r(R)$. 对于每个 $t\in R$，设u_t是R上由$u_t(s)=\delta_{t,s}$(Kronecker δ)定义的H的元素. 规定

$$X=\{f\in H: 对于某个\ t\in R,\ f=\alpha u_t,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}.$$

那么按照H的度量，X就成为一个度量空间. 试证：存在一个把X映满法国铁路空间(D,ρ)〔见(6.13.e)〕的1－1映射φ，使得φ和φ^{-1}都是一致连续的.

(16.55) **习题** 设H是一个Hilbert空间，$T\in\mathfrak{B}(H)$. 记

$$\alpha(T)=\sup\{|\langle Tx,x\rangle|:x\in H,\ \|x\|=1\}.$$

(a) 试证：当$T=T^*$时，$\alpha(T)=\|T\|$.〔利用恒等式
$4\|Tx\|^2=\langle T(\|Tx\|x+Tx),\ \|Tx\|x+Tx\rangle-\langle T(\|Tx\|x-Tx),\ \|Tx\|x-Tx\rangle$以及平行四边形定律.〕

(b) 试求出一个T，使$\alpha(T)\neq\|T\|$.

(16.56) **习题** 试利用(16.42)给出(16.31)的证明，而不引用§15的结果.〔对于$f\in H^*$，命$M=f^{-1}(\{0\})$. 当$M=H$时，命$y=0$. 当$M\neq H$时，设z是$M^\perp$的一个非零元素，命$y=\overline{f(z)}\cdot\|z\|^{-2}z$. 注意，对于任意$x\in H$，$\left(x-\frac{f(x)}{f(z)}z\right)\in M$.〕

(16.57) **习题** 设H是一个Hilbert空间，$T\in\mathfrak{B}(H)$.

试证：

(a) $[T^{-1}(\{0\})]\perp[\overline{T^*(H)}]$，

(b) $H=[T^{-1}(\{0\})]+[\overline{T^*(H)}]$.

〔参见(16.42). 证明$\overline{T^*(H)}^{\perp}=T^{-1}(\{0\})$. 〕

(16.58) **习题** 设H是一个Hilbert空间，并设$T\in\mathfrak{B}(H)$满足$T=T^*$. 假定存在正常数c，使对于任意$x\in H$，都有

$$\|T(x)\|\geqslant c\|x\|.$$

试证：

(a) T是1-1的，

(b) $T(H)=H$，

(c) $T^{-1}\in\mathfrak{B}(H)$.

〔利用(16.57)及(14.17). 〕

第五章　微　分

本章首先论述定义在直线区间上的复值函数的微分理论，这一论述虽然很简短，但还是相当完整的．§17收入了有关有限变差函数微分的一些实例，以及Lebesgue的著名定理，因而这一节内容是非常经典的．§18中我们探讨了经典公式

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$$

成立的条件．这种探讨导致一些饶有兴味、或许是出人意表的测度论概念——它们与微分没有多大关系，而在截然不同的领域内获得了应用．这方面的主要结果是Lebesgue-Radon-Nikodým定理，§19详细研究这一定理，并应用于R上测度的分解．§20介绍了Lebesgue-Radon-Nikodým定理对于抽象分析问题的若干其他应用．

第17，18两节很重要，读者都要学习这两节．§19直到(19.24)〔包括(19.24)〕①同样应加以研究，时间紧的读者可以略去§19其余部分．至于§20②，(20.1)—(20.5)及(20.41)—(20.52)对于每个学生来说都是重要课题．§20的其余部分，照我们的看法尽管很有意思，但并非必不可少的，因之时间紧的读者也可以略去．

§17　可微函数与不可微函数

本节限于讨论定义在R的区间上的函数．尽管内容是很初等的，但就§§18，19所论述的更高深的内容而言，本节却是必不可少的引论．整个这一节，“几乎处处”指的是“λ几乎处处”，而

①②参考初版序言中的建议．——译者注

"可测的"则指"$\mathscr{M}_\lambda$可测的". 照例，先引进一些定义.

(17.1) **定义** 设$a\in R$，$\delta>0$. 如果φ是定义在$]a, a+\delta[$上的一个实值函数，则规定

$$\varliminf_{h\downarrow a}\varphi(h)=\sup\{\inf\{\varphi(h):a<h<t\}:a<t\leqslant a+\delta\},$$

$$\varlimsup_{h\downarrow a}\varphi(h)=\inf\{\sup\{\varphi(h):a<h<t\}:a<t\leqslant a+\delta\}.$$

这两个广义实数分别叫做φ **在** a **的下右极限**和**上右极限**. 如果φ是定义在$]a-\delta, a[$上的一个实值函数，φ **在** a **的下左极限**和**上左极限**则分别规定为以下两个广义实数

$$\varliminf_{h\uparrow a}\varphi(h)=\sup\{\inf\{\varphi(h):t<h<a\}:a-\delta\leqslant t<a\},$$

$$\varlimsup_{h\uparrow a}\varphi(h)=\inf\{\sup\{\varphi(h):t<h<a\}:a-\delta\leqslant t<a\}.$$

(17.2) **定义** 设$a\in R$，$\delta>0$. 如果f是定义在$[a, a+\delta[$上的一个实值函数，则规定

$$D_+f(a)=\varliminf_{h\downarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

$$D^+f(a)=\varlimsup_{h\downarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

如果f是定义在$]a-\delta, a]$上的一个实值函数，则规定

$$D_-f(a)=\varliminf_{h\uparrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

$$D^-f(a)=\varlimsup_{h\uparrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

这四个广义实数称为f **在** a **的Dini导数**；$D_+f(a)$是**下右导数**，$D^+f(a)$是**上右导数**，$D_-f(a)$是**下左导数**；$D^-f(a)$是**上左导数**.

(17.3) **评注** 自然成立不等式

$$(D_+f)(a)\leqslant(D^+f)(a),$$
$$(D_-f)(a)\leqslant(D^-f)(a).$$
同时不难明白，$(D^+f)(a)[(D_+f)(a)]$乃是序列

$$\left(\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}\right)$$

的最大[最小]极限，其中 $h_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$．关于$(D^-f)(a)$和$(D_-f)(a)$成立类似断言.

(17.4) **定义** 当$(D^+f)(a)=(D_+f)(a)$时，就称 f **在** a **具有右导数**，把公共值$(D^+f)(a)=(D_+f)(a)$记作$f'_+(a)$. 数$f'_+(a)$叫做f**在**a**的右导数**①. 可完全类似地定义f**在** a **的左导数**，记作$f'_-(a)$. 当$f'_+(a)$，$f'_-(a)$都存在并且相等时，就称 f **在** a **可微**，或称 f**在** a **具有导数**，把公共值$f'_+(a)=f'_-(a)$记作$f'(a)$. 数$f'(a)$叫做f**在**a**的导数**. 必须指出，我们的定义并不排除$f'(a)$的值为∞或$-\infty$. 例如，设$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x\in R)$，那么$f'(0)$存在，并且$f'(0)=\infty$.

(17.5) **定义** 设 f 是定义在$[a,\ a+\delta[$上的一个复值函数，当

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

存在，并且为复数时，就称 f **在** a **右可微**，或称 f **在** a **具有右导数**. 可完全类似地定义左导数及双侧导数(双侧导数简称为**导数**). 显而易见，f 在 a 具有导数的充要条件是 $\mathrm{Re}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 在 a 都具有有限导数. 这时

$$f'(a)=(\mathrm{Re}f)'(a)+i(\mathrm{Im}f)'(a).$$

(17.6) **评注** (a) 定义(17.4)和(17.5)中有点欠妥之处. 这是因为实值函数当然也是复值函数，但当 f 是实值函数时，f' 的值就可以是∞或$-\infty$了. 不过，这一谬误并不会招来麻烦，我们不必为需要消除异议的这一专门术语用法伤脑筋.

①最后一句话是译者加的. ——译者注

(b) 如果$f'_+(a)$存在且有限，那么$\lim_{h\downarrow 0}f(a+h)=f(a)$. 同样，如果$f'_-(a)$存在且有限，那么$\lim_{h\uparrow 0}f(a+h)=f(a)$. 所以当 f 在a具有有限导数时，f 必在 a 连续.〔试问：当$f'(a)=\infty$或$-\infty$时，这一结论是否成立呢？〕下面两个定理则表明，这一断言的逆命题不成立——这实在是引人注目的一项结果.

(17.7) **定理** 设a是一正奇数，b是一个实数，并且$0<b<1$. 还假设$ab>1+\frac{3\pi}{2}$. 设f是R上由

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b^k\cos(a^k\pi x)$$

定义的函数. 则f在R上连续并且有界，而f处处没有有限导数①.

证 对于每个k以及任意$x\in R$，成立$|b^k\cos(a^k\pi x)|\leqslant b^k$. 于是定义函数$f$所用的级数是绝对收敛的，并且对于任意$x\in R$，都有$|f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}b^k=\frac{1}{1-b}$. 同时，如果$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b^k\cos(a^k\pi x)$，那么当$n\to\infty$，就有

①关于连续性与可微性之间的关系，其研究源远流长. 这里所定义的函数f是由Weierstrass（约于1875年）所构造的（1872年他构造出了这一连续但在任意一点都不可微的函数，1874年他把这一经典例子告诉了Du Bois-Reymond，后者于1875年发表了此例. ——译者注）. 1916年经Hardy细致入微地检查了这个函数〔Trans. Amer. Math. Soc. 17, 301—325 (1916)〕. 除了别的结论以外，Hardy还能证明：当$ab\geqslant 1$时，f便具有所说的性质. 在同一篇文章里，他证明了连续函数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2\pi x)}{n^2}$$

也是处处不可微的；证明这一结论要比证明关于f的相应结论难得多了. Riemann多年前就猜想过g是处处不可微的.

$$\|f-f_n\|_\infty\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}b^k=\frac{b^n}{1-b}\to 0.$$

正如(7.9)那样，由此推知 f 在 R 上连续.

我们要证明 f 在 R 上是处处不可微的.设取定 $x\in R$,对于 $n\in N$, $h>0$，记

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}b^k\frac{\cos(a^k\pi(x+h))-\cos(a^k\pi x)}{h}$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}b^k\frac{\cos(a^k\pi(x+h))-\cos(a^k\pi x)}{h}$$

$$=S_n+R_n.$$

利用中值定理，写成

$$\frac{\cos(a^k\pi(x+h))-\cos(a^k\pi x)}{h}=-a^k\pi\sin(a^k\pi(x+h')),\tag{1}$$

其中 $0<h'<h$. (1)式右边的绝对值小于或等于 $a^k\pi$，从而

$$|S_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^k\pi=\pi\frac{a^nb^n-1}{ab-1}<\frac{\pi a^nb^n}{ab-1}.\tag{2}$$

现记

$$a^nx=\alpha_n+\beta_n,$$

其中 α_n 是整数，$-\frac{1}{2}\leqslant\beta_n<\frac{1}{2}$. 命

$$h_n=\frac{1-\beta_n}{a^n}.$$

由于$\frac{3}{2}\geqslant 1-\beta_n>\frac{1}{2}$，便有$\frac{3}{2a^n}\geqslant\frac{1-\beta_n}{a^n}>\frac{1}{2a^n}$，从而

$$\frac{2a^n}{3}\leqslant\frac{1}{h_n}<2a^n.$$

现在估计$|R_n|$的大小．对于$k\geqslant n$，考虑

$$a^k\pi(x+h_n)=a^{k-n}a^n\pi(x+h_n)=a^{k-n}\pi(a^nx+1-\beta_n)=a^{k-n}\pi(1+\alpha_n).$$

既然a是奇数，便成立等式

$$\cos[a^k\pi(x+h_n)]=\cos[a^{k-n}\pi(1+\alpha_n)]=(-1)^{1+\alpha_n}.$$

同时又有

$$\begin{aligned}-\cos[\pi a^kx]&=-\cos[\pi a^{k-n}a^nx]=-\cos[\pi a^{k-n}(\alpha_n+\beta_n)]\\&=-\cos[\pi a^{k-n}\alpha_n]\cos[\pi a^{k-n}\beta_n]\\&=(-1)^{1+\alpha_n}\cos[\pi a^{k-n}\beta_n].\end{aligned}$$

如果命$h=h_n$，我们看出$|R_n|$便适合

$$\begin{aligned}|R_n|&=\left|\sum_{k=n}^{\infty}b^k\frac{(-1)^{1+\alpha_n}+(-1)^{1+\alpha_n}\cos[\pi a^{k-n}\beta_n]}{h_n}\right|\\&=\left|\frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n}\right|\cdot\sum_{k=n}^{\infty}b^k(1+\cos[\pi a^{k-n}\beta_n])\\&\geqslant\frac{b^n}{h_n}\geqslant\frac{2a^nb^n}{3},\end{aligned}$$

原因在于$\cos\pi\beta_n\geqslant 0$．把$|R_n|$的这个估计式与(2)式结合起来，便得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|&\geqslant|R_n|-|S_n|>\frac{2a^nb^n}{3}-\frac{\pi a^nb^n}{ab-1}\\&=(ab)^n\left[\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right].\end{aligned}$$

既然$ab>1+\frac{3}{2}\pi$，$\left[\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right]$便是一个正常数，由此可见

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|=\infty.$$

由于$\lim_{n\to\infty}h_n=0$，很清楚，至少f在x的一个右导数是等于无穷大的. □

以下定理间接证实了连续而处处不可微的函数是存在的. 它其实表明了，从某种意义上来说，大多数连续函数乃是处处不可微的.

(17.8) 定理 考虑实Banach空间$\mathfrak{C}^r=\mathfrak{C}^r([0,1])$. 命

$$\mathfrak{D}=\{f\in\mathfrak{C}^r\text{：对于某个}x\in[0,1[,\ D^+f(x)\text{和}D_+f(x)\text{都是有限的}\}.$$

则$\mathfrak{D}$是完备度量空间$\mathfrak{C}^r$中的第一范畴集. 于是在$[0,1[$的任意点都至少有一个无穷右导数的$[0,1]$上连续函数全体所成的集在$\mathfrak{C}^r([0,1])$中稠密.

证 对于每个整数$n>1$，命

$$\mathfrak{E}_n=\left\{f\in\mathfrak{C}^r\text{:存在}x\in\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]\text{, 使对于一切}h\in\left]0,\frac{1}{n}\right],\right.$$
$$\left.\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant n\right\}.$$

先证明$\mathfrak{D}=\bigcup_{n=2}^{\infty}\mathfrak{E}_n$.显然$\bigcup_{n=2}^{\infty}\mathfrak{E}_n\subset\mathfrak{D}$. 设$f\in\mathfrak{D}$. 那么必存在$x\in[0,1[$及常数$\alpha>0$，使对于某个$\delta$，$0<\delta<1-x$，只要$h\in]0,\delta[$，就成立不等式

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\alpha.$$

取整数n，使$n>\max\left\{\frac{1}{\delta},\ \right\}$显而易见$f\in\mathfrak{E}_n$，所以$\mathfrak{D}\subset\bigcup_{n=2}^{\infty}\mathfrak{E}_n$.

其次证明各个$\mathfrak{E}_n$都是$\mathfrak{C}^r$中的闭集．为此，固定n并设$f\in\overline{\mathfrak{E}_n}$，然后在$\mathfrak{E}_n$中取一函数序列$(f_k)_{k=1}^{\infty}$，满足

$$\|f-f_k\|_n\to 0$$

对于每个k，象$\mathfrak{E}_n$的定义中那样，相应于f_k取$x_k\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$．因为$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$是紧集，所以序列$(x_k)$必有一个收敛子序列，其相应的$(f_k)$的子序列按照范数收敛于$f$；这两个子序列仍分别记作$(x_k)$和$(f_k)$．命$x=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$；自然$x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$．现在固定$h\in\left]0,\frac{1}{n}\right]$，并任给$\varepsilon>0$．可选取充分大的$k$，使得

$$\|f-f_k\|_n<\frac{h\varepsilon}{4},\qquad |f(x_k)-f(x)|<\frac{h\varepsilon}{4},$$

$$|f(x_k+h)-f(x+h)|<\frac{h\varepsilon}{4}.$$

那么

$$\begin{aligned}&|f(x+h)-f(x)|\\&\quad\leqslant|f(x+h)-f(x_k+h)|+|f(x_k+h)-f_k(x_k+h)|\\&\qquad+|f_k(x_k+h)-f_k(x_k)|+|f_k(x_k)-f(x_k)|\\&\qquad+|f(x_k)-f(x)|\\&\quad<\frac{h\varepsilon}{4}+\frac{h\varepsilon}{4}+nh+\frac{h\varepsilon}{4}+\frac{h\varepsilon}{4}=h(n+\varepsilon).\end{aligned}$$

ε既然是任意的，可见对于一切$h\in\left]0,\frac{1}{n}\right]$，

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant n;$$

所以$f\in\mathfrak{E}_n$．由此推知$\mathfrak{E}_n$是闭集．

接下去证明每个$\mathfrak{E}_n$都有空内部．如果不然，就是说如果存在n，$f\in\mathfrak{E}_n$及$\varepsilon>0$，使

$$\mathfrak{B}_\varepsilon(f)=\{\varphi\in\mathfrak{C}^r:\|f-\varphi\|_n<\varepsilon\}\subset\mathfrak{E}_n,$$

那么根据Weierstrass逼近定理(7.31)，必存在一个多项式p，使$\| p-f\|_u<\varepsilon$. 命$\delta=\varepsilon-\| p-f\|_u$. 则有

$$\mathfrak{B}_\delta(p)\subset\mathfrak{B}_\varepsilon(f)\subset\mathfrak{E}_n.$$

然后可以构造一个函数$g\in\mathfrak{C}^r$,满足：$\|g\|_u<\delta$,$g'_+(x)$存在，而对于一切$x\in[0,1[$，都有$|g'_+(x)|>n+\|p'\|_u$.〔这样的g无疑是存在的；例如，可以设g是$[0,1]$上一个非负的"锯齿形"函数，其极大值为$\frac{\delta}{2}$，斜率的绝对值大于常数$n+\|p'\|_u$.〕那么

$$g+p\in\mathfrak{B}_\delta(p),$$

而在$[0,1[$的一切点，又有

$$|(g+p)'_+|=|g'_++p'|\geqslant|g'_+|-|p'|\geqslant|g'_+|-\|p'\|_u>n.$$

于是$g+p\notin\mathfrak{E}_n$. 这个矛盾证明了：对于任意n，$\mathfrak{E}_n^0=\varnothing$.

我们得出结论：每个集$\mathfrak{E}_n$在$\mathfrak{C}^r$中无处稠密.因而$\mathfrak{D}=\bigcup_{n=2}^{\infty}\mathfrak{E}_n$便是$\mathfrak{C}^r$中的第一范畴集. 由于$\mathfrak{C}^r$是完备度量空间，从Baire范畴定理(6.54)知道，$\mathfrak{C}^r\cap\mathfrak{D}'$在$\mathfrak{C}^r$中稠密.① □

(17.8)证明中所用到的方法很重要. 整个分析学和集论拓扑学中许多存在性问题，正是按照这种方法来进行证明的.

下面仔细考察一下，一个函数能在什么范围内具有不同的左、右导数.

(17.9) **定理** 设$]a,b[$是R的任何一个开区间，f是定义在$]a,b[$内的一个任意的实值函数. 则仅存在可数多个点$x\in]a,b[$，使$f'_-(x)$与$f'_+(x)$都存在（可以是无穷大），但不相等.

证 命

$A=\{x\in]a,b[:f'_-(x)$存在,$f'_+(x)$存在,$f'_+(x)<f'_-(x)\}$,

$B=\{x\in]a,b[:f'_-(x)$存在，$f'_+(x)$存在,$f'_+(x)>f'_-(x)\}$.

---

①不少作者建立过此类构造. 这里的构造取自S.Banach, Studia Math.3, 174—179(1931). 还可参见K.Kuratowski,《Topologie I》,第二版,Monografie Matematyczne, 第20卷，Warszawa-Wroclaw, 1948, pp.326—328

对于每个$x\in A$，取一个有理数r_x，使

$$f_+'(x)<r_x<f'_-(x).$$

再取两个有理数s_x及t_x，使

$$a<s_x<x<t_x<b,$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>r_x \qquad (s_x<y<x), \tag{1}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_x \qquad (x<y<t_x), \tag{2}$$

结合(1)和(2)，那么只要$y\neq x$，$s_x<y<t_x$，就有

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x). \tag{3}$$

这样便得到了一个函数φ，它定义为$\varphi(x)=(r_x, s_x, t_x)$，并把$A$映入可数集$Q^3$.

下面我们通过证明φ是1-1的来证实A是可数的. 倘若A有不同的x，y使得$\varphi(x)=\varphi(y)$，那么$]s_y, t_y[=]s_x, t_x[$，而x，y都属于这一区间. 由(3)式可知

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x),$$

同时

$$f(x)-f(y)<r_y(x-y).$$

由于$r_x=r_y$，这两个不等式相加便得出$0<0$. 此为矛盾，由此φ是1-1的，从而A可数. 同理可证B也可数. □

我们下一个目标，是证明H.Lebesgue的著名定理，即单调函数几乎处处具有有限导数. 证明中所采用的主要工具是Vitali的一个很出色的定理——我们接下去就要介绍. Vitali定理在经典分析，尤其在微分理论中有着众多的应用.

(17.10) **定义** 设$E\subset R$，$\mathscr{V}$是R的具有正长度的闭区间所成的一个区间族. 如果对于每个$x\in E$及每个$\varepsilon>0$，必存在一个区间$I\in\mathscr{V}$，使

$$x\in I, \quad \lambda(I)<\varepsilon,$$

则称$\mathscr{V}$是E的**Vitali覆盖**. 这就是说，如果E的每个点都属于$\mathscr{V}$的

任意短的一些区间，则$\mathscr{V}$便是E的一个Vitali覆盖.

(17.11) **Vitali覆盖定理** 设E是R的一个任意子集，$\mathscr{V}$是E的任何一个（非空）Vitali覆盖. 则存在一个两两不相交的可数族$\{I_n\}\subset\mathscr{V}$，使

$$\lambda\left(E\cap\left(\bigcup_n I_n\right)'\right)=0.$$

此外，如果$\lambda(E)<\infty$，则对于每个$\varepsilon>0$，存在一个两两不相交的有限族$\{I_1, \cdots, I_p\}\subset\mathscr{V}$，使

$$\lambda\left(E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{p} I_n\right)'\right)<\varepsilon.$$

证① 第一种情况：$\lambda(E)<\infty$. 取一个开集V，使$E\subset V$，$\lambda(V)<\infty$. 命

$$\mathscr{V}_0=\{I\in\mathscr{V}: I\subset V\}.$$

很明显，$\mathscr{V}_0$也是E的一个Vitali覆盖. 设$I_1\in\mathscr{V}_0$. 如果$E\subset I_1$，构造便完成了. 设若不然，我们就用归纳法继续构造如下. 假设$I_1, I_2, \cdots, I_n$已经选好了，并且是两两不相交的. 如果$E\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$，构造便完成了. 设若不然，则记

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\quad U_n=V\cap A_n'.$$

显然A_n是闭集，U_n是开集，$U_n\cap E\neq\varnothing$. 命

$$\delta_n=\sup\{\lambda(I): I\in\mathscr{V}_0, I\subset U_n\}. \tag{1}$$

取$I_{n+1}\in\mathscr{V}_0$，满足：$I_{n+1}\subset U_n$，$\lambda(I_{n+1})>\frac{1}{2}\delta_n$. 如果这一过程不在有限步后终止（当有限个$I_n$满足定理要求时，就无须证明了），那么便得到$\mathscr{V}_0$的两两不相交的元所成的一个无限序列$(I_n)_{n=1}^{\infty}$. 命

①我们所提供的本定理这一富有创造才智的证明，是由S.Banach作出的〔Fund.Math.6, 170—188（1924）〕.

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 须证$\lambda(E\cap A')=0$. 对于每个$n$，设$J_n$是和$I_n$有相同中点的闭区间，并适合

$$\lambda(J_n)=5\lambda(I_n).$$

则有

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(J_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(I_n)$$
$$=5\lambda(A)\leqslant 5\lambda(V)<\infty. \qquad (2)$$

定理(10.15)表明

$$\lim_{p\to\infty}\lambda\left(\bigcup_{n=p}^{\infty} J_n\right)=0.$$

这样一来，为了证明$\lambda(E\cap A')=0$，只要证明$E\cap A'\subset\bigcup_{n=p}^{\infty} J_n$对于任意$p\in N$都成立就行了. 固定$p\in N$，并设$x\in E\cap A'$. 则有$x\in E\cap A'_p\subset U_p$，从而存在一个$I\in\mathscr{V}_0$，使$x\in I\subset U_p$. 容易明白，$\delta_n<2\lambda(I_{n+1})$，而(2)式表明$\lambda(I_n)\to 0$ ($n\to\infty$). 所以有一个整数n，使$\delta_n<\lambda(I)$. 于是根据(1)式，存在一个整数n，使$I\not\subset U_n$；设q是这种整数中最小者. 显而易见，$p<q$. 由此推知

$$I\cap A_q\neq\varnothing,\qquad I\cap A_{q-1}=\varnothing.$$

可见

$$I\cap A_q\neq\varnothing, \qquad (3)$$

由于$I\subset U_{q-1}$，便得到

$$\lambda(I)\leqslant\delta_{q-1}<2\lambda(I_q). \qquad (4)$$

既然$\lambda(J_q)=5\lambda(I_q)$，(3)和(4)就表明

$$I\subset J_q\subset\bigcup_{n=p}^{\infty} J_n,$$

因此$x\in\bigcup_{n=p}^{\infty} J_n$. 所以有$E\cap A'\subset\bigcup_{n=p}^{\infty} J_n$，由此推出$\lambda(E\cap A')=0$.

现给定$\varepsilon>0$，取充分大的整数p，使成立

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\lambda(I_n)<\varepsilon.$$

那么

$$E\cap A_p'\subset(E\cap A')\cup\left(\bigcup_{n=p+1}^{\infty}I_n\right),$$

从而

$$\lambda(E\cap A_p')\leqslant 0+\lambda\left(\bigcup_{n=p+1}^{\infty}I_n\right)<\varepsilon.$$

这样，$\lambda(E)<\infty$时定理证毕.

第二种情况：$\lambda(E)=\infty$. 对于每个$n\in Z$，命

$$E_n=E\cap\,]n,n+1[,$$

$$\mathscr{V}_n=\{I\in\mathscr{V}:I\subset\,]n,n+1[\}.$$

很清楚，$\mathscr{V}_n$乃是E_n的一个Vitali覆盖. 应用第一种情况，可以求出一个两两不相交的可数族$\mathscr{I}_n\subset\mathscr{V}_n$，使对于每个$n\in Z$，

$$\lambda(E_n\cap(\cup\mathscr{I}_n)')=0.$$

命$\mathscr{I}=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathscr{I}_n$. 那么$\mathscr{I}$是$\mathscr{V}$的两两不相交的可数子族，而且

$$E\cap(\cup\mathscr{I})'\subset Z\cup\left[\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(E_n\cap(\cup\mathscr{I}_n)')\right].$$

我们看出

$$\lambda(E\cap(\cup\mathscr{I})')\leqslant\lambda(Z)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}0=0.\ \square$$

(17.12) 定理（Lebesgue） 设$[a,b]$是R中一个闭区间，f是$[a,b]$上一个实值单调函数. 则f在$[a,b]$上几乎处处具有有限导数.

证 假定f非减（f非增时考虑$-f$就行了）. 命

$$E=\{x: a\leqslant x<b, D_+f(x)<D^+f(x)\}.$$

我们先来证明$\lambda(E)=0$．对于适合$u<v$的任意一对正有理数u，v，命

$$E_{u,v}=\{x\in E: D_+f(x)<u<v<D^+f(x)\}.$$

显然

$$E=\bigcup\{E_{u,v}: u,v\in Q, 0<u<v\}.$$

因为这是一个可数并，所以只要证明对于Q中一切u，v，$0<u<v$，都有$\lambda(E_{u,v})=0$就可以了．设若不然，就是说假设存在两个正有理数u和v，$u<v$，而$\lambda(E_{u,v})=\alpha>0$．设$\varepsilon$满足

$$0<\varepsilon<\frac{\alpha(v-u)}{u+2v}.$$

取一个开集$U\supset E_{u,v}$，使$\lambda(U)<\alpha+\varepsilon$．对于每个$x\in E_{u,v}$，必存在充分①小的诸正数$h$，使$[x, x+h]\subset U\cap[a, b]$，而且

$$f(x+h)-f(x)<uh. \qquad (1)$$

这种闭区间全体所成的区间族$\mathscr{V}$是$E_{u,v}$的一个Vitali覆盖，从而根据(17.11)，便存在$\mathscr{V}$的一个有限的、两两不相交的子族$\{[x_i, x_i+h_i]\}_{i=1}^m$，它具有性质：

$$\lambda\left(E_{u,v}\cap\left(\bigcup_{i=1}^m[x_i, x_i+h_i]\right)'\right)<\varepsilon.$$

命$V=\bigcup\limits_{i=1}^m\,]x_i, x_i+h_i[$．便有

$$\lambda(E_{u,v}\cap V')<\varepsilon. \qquad (2)$$

由包含关系$V\subset U$推知

$$\sum_{i=1}^m h_i=\lambda(V)\leqslant\lambda(U)<\alpha+\varepsilon,$$

①原文为"*arbitrarily*（任意）"译文改为"充分"．参见(6.84)译注①．——译者注

从而根据(1)式便得出不等式

$$\sum_{i=1}^{m}(f(x_i+h_i)-f(x_i))<u\sum_{i=1}^{m}h_i<u(\alpha+\varepsilon). \qquad (3)$$

另一方面，对于任意$y\in E_{u,v}\cap V$，必存在充分①小的诸正数k，使$[y, y+k]\subset V$，而且

$$f(y+k)-f(y)>vk. \qquad (4)$$

这种闭区间全体所成的族是$E_{u,v}\cap V$的一个Vitali覆盖，从而就有这种区间所成的一个有限的、两两不相交的族$\{[y_j, y_j+k_j]\}_{j=1}^{n}$，它具有性质：

$$\lambda\left(E_{u,v}\cap V\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}[y_j,y_j+k_j]\right)'\right)<\varepsilon.$$

由这一不等式以及(2)式推知

$$\alpha=\lambda(E_{u,v})\leqslant\lambda(E_{u,v}\cap V')+\lambda(E_{u,v}\cap V)$$
$$<\varepsilon+\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}k_j\right). \qquad (5)$$

然后利用(4)，(5)式，便得出

$$v(\alpha-2\varepsilon)<v\sum_{j=1}^{n}k_j<\sum_{j=1}^{n}(f(y_j+k_j)-f(y_j)). \qquad (6)$$

由于$\bigcup_{j=1}^{n}[y_j,y_j+k_j]\subset\bigcup_{i=1}^{m}[x_i, x_i+h_i]$，而$f$是非减的，所以又得出

$$\sum_{j=1}^{n}(f(y_j+k_j)-f(y_j))\leqslant\sum_{i=1}^{m}(f(x_i+h_i)-f(x_i)). \qquad (7)$$

结合(6)，(7)及(3)，就推出不等式

①同上页脚注①.——译者注

$$v(\alpha-2\varepsilon)<u(\alpha+\varepsilon).$$

这与假设 ε 所满足的条件相矛盾. 于是$\lambda(E)=0$，从而在$[a,b]$上a.e.存在$f'_+(x)$. 同理可证在$[a,b]$上a.e.存在$f'_-(x)$. 应用(17.9)就知道在$[a,b]$上a.e.存在$f'(x)$.

剩下的问题只要证明$]a,b[$中使$f'(x)=\infty$的点所成的集F具有零测度. 设β是一个任意的正数. 对于每个$x\in F$，必存在充分小的诸正数h，使$[x, x+h]\subset]a,b[$，而且

$$f(x+h)-f(x)>\beta h. \tag{8}$$

根据Vitali覆盖定理(17.11)，便存在这些区间所成的一个两两不相交的可数族$\{[x_n,x_n+h_n]\}$，使

$$\lambda\left(F\cap\left(\bigcup_n [x_n,x_n+h_n]\right)'\right)=0.$$

根据这一事实以及(8)式，便得到

$$\begin{aligned}\beta\lambda(F)&\leqslant\beta\sum_n h_n\\&<\sum_n(f(x_n+h_n)-f(x_n))\leqslant f(b)-f(a).\end{aligned}$$

于是，对于一切$\beta\in R$，就都成立

$$\beta\lambda(F)<f(b)-f(a),$$

由此推知$\lambda(F)=0$. □

(17.13) 问题 假设$\lambda(A)=0$，$A\subset[a,b]$. 在$[a,b]$上能否求出一个单调函数f，使得在$A'\cap]a,b[$上f'确实存在？这一问题看来尚未得到圆满解决.

(17.14) 定义 设f是定义在$[a,b]\subset R$上的复值函数. 规定

$$V_a^b f=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\right\}.$$

广义实数$V_a^b f$叫做f**在**$[a,b]$**上的全变差**. 当

$$V_a^b f<\infty$$

时，就称 f 在 $[a,b]$ **上是有限变差的（或有界变差的）**，或称 f 在 $[a,b]$ **上具有有限变差（有界变差）**.①

(17.15) **评注** (a) 函数 f 具有有限变差的充要条件是函数 $\mathrm{Re} f$ 和 $\mathrm{Im} f$ 都具有有限变差.

(b) 设 $a<b<c$，则成立等式 $V_a^b f+V_b^c f=V_a^c f$.

(c) 函数 $x\to V_a^x f$ 是非减的.

(17.16) **定理**（Jordan分解定理） 凡实值有限变差函数都可以表示为两个非减函数之差.

证 记

$$f(x)=V_a^x f-(V_a^x-f(x)),$$

其中规定 $V_a^a f=0$. 显然，函数 $x\to V_a^x f$ 是非减的. 函数

$$x\to V_a^x f-f(x)$$

也是非减的. 这是因为，如果 $x'>x$，那么

$$V_a^{x'} f-f(x')-(V_a^x f-f(x))=V_x^{x'} f-(f(x')-f(x))\geqslant 0. \ \square$$

(17.17) **定理**（Lebesgue） 任意复值有限变差函数几乎处处具有有限导数.

证 这是(17.16)，(17.15.a)，(17.12)，以及(17.5)的直接推论. □

(17.18) **定理**（Fubini）② 设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[a,b]$ 上一个非减（或非增）实值函数序列，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=s(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且为有限. 则在 $]a,b[$ 内a.e.成立

(i) $$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

证 不妨假定所有的 f_n 都是非减的. 此外，还不妨假定 $f_n\geqslant 0$，

---

①最后一句话是译者加的. ——译者注

②本定理并非通常所说的“Fubini定理”，后者论述乘积测度与积分，第六章要提出来讨论.

因为倘非如此，则可考虑$f_n - f_n(a)$. 这样，$s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$既非负又非减，如(17.12)所说，导数$s'(x)$对于几乎所有$x \in]a,b[$存在且为有限.

然后考虑部分和$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$及余项$r_n = s - s_n$. 各个$f_j$几乎处处具有有限导数：所以有一个集$A \subset]a, b[$，它满足以下三个条件：

(i) $\lambda(A' \cap]a, b[) = 0$，

(ii) 当$x \in A$时，对于任意n都成立

$$s'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots + f'_n(x) < \infty,$$

(iii) 当$x \in A$时，$s'(x)$存在且为有限.

对于一切$x \in]a, b[$以及适合$x + h \in]a, b[$的任意$h > 0$，根据等式

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} + \frac{r_n(x+h) - r_n(x)}{h}$$

得出

$$\frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} \leqslant \frac{s(x+h) - s(x)}{h};$$

进而由这一不等式推知，对于一切$x \in A$，$s'_n(x) \leqslant s'(x)$. 不等式$s'_n(x) \leqslant s'_{n+1}(x)$则是显然的，所以得到

$$s'_n(x) \leqslant s'_{n+1}(x) \leqslant s'(x) \quad (x \in A, n = 1, 2, \cdots).$$

因此a.e.存在

$$\lim_{n \to \infty} s'_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x),$$

这样剩下的问题是要证实：a.e.成立

$$\lim_{n \to \infty} s'_n(x) = s'(x).$$

因为对于每个$x \in A$，$(s'_n(x))_{n=1}^{\infty}$是非减序列，所以只要证实(s'_n)含有a.e.收敛于s'的一个子序列就可以了. 为此，设n_1，n_2，$\cdots$，n_k，$\cdots$是一个递增整数列，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}[s(b)-s_{n_k}(b)]<\infty.$$

对于每个n_k以及对于任意$x\in]a,b[$，都有

$$0\leqslant s(x)-s_{n_k}(x)\leqslant s(b)-s_{n_k}(b).$$

末尾不等式左边各项由非负项收敛级数的各项所控制，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}[s(x)-s_{n_k}(x)]$$

收敛. 因为这个级数的各项同样是几乎处处具有有限导数的单调函数，所以根据上述证明 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$ a.e. 收敛所用到的方法，还可证明 $\sum_{k=1}^{\infty}[s'(x)-s'_{n_k}(x)]$ a.e. 收敛. 由此自然就推出：a.e. 成立

$$\lim_{k\to\infty} s'_{n_k}(x)=s'(x).\ \square$$

本节最后，我们布置一大批习题. 其中若干题目无非是例证. 有几个习题是一些次要定理，皆附以简要证明[(17.24)，(17.25)，(17.26)，(17.27)，(17.31)，(17.36)，17.37)]；后面一些重要定理要用到(17.33)及(17.34). 读者做习题时应记住这些结论.

(17.19) **习题** 设ψ是(8.28)所定义的Lebesgue奇异函数. 试计算φ在[0,1]的各点的所有导数.

(17.20) **习题** 在R上规定函数φ为

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1, \end{cases}$$

$$\varphi(x+k)=\varphi(x),\qquad k\in Z.$$

命

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\varphi(2^n x),$$

试证f在R上连续. 计算f在各个二进有理点(dyadic rational point)的四个导数.并证明f在各个非二进有理点都没有有限导数.

(17.21) 习题 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是区间$[a,b]$内相异点所成的集，又设$(u_n)_{n=1}^{\infty}$，$(v_n)_{n=1}^{\infty}$是两个实数序列，并且$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|<\infty$. 定义

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x<a_n,\\ u_n, & x=a_n,\\ v_n, & x>a_n.\end{cases}$$

试证：$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$a.e.具有有限导数，并且a.e.成立$s'(x)=0$.〔提示. 函数$s$具有有限变差；利用数$|u_n|$和$|v_n|$求出每个$V_a^x$. 然后应用(17.18).〕

(17.22) 习题 试在R上求出一个实值严格递增函数f，使得a.e.成立$f'(x)=0$.

(17.23) 习题 设$f\in\mathfrak{C}^r([a,b])$.并假设存在两个实数$\alpha<\beta$，使对于一切$x\in[a,b[$，

$$\alpha\leqslant D^+f(x)\leqslant\beta.$$

试证：当$a\leqslant x<x+h\leqslant b$时，

$$h\alpha\leqslant f(x+h)-f(x)\leqslant h\beta.$$

〔提示. 假定

$$f(x_0+h_0)-f(x_0)<\gamma h_0<\alpha h_0,$$

并记$h_1=\sup\{h:0<h<h_0,\ f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant\gamma h\}$，然后证明$D^+f(x_0+h_1)<\alpha$.〕

(17.24) 习题 设函数f属于$\mathfrak{C}^r([a,b])$，数c属于$[a,b]$. 假设$D^+f(c)$有限，D^+f在c连续. 试证$f'(c)$必存在.〔利用(17.23).〕

(17.25) 习题 设f是$[a,b]$上一个实值非减函数. 假设$u\geqslant0$及$E\subset[a,b]$适合条件：对于每个$x\in E$，都存在f在x的某个导数，

它不超过u. 试证：$\lambda(f(E))\leqslant u\lambda(E)$.〔考虑$f(A)$的某个适当的Vitali覆盖，这里

$$A=\{x\in E:\text{对于一切 } y\in[a,b]\cap\{x\}',\ f(x)\neq f(y)\}.$$

注意$f(E\cap A')$可数.〕

(17.26) **习题** f如(17.25)所设. 假设$v\geqslant 0$及$F\subset[a,b]$适合条件：对于每个$x\in F$，f在x的某个导数大于或等于v. 试证：$\lambda(f(F))\geqslant v\lambda(F)$.〔考虑$B$的某个适当的Vitali覆盖，这里$B=\{x\in F: f\text{在}x\text{连续}\}$. 注意$F\cap B'$可数.〕

(17.27) **习题** 设f是定义在$[a,b]$上的一个实值函数. 假设$c\geqslant 0$及$E\subset[a,b]$适合条件：对于一切$x\in E$，$f'(x)$存在，并且$|f'(x)|\leqslant c$. 试证：$\lambda(f(E))\leqslant c\lambda(E)$.〔可考虑$f(E)$的一个Vitali覆盖，它是由适合$f([x,\ x+h])\subset[f(x),\ f(x+h)]$的区间$[f(x),\ f(x+h)]$组成的.〕

(17.28) **习题** 设E是R的一个子集，它是完全任意的区间(各个区间可以是开的、闭的或半开半闭的)族之并. 试证E是Lebesgue可测的.〔利用Vitali定理.〕

(17.29) **习题** 设α，β是两个正实数. 在$[0,1]$上定义f为：$f(x)=x^{\alpha}\sin(x^{-\beta})$ $(0<x\leqslant 1)$，$f(0)=0$. 试证：为了使f在$[0,1]$上为有限变差的，其充要条件是$\alpha>\beta$.

(17.30) **习题** 试证明以下语句是正确的或错误的：如果函数f属于$\mathfrak{C}^r([0,1])$，那么必存在$a,b\in R$，$0\leqslant a<b\leqslant 1$，而$f$在$[a,\ b]$上是有限变差的.

(17.31) **习题** 设f是定义在实数区间I上的一个函数，如果存在常数$M\geqslant 0$，$\alpha>0$，使对于一切$x,y\in I$，成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

就说f满足α次**Lipschitz条件**，记为$f\in\mathfrak{Lip}_{\alpha}(I)$. 试证：

(a) 当$\alpha>1$，$f\in\mathfrak{Lip}_{\alpha}(I)$时，$f$必为常数.

(b) 当$0<\alpha<1$时，则存在一个函数$f\in\mathfrak{Lip}_{\alpha}([0,1])$，它在$[0,1]$上具有无限变差.

(c) 在$[0,1]$上存在一个连续有限变差函数，它不满足Lipschitz条件.

(d) 当$f\in\mathfrak{C}^r([a,b])$时，$f\in\mathfrak{Lip}_1([a,b])$的充要条件是$D^+f$在$[a,b[$上有界.〔提示. 利用(17.23). 〕

(17.32) **习题** 设f是$[a,b]$上一个复值有限变差函数. 假定f在$c\in[a,b]$连续. 试证：函数$g:x\to V_a^x f$（这里$g(a)=0$）在c连续.

(17.33) **习题** 设f是$\mathfrak{C}^r([a,b])$中的一个函数. 对于$[a,b]$的每个细分$\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，规定

$$|\Delta|=\max\{x_k-x_{k-1}:1\leqslant k\leqslant n\},$$
$$\omega_k=\max\{f(x):x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k\}-\min\{f(x):x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k\}\quad(k=1,\cdots,n).$$

试证：

$$V_a^b f=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k.$$

(17.34) **习题** 设f是$\mathfrak{C}^r([a,b])$中的一个函数，对于每个$y\in R$，命$A_y=\{x\in[a,b]:f(x)=y\}$. 在R上定义ν为

$$\nu(y)=\begin{cases}\overline{\overline{A_y}}, & A_y\text{有限},\\ \infty, & A_y\text{无限}.\end{cases}$$

试证：函数ν是Lebesgue可测的，并且

$$\int_R \nu(y)dy=V_a^b f.$$

〔提示. 利用(17.33). 设$\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots$是$[a,b]$的一个细分序列，并且$|\Delta_n|\to 0$，比如设

$$\Delta_n=\{a=x_0^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\}.$$

对于每个n，规定

$$\nu_n=\sum_{k=1}^{m_n}\xi B_{n,k},$$

式中$B_{n,k}=f([x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}])$．证明对于几乎所有$y\in R$，$\nu_n(y)\to\nu(y)$，并应用B.Levi单调收敛定理．〕函数$\nu$称为$f$的**Banach指标**（Banach indicatrix）．

（17.35） **习题** 设区间$[a, b]\subset R$，f是$[a,b]$上的复值函数，满足：$V_a^b f<\infty$，$f(a)=0$．命这种f全体所成的集为$\mathfrak{B}([a,b])$，对于$f\in\mathfrak{B}([a, b])$，规定$\|f\|=V_a^b f$．试证(a)—(c)，并解(d)和(e)．

(a) 按照点态运算，$\mathfrak{B}([a, b])$成为一个复线性代数．

(b) 对于$f\in\mathfrak{B}([a, b])$，成立不等式$\|f\|_u\leqslant\|f\|$．

(c) 按照上述范数，$\mathfrak{B}([a, b])$成为一个Banach空间．

(d) 不等式$\|fg\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$是否对于一切$f,g\in\mathfrak{B}([a, b])$都成立？

(e) 试求：关于由变差范数规定的拓扑，$\mathfrak{B}([a, b])$的最小的稠密子集基数．

（17.36） **习题** 设x为一实数，f是定义在x的某个邻域内的一个实值函数．f在x的**上(下)第一对称导数**〔upper (lower) first symmetric derivatives〕和**上(下)第二对称导数**〔upper(lower) second symmetric derivatives〕分别定义为表达式

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{1}$$

和

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \tag{2}$$

当$h\downarrow 0$时的上极限（下极限）．这两个导数分别记作$\overline{D}_1 f(x)$和$\overline{D}_2(f)$（$\underline{D}_1 f(x)$和$\underline{D}_2 f(x)$）．如果$\overline{D}_1 f(x)=\underline{D}_1 f(x)$（$\overline{D}_2 f(x)=$

$\underline{D}_2 f(x)$)，就称这个公共值为 f **在 x 的第一（第二）对称导数**，记作 $D_1 f(x)$（$D_2 f(x)$）. 试证：

(a) 当 $f'(x)$ 存在时，$D_1 f(x)$ 也存在，并且二者相等.

(b) (a)的逆命题不成立.

(c) 如果 f' 在 x 的某个邻域内存在且有限，又 $f''(x)$ 有限，那么 $D_2 f(x)$ 必存在，并且等于 $f''(x)$.〔对(2)式——作为 h 的函数——应用中值定理.〕

(d) 甚至当 f 仅在 x 连续时，$D_2 f(x)$ 仍可能存在.

(17.37) 习题 凸函数补充习题. 设 I 是 R 内一个开区间，f 是定义在 I 上的一个凸函数〔参看(13.34)〕.

(a) 试证：对于一切 $x \in I$，$f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$ 都存在且有限，此外，在 I 上 f'_+ 和 f'_- 还是非减函数，并且 $f'_- \leqslant f'_+$. 于是在 I 上 f' 几乎处处存在且有限. 〔提示. 设 $x < y < z$，则有 $y = \dfrac{z-y}{z-x} x + \dfrac{y-x}{z-x} z$，

从而 $f(y) \leqslant \dfrac{z-y}{z-x} f(x) + \dfrac{y-x}{z-x} f(z)$. 由此

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \qquad (1)$$

从(1)式就容易证明我们的断言. 〕

(b) 试证：对于 I 的任意的有界闭子区间 $[a,b]$，f 恒属于 $\mathfrak{Lip}_1([a, b])$. ［当 $a<x<y<b$ 时，(1)式蕴涵

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(b)-f(y)}{b-y},$$

由此并根据(a)，不难看出

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leqslant \max\{ |f_+'(a)|, |f_-'(b)| \}. \text{]}$$

(c) 设 g 为实数开区间 I 上一个实值函数. 试证：g 是凸函数的充要条件是在 I 上 g 连续，并且 $\overline{D}_2 g \geqslant 0$〔参见(17.36)〕［先设在 I

上$\underline{D}_2 g>0$，并假定g在I上不是凸函数，然后求出一点x，使$\overline{D}_2 g(x)\leqslant 0$．其次考察函数$g_n(x)=g(x)+\frac{1}{n}x^2$，$n=1, 2, \cdots$.]

§18 绝对连续函数

本节，我们要划分出形如

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad f\in \mathfrak{L}_1([a,b])$$

的函数F所成的一类函数．而且也要识别实数区间上这样的函数，即它们是其导数的积分．这项研究将直接导致Fourier级数理论中某些经典结果——本节也要提出来讨论一番．象§17一样，"几乎处处"指的是"λ几乎处处"，而"可测"则指"$\mathscr{M}_\lambda$可测"．我们首先证明几个较为简单的定理．

(18.1) **定理** 设$f\in \mathfrak{L}_1([a,b])$，在$[a, b]$上定义$F$为

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

（函数F叫做f**的不定积分**．）则F一致连续，并具有有限变差，而

$$V_a^b F=\int_a^b |f(t)|\,dt.$$

对于$f\in \mathfrak{L}_1(R)$及$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$成立类似断言．[如果$\varphi$是$R$上的复值函数，则定义

$$V_{-\infty}^{\infty}(\varphi)=\lim_{A\to\infty}V_{-A}^{A}\varphi;$$

可类似定义$V_{-\infty}^{a}(\varphi)$及$V_a^{\infty}(\varphi)$．]

证 设$x'>x$．则成立等式

$$|F(x')-F(x)|=\left|\int_x^{x'}f(t)dt\right|;$$

因而由（12.34），F一致连续则是显然的. 当$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$时，则得到

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|\,dt$$

$$=\int_a^b|f(t)|\,dt,$$

所以成立不等式

$$V_a^bF\leqslant\int_a^b|f(t)|\,dt,$$

从而F具有有限变差.

现在证明反向不等式. 我们记得，阶梯函数

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{[x_{k-1},x_k[}\quad(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)\qquad(1)$$

在$\mathfrak{L}_1([a,b])$中稠密（13.23）. 试考察函数$\mathrm{sgn}\,\overline{f}$；对于任意正整数$m$，取形如（1）的一个阶梯函数$\sigma_m$，使

$$\|\sigma_m-\mathrm{sgn}\,\overline{f}\|_1<\frac{1}{m}.\qquad(2)$$

既然对于任意x，$|\mathrm{sgn}\,\overline{f}(x)|=1$或0，那么不难看出，在（2）式中把适合$|\alpha_k|>1$的每个$\alpha_k$都换上数$\alpha_k|\alpha_k|^{-1}$，就只会加强不等式. 这样，就不妨假定对于一切$x\in[a,b]$，$m\in N$，都成立$|\sigma_m(x)|\leqslant 1$. 很清楚，依测度$\sigma_m\to\mathrm{sgn}\,\overline{f}$，从而根据（11.26），便有$(\sigma_m)$的一个子序列$(\sigma_{m_j})$，使在$[a,b]$内a.e.成立

$$\lim_{j\to\infty}\sigma_{m_j}(t)=\mathrm{sgn}\,\overline{f}\,(t).$$

于是由Lebesgue控制收敛定理(12.30)，便得出

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f(t)\operatorname{sgn}\bar{f}(t)\,dt = \lim_{m\to\infty}\int_a^b f(t)\sigma_m(t)\,dt. \tag{3}$$

既然σ_{m_j}具有(1)的形状，所以(3)式中末尾积分的绝对值便有形状

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\cdot|F(x_k)-F(x_{k-1})| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |F(x_k)-F(x_{k-1})| \leqslant V_a^b F.
\end{aligned} \tag{4}$$

结合(3)和(4)，就得到

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant V_a^b F. \qquad \square$$

上述定理表明，不定积分是连续的，并具有有限变差. 我们现在要证明，不定积分的导数等于被积函数(a.e.等于！). 为了证明这一事实，需要一项预备知识——其本身也是挺有趣的.

(18.2) 定理 设A是R的一个任意子集，则对于几乎所有$x \in A$，成立

(i) $$\lim_{k\downarrow 0}\frac{\lambda(A\cap\,]x,x+k[)}{k} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\lambda(A\cap\,]x-h,x[)}{h}$$

$$=\lim_{h,k\downarrow 0}\frac{\lambda(A\cap]x-h,x+k[)}{h+k}=1.$$

如果A是λ可测的，则对于几乎所有$x\in A'$，(i)中的极限都等于零①.

证 不妨假定A有界. 那么存在有界开集U_n，$n=1,2,\cdots$，使

$$U_1\supset U_2\supset\cdots\supset U_n\supset\cdots\supset A,$$

并且$\lambda(U_n)-2^{-n}<\lambda(A)$. 命$a=\inf U_1$，并考察函数

$$\varphi_n(x)=\lambda(U_n\cap]a,x[),$$

$$\varphi(x)=\lambda(A\cap]a,x[).$$

对于$x\in U_n$以及充分小的正数h，显然有

$$\frac{\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)}{h}=\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(x-h)}{h}=1;$$

所以对于所有$x\in U_n$，$\varphi_n'(x)$存在，并且

$$\varphi_n'(x)=1.$$

我们想把Fubini定理(17.18)应用于函数和

$$(\varphi_1-\varphi)+(\varphi_2-\varphi)+\cdots+(\varphi_n-\varphi)+\cdots;$$

先证各个$\varphi_n-\varphi$是单调的. 设$x'>x$，则有

$$\varphi_n(x')-\varphi(x')-(\varphi_n(x)-\varphi(x))$$
$$=\lambda(U_n\cap[x,x'[)-\lambda(A\cap]a,x'[)+\lambda(A\cap]a,x[)$$
$$\geqslant\lambda(U_n\cap[x,x'[)-\lambda(A\cap[x,x'[)\geqslant 0,$$

这是因为

$$\lambda(A\cap]a,x'[)\leqslant\lambda(A\cap]a,x[)+\lambda(A\cap[x,x'[),$$
$$A\cap[x,x'[\subset U_n\cap[x,x'[;$$

于是$\varphi_n-\varphi$单调. 现在命$b=\sup U_1$；那么

$$\varphi_n(b)-\varphi(b)=\lambda(U_n)-\lambda(A)<2^{-n},$$

从而当$a\leqslant x\leqslant b$时，便有

---

①使(i)式成立的点x叫做A的**密集点**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x)-\varphi(x))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(b)-\varphi(b))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}<\infty.$$

命

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x)-\varphi(x)).$$

根据（17.18）及（17.12），对于$]a, b[$中几乎所有x，下式成立

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n'(x)-\varphi'(x))<\infty,$$

从而在$]a, b[$中又a.e.成立

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)=\varphi'(x).$$

这样在$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$上，$\varphi'(x)=1$，只有在一个$\lambda$测度为零的集上是例外，由此得到定理第一个断言. ①

如果A是λ可测的，那么对于所有h, k,

$$1=\frac{\lambda(A\cap]x-h,x+k[)}{h+k}+\frac{\lambda(A'\cap]x-h,x+k[)}{h+k}$$
$$=\psi_A(x)+\psi_{A'}(x).$$

当h和k趋于0时，对于几乎所有$x\in A'$，$\psi_{A'}(x)$趋于1（把定理前半部分应用于A'）. 由此在A'上$\psi_A(x)$a.e.趋于零. □

（18.3） **定理** 设$f\in\mathfrak{L}_1([a,b])$，$F$如(18.1)所设. 则对于几乎所有$x\in]ab[$，成立,等式

---

①其实我们所证得的，要比本定理所需要的多一些，我们知道，在集$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$上a.e.成立$\varphi'(x)=1$；当$A$不可测时，不可测集$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)\cap A'$不具有零测度.

(i) $F'(x)=f(x)$.

证 如果 $f=\xi_A$，这里A是$]a,b[$的可测子集，那么$F(x)=\lambda(]a,x[\cap A)$；（18.2）表明，在$]a,b[$内a.e.成立$F'(x)=\xi_A(x)$.

其次，设$s=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_{A_k}$是一个非负简单可测函数，因此

$$S(x)=\int_a^x s(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_a^x\xi_{A_k}(t)dt.$$

由定理(18.2)可推知，在$]a,b[$内a.e.成立

$$S'(x)=s(x). \qquad (1)$$

对于$\mathfrak{L}_1$中的非负函数f，设$(s_n)_{n=1}^{\infty}$是一个非减的简单可测函数序列，满足：对于所有$x\in[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$（11.35）.

设$n\in N$，记$S_n(x)=\int_a^x s_n(t)dt$；B.Levi定理（12.22）表明，对于所有$x\in[a,b]$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x s_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

$$=S_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[S_{n+1}(x)-S_n(x)]. \qquad (2)$$

各个$S_{n+1}-S_n$是非负函数的积分，从而是非减的．应用Fubini定理(17.18)于(2)式，则在$]a,b[$内a.e.成立等式

$$F'(x)=S_1'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[S_{n+1}'(x)-S_n'(x)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n'(x), \qquad (3)$$

由(1)知道，在$]a,b[$内a.e.成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n'(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x). \qquad (4)$$

结合（3）及（4），便得到(i)．

最后，当 f 是 $\mathfrak{L}_1([a, b])$ 中任意函数时，记

$$f=(f_1-f_2)+i(f_3-f_4),$$

其中$f_j\in\mathfrak{L}_1^+$，然后把(i)应用于非负函数．□

正如以下两个断言所表明的那样，可以大大加强定理（18.3）．

(18.4) **引理** （Lebesgue） 设 f 是 $\mathfrak{L}_1([a,b])$中一个函数．则必有一个集$E\subset]a,b[$，使$\lambda(E'\cap[a,b])=0$，并且对于所有$\alpha\in K$及所有$x\in E$，

(i) $$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-\alpha|\,dt$$
$$=|f(x)-\alpha|.$$

证 设$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$是$K$的任意一个可数稠密子集．由

$$g_n(t)=|f(t)-\beta_n|\qquad(n\in N)$$

所规定的函数g_n在$\mathfrak{L}_1([a,b])$中．根据(18.3)，必有集$E_n\subset]a,b[$，使$\lambda(E_n'\cap[a,b]=0$，而对于所有$x\in E_n$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}g_n(t)\,dt=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}g_n(t)\,dt=g_n(x).$$

设交集$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$为$E$；显然$\lambda(E'\cap[a,b])=0$．对于$\varepsilon>0$，$\alpha\in K$，取 n，使 $|\beta_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{3}$．则有

$$\Big||f(t)-\alpha|-|f(t)-\beta_n|\Big|\leqslant|\beta_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{3},\quad t\in[a,b].$$

由此可见

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\beta_n|\,dt\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{3}dt=\frac{\varepsilon}{3},$$

进而当$x\in E$，$0<h<h_0$（这里h_0与ε，n有关）时，

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-|f(x)-\alpha|\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\beta_n|\,dt\right|$$

$$+\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}g_n(t)dt-g_n(x)\right|+|\beta_n-\alpha|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

而n只与ε，α有关，由此得出结论：对于所有$x\in E$及所有$\alpha\in K$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt=|f(x)-\alpha|.$$

同样可证，对于所有$x\in E$及所有$\alpha\in K$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-\alpha|\,dt=|f(x)-\alpha|. \quad \square$$

(18.5) **定理**（Lebesgue） 设$f\in\mathfrak{L}_1([a,b])$. 则对于几乎所有$x\in\,]a,b[$，成立

(i) $$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt=0.$$

证 对于固定的$x\in\,]a,b[$，可写出

$$\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt+\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|\,dt.$$

应用(18.4)，这时$\alpha=f(x)$，便看出对于几乎所有$x\in\,]a,b[$，(i)

式成立． □

（18.6） **定义** 假设$f\in \mathfrak{L}_1([a,b])$，$x\in]a,b[$．当（18.5.i）成立时，就称$x$是$f$**的Lebesgue点**．$f$的Lebesgue点全体所成的集称为$f$**的Lebesgue集**．

在$]a,b[$内凡是f的连续点必是f的Lebesgue点，这是显然的事实．不过，f却未必在任何点都连续，然而几乎所有点是Lebesgue点．我们在（18.29）和（21.43）会看到，Lebesgue集在Fourier级数与Fourier积分理论中起着十分重要的作用．

我们现在来探讨定理（18.3）的"倒转"问题（并非真的是逆命题）．已知一个a.e.可微的连续函数φ，试问：是否成立

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x\varphi'(t)dt?$$

这就是问：如果Riemann积分换成Lebesgue积分，而可微性换成a.e.可微性，那么微积分学基本定理还成立吗？以下几例对此问题作了断然的否定回答．

（18.7） **例** 如（8.28），设ψ是Lebesgue奇异函数．那么ψ在$[0,1]$上连续，而且显而易见，对于$[0,1]$中不属于P（Cantor三分点集）的所有x，$\psi'(x)=0$．于是a.e.成立$\psi'(0)=0$．由此得出

$$\psi(1)-\psi(0)=1\neq 0=\int_0^1\psi'(x)dx.$$

下例虽不象（18.7）从几何上看来那样明显，但十分引人注目．

（18.8） **例** （取材自Riesz-Nagy，但经改写）．① 我们来看$[0,1]$上一个实值函数F，它满足条件：$F(0)=0$，$F(1)=1$，F

①参看F.Riesz, B.Sz.-Nagy, Lesons D'Analyse Fonctionnelle, Akadémiai Kiado. Budapest, 1955. ——译者注．

连续并严格递增，而a.e.成立$F'(x)=0$.

我们如下归纳定义连续函数F_n，$n=0,1,2,\cdots$. 首先，设$(t_n)_{n=1}^{\infty}$是$]0,1[$内的任意一个数列. 命$F_0(x)=x$，定义

$$F_1(0)=0,\quad F_1(1)=1,$$

$$F_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-t_1}{2}\cdot 0+\frac{1+t_1}{2}\cdot 1;$$

而在$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$上则把$F_1$定义成线性函数. 假定$F_0$，$F_1$，$\cdots$，$F_n$已经定义好了. 然后定义

$$F_{n+1}\left(\frac{k}{2^n}\right)=F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n)$$

$$F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1-t_{n+1}}{2}F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

$$+\frac{1+t_{n+1}}{2}F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1);$$

而对于$k=0,1,\cdots,2^{n+1}-1$，在区间$\left[\frac{k}{2^{n+1}},\ \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$内则把$F_{n+1}$定义成线性函数. 函数$F_n$显然是连续的. 它们又是严格递增的. 实际上，对于$0<t<1$及任意α,β，只要$\alpha<\beta$，就成立不等式

$$\beta-\left(\frac{1-t}{2}\alpha+\frac{1+t}{2}\beta\right)=\frac{1-t}{2}(\beta-\alpha)>0,$$

$$\frac{1-t}{2}\alpha+\frac{1+t}{2}\beta-\alpha=\frac{1+t}{2}(\beta-\alpha)>0.$$

这两个不等式表明，当F_n严格递增时，

$$F_{n+1}\left(\frac{k}{2^n}\right)<F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)<F_{n+1}\left(\frac{k+1}{2^n}\right),$$

$$(k=0,1,\cdots,2^n-1).$$

而F_{n+1}的分段线性说明它也是严格递增的. 此外，当$\alpha<\beta$时，还有

$$\frac{1-t}{2}\alpha+\frac{1+t}{2}\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)>0,$$

由这一不等式推出

$$F_n\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)<F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\quad(k=0,1,\cdots,2^n-1),$$

所以，还是根据线性，对于所有$x\in[0,1]$，便成立不等式

$$F_n(x)\leqslant F_{n+1}(x).$$

于是，序列$(F_n(x))_{n=1}^{\infty}$对于所有$x\in[0,1]$都收敛；命

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x).$$

很清楚，F是非减的. 其实它是严格递增的. 这是因为，如果$x<x'$，而k，n满足：$x<\frac{k}{2^n}<x'$，便有

$$F(x)\leqslant F\left(\frac{k}{2^n}\right)=F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)<F_n(x')\leqslant F(x').$$

我们接下去考虑满足下列条件的数偶所成的任意序列$(\alpha_n,\beta_n)_{n=0}^{\infty}$：

$$\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1},\quad\beta_{n+1}\leqslant\beta_n\qquad(n=0,1,2,\cdots);\tag{1}$$

$$\alpha_n=\frac{k_n}{2^n},\qquad\beta_n=\frac{k_n+1}{2^n},\tag{2}$$

其中$k_n\in\{0,1,\cdots,2^n-1\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 于是有$\alpha_n=\alpha_{n+1}$及$\beta_{n+1}=\beta_n-\frac{1}{2^{n+1}}$，或者有$\beta_{n+1}=\beta_n$及$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{1}{2^{n+1}}$. 第一种情况下，从$(\alpha_n,\ \beta_n)$到$(\alpha_{n+1},\ \beta_{n+1})$过程中，我们归于左边；第二种情况则归于右边.

设k是一个固定的非负整数. 假定从(α_k,β_k)到$(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$进行中归于右边. 则有

$$F(\beta_{k+1})-F(\alpha_{k+1})$$
$$=F_{k+1}(\beta_{k+1})-F_{k+1}(\alpha_{k+1})$$
$$=F_k(\beta_k)-\left\{\frac{1-t_{k+1}}{2}F_k(\alpha_k)+\frac{1+t_{k+1}}{2}F_k(\beta_k)\right\}$$
$$=\frac{1-t_{k+1}}{2}(F(\beta_k)-F(\alpha_k)). \tag{3}$$

假如从(α_k,β_k)到$(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$的进行中归于左边，则同样的计算表明

$$F(\beta_{k+1})-F(\alpha_{k+1})=\frac{1+t_{k+1}}{2}(F(\beta_k)-F(\alpha_k)). \tag{4}$$

通过简单归纳，便推出

$$F(\beta_n)-F(\alpha_n)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\varepsilon_k t_k}{2}\right),$$

其中ε_k等于1或－1．于是

$$|F(\beta_n)-F(\alpha_n)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+t_k}{2}\right),$$

因此，当所有t_k都小于一个比1小的数时，F显然是连续的．（我们不准备费力探讨F成为连续的必要条件．）

我们现在考虑F的导数．设有适合$0\leqslant\frac{l}{2^p}<1$的任意一个二进有理数$\frac{l}{2^p}$．规定序列$(\alpha_n,\beta_n)$满足(1)和(2)，并且$\alpha_p=\alpha_{p+1}=\cdots=\frac{l}{2^p}$：而不管$\alpha_1,\beta_1\cdots,\alpha_{p-1},\beta_{p-1}$是什么值．因此势必有

$$\beta_{p+s}=\frac{l}{2^p}+\frac{1}{2^{p+s}},\quad s=0,1,2,\cdots.$$

应用(4)式便得出

$$\frac{F(\beta_{p+s})-F\left(\frac{l}{2^p}\right)}{\beta_{p+s}-\frac{l}{2^p}}$$

$$=2^{p+s}\prod_{j=1}^{s}\frac{1}{2}(1+t_{p+j})(F(\beta_p)-F(\alpha_p))$$

$$=2^p(F(\beta_p)-F(\alpha_p))\prod_{j=1}^{s}(1+t_{p+j}).$$

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n$ 发散时，可知 $D^+F\left(\frac{l}{2^p}\right)=\infty\left[\log(1+t)\geqslant\frac{t}{2},0\leqslant t\leqslant 1\right]$.
完全类似地，当 $0<\frac{l}{2^p}\leqslant 1$，$\prod_{n=1}^{\infty}(1-t_n)=0$ 时，则有 $D_-F\left(\frac{l}{2^p}\right)=0$. 就这两个结果而言，只要 $\overline{\lim_{n\to\infty}}t_n$ 为正就够了.

其次考虑一点 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$，其中 $x_k=0$ 或 $x_k=1$，而且对于无限多个 k 来说，每个值都可以出现，这就是说，x 不是二进有理数. 对于每个 n，有唯一的 l，满足 $\frac{l}{2^n}<x<\frac{l+1}{2^n}$；命 $\alpha_n=\frac{l}{2^n}$，$\beta_n=\frac{l+1}{2^n}$. 其实，这些数由下式给出

$$\alpha_n=\frac{l}{2^n}=\frac{x_1}{2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}<x<\frac{x_1}{2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{l+1}{2^n}=\beta_n.$$

我们来计算 $\frac{F(\beta_n)-F(\alpha_n)}{\frac{1}{2^n}}$. 如果 $x_n=0$，那么 $\alpha_n=\alpha_{n-1}$，并且

$$\beta_n=\alpha_{n-1}+\frac{1}{2^n}=\frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2}.$$

如果 $x_n=1$，那么 $\beta_n=\beta_{n-1}$，并且

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}+\frac{1}{2^n}=\frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2}.$$

在第一种情况下，得到

$$\frac{F(\beta_n)-F(\alpha_n)}{\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^n\left\{\frac{1-t_n}{2}F_{n-1}(\alpha_{n-1})\right.$$

$$\left.+\frac{1+t_n}{2}F_{n-1}(\beta_{n-1})-F_{n-1}(\alpha_{n-1})\right\}$$

$$=2^n\left\{\frac{1+t_n}{2}\cdot(F_{n-1}(\beta_{n-1})-F_{n-1}(\alpha_{n-1}))\right\}.$$

在第二种情况下，把上式中因子$\frac{1+t_n}{2}$换成$\frac{1-t_n}{2}$，由此对于所有n，便成立

$$\frac{F(\beta_n)-F(\alpha_n)}{\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^n\frac{(1+(-1)^{x_n}t_n)}{2}\cdot(F_{n-1}(\beta_{n-1})-F_{n-1}(\alpha_{n-1}))$$

$$=\cdots=\prod_{k=1}^{n}(1+(-1)^{x_k}t_k). \tag{5}$$

我们知道函数F是几乎处处具有有限导数的，因此(5)式中乘积对于几乎所有x，其极限存在、有限，并等于$F'(x)$. 考察比值

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1+(-1)^{x_k}t_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+(-1)^{x_k}t_k)}=1\pm t_{n+1},$$

当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$时，它收敛到1. 这样，当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ t_n>0$时，乘

积$\prod_{k=1}^{n}(1+(-1)^{x_k}t_k)$就不会收敛到一个有限正数，从而对于几乎所有$x$，$F'(x)=0$.

我们把上面所说的总结一下. 已知一个序列$(t_n)_{n=1}^{\infty}$，其值在$]0,1[$中. 我们构造了$[0,1]$上的一个实值函数F，它具有下列性质：

(i) $F(0)=0$，$F(1)=1$，F严格递增；

(ii) 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}t_n<1$，那么$F$连续；

(iii) 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}t_n>0$，$x$是$]0,1[$中的一个二进制有理数，那么$D^+F(x)=\infty$，$D_-F(x)=0$；

(iv) 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}t_n>0$，那么对于几乎所有$x\in]0,1[$，$F'(x)=0$.

这样一来，假如$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}t_n<1$，则$F$必连续、严格递增，而且a.e.成立$F'(x)=0$.

读者应该就某个特定数列(t_n)——比如对于所有n，均取$t_n=\frac{1}{2}$——简略写出并草绘F的前几个逼近式F_n，观察其结果.

(18.9) 注意 (18.8)中的构造同时证明了测度论上一项奇特事实. 如果$(t_n)_{n=1}^{\infty}$是$]0,1[$中没有极限0的数列，那么对于几乎所有的数$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$，成立

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^{x_k}t_k)=0.$$

我们现在所要划分出的一类函数，乃是$\mathfrak{L}_1$中函数的不定积分.

(18.10) 定义 设f是定义在R的子区间J上的一个复值函

数.① 假如对于任意 $\varepsilon > 0$，总有 $\delta > 0$，使对于 J 的任意有限个两两不相交的开子区间所成的区间族 $\{]c_k, d_k[\}_{k=1}^{n}$，只要

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) < \delta,$$

就有

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |f(d_k) - f(c_k)| < \varepsilon,$$

则称 f **在 J 上是绝对连续的.**

(18.11) **例** (a) 定理 (12.34) 说明了 $\mathfrak{L}_1([a,b])$ 中函数的不定积分是绝对连续的. 我们还打算证明：凡绝对连续函数都是不定积分.

(b) Lebesgue奇异函数 ψ 并非绝对连续的. 我们可以把Cantor三分点集 P 置于一个两两不相交的而 $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$ 为任意小的开区间并 $\bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ 之中. 开拓 ψ，使当 $x < 0$ 时，$\psi(x) = 0$，而当 $x > 1$ 时，$\psi(x) = 1$. 于是不难看出，$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi(b_k) - \psi(a_k)) = 1$，从而尽管 $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ 任意小，但对于充分大的 n，有 $\sum_{k=1}^{n} (\psi(b_k) - \psi(a_k)) \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) (18.8)中的函数 F 不是绝对连续的. 这可以很容易地从下面定理(18.15)看出.

我们先列出绝对连续函数的一些基本性质.

---

①应该记住：根据 (6.1) 的规定，J 可以是开的、闭的或半开的，J 可以是有界的或无界的.

(18.12) **定理** 定义在$[a,b]$上的复值绝对连续函数f在$[a,b]$上必具有有限变差.

证 给定$\varepsilon=1$，取$\delta>0$满足定义(18.10)的条件. 设n为适合$n>\frac{b-a}{\delta}$的任意整数，用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

细分$[a,b]$，使

$$x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}<\delta \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

由δ的选取可知，对于所有k，$V_{x_{k-1}}^{x_k}\leqslant 1$. 于是

$$V_a^b f=\sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k} f\leqslant n. \quad \square$$

(18.13) **定理** $[a,b]$上的绝对连续函数f必连续，并可写成

(i) $f=f_1-f_2+i(f_3-f_4)$,

其中f_j在$[a,b]$上是实值的、非减的和绝对连续的.

证 如果f绝对连续，那么f的连续性以及$\mathrm{Im}f$与$\mathrm{Re}f$的绝对连续性都是显然的事实. 对于一个实值绝对连续函数g，记

$$g_1(x)=V_a^x g.$$

那么

$$g=g_1-(g_1-g),$$

而只要证实g_1绝对连续便完成了证明. [注意g_1与g_1-g都是非减的(17.16).]

任给$\varepsilon>0$，设$\delta>0$如此之小，使当两两不相交的诸区间$]c_k, d_k[$适合

$$\sum_{k=1}^{n}(d_k-c_k)<\delta \tag{1}$$

时，就有

$$\sum_{k=1}^{n}|g(d_k)-g(c_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设$]c_k, d_k[\}_{k=1}^n$是满足条件(1)的一组固定的两两不相交的区间. 由于g具有有限变差，对于每个$k\in\{1, 2, \cdots, n\}$，便有细分$c_k=a_0^{(k)}<a_1^{(k)}<\cdots<a_{l_k}^{(k)}=d_k$，它满足

$$V_{c_k}^{d_k} g<\sum_{j=0}^{l_k-1}|g(a_{j+1}^{(k)})-g(a_j^{(k)})|+\frac{\varepsilon}{2n}.$$

由此得到

$$\sum_{k=1}^{n}|g_1(d_k)-g_1(c_k)|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}V_{c_k}^{d_k} g<\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{l_k-1}|g(a_{j+1}^{(k)})-g(a_j^{(k)})|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

从而g_1是绝对连续的. □

(18.14) **定理** 如果f是$[a,b]$上的一个实值非减函数，则f'是Lebesgue可测的，而且

(i) $$\int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a).$$

如果g是$[a,b]$上的一个复值有限变差函数，则$g'\in\mathfrak{L}_1([a,b])$.

证 当$x>b$时，命$f(x)=f(b)$. 对于$n=1, 2, \cdots$及$a\leqslant x\leqslant b$，命

$$f_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

那么(f_n)是一个非负可测函数序列，并且对于几乎所有$x\in]a,b[$，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f'(x)$$

〔参看(17.12)〕；所以f'是可测的．根据Fatou引理（12.23）以及(12.44)，得到

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\ n\int_a^b\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx\right]$$

$$\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(b)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(a)dx\right]$$

$$=f(b)-f(a).$$

这就证明了定理的第一个断言．由第一个断言以及g可以表成四个非减函数的线性组合这一事实，显然就得出第二个断言．□

(18.15) **定理** 设f是$[a,b]$上一个绝对连续复值函数，并假定在$]a,b[$内a.e.成立$f'(x)=0$．则f必为常数．

证 不失一般性，我们假定f是实值的．因为如果不是这样，那么分别考察Ref及Imf就行了．要证：对于任意$c\in]a,b]$，都有$f(c)=f(a)$．因此设$c\in]a,b]$，并任给$\varepsilon>0$．相应于给定的ε，取$\delta>0$，满足绝对连续性定义(18.10)的条件．命

$$E=\{x\in]a,c[:f'(x)=0\}.$$

显然$\lambda(E)=c-a$．对于每个$x\in E$，存在充分小的$h>0$，使$[x,x+h]\subset]a,c[$，并且

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon h}{c-a}. \qquad (1)$$

这样的区间$[x,x+h]$全体所成的区间族是E的一个Vitali覆盖，从而根据Vitali定理(17.11)，便存在这些区间所成的两两不相交的有限族$\{[x_k,x_k+h_k]\}_{k=1}^n$，使

$$\lambda\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}(x_k,x_k+h_k)\right)'\right)<\delta.$$

那么

$$\lambda(]a,c[)=\lambda(E)<\delta+\sum_{k=1}^{n}h_k. \qquad (2)$$

不妨假定$x_1<x_2\cdots<x_n$. 由(2)式知道，与$\bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_k, x_k+h_k)$互余的开区间

$$]a,x_1[,]x_1+h_1,x_2[,\cdots,]x_n+h_n,c[,$$

其长度之和小于δ，从而，鉴于δ的选取，便有

$$|f(a)-f(x_1)|+\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k+h_k)-f(x_{k+1})|$$
$$+|f(x_n+h_n)-f(c)|<\varepsilon. \qquad (3)$$

结合不等式(1)和(3)便得出

$$|f(a)-f(c)|\leqslant|f(a)-f(x_1)|+\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k+h_k)-f(x_{k+1})|$$
$$+|f(x_n+h_n)-f(c)|+\sum_{k=1}^{n}|f(x_k+h_k)-f(x_k)|$$
$$<\varepsilon+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon h_k}{c-a}\leqslant 2\varepsilon.$$

既然ε是任意的，可见$f(c)=f(a)$. □

(18.16) **定理** (关于Lebesgue积分的微积分学基本定理) 设f是$[a,b]$上一个复值绝对连续函数. 则$f'\in\mathfrak{L}_1([a,b])$,并且对于每个$x\in[a,b]$，成立

(i) $\quad f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.$

证 由(18,12)及(18,14)知道，$f'\in\mathfrak{L}_1$. 命

$$g(x)=\int_a^x f'(t)dt.$$

那么g绝对连续，并根据(18.3)，a.e.成立$g'(x)=f'(x)$. 这样，函数$h=f-g$也是绝对连续的，并a.e.成立$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. 由(18.15)知道，h等于常数. 因而对于任意$x\in[a, b]$，

$$f(x)=h(x)+g(x)=h(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

$$=f(a)+\int_a^x f'(t)dt. \quad \square$$

(18.17) 定理 设f是$[a,b]$上一个函数. 则对于某个$\varphi\in\mathfrak{L}_1([a, b])$，函数$f$具有形式

$$f(x)=f(a)+\int_a^x \varphi(t)dt$$

的充要条件是f在$[a, b]$上绝对连续. 这时在$]a, b[$内a.e.成立$\varphi(x)=f'(x)$.

证 这无非是(18.3)，(18.11.a)及(18.16)的摘要. □

R上的不定积分具有大体上相同的特征.

(18.18) 定理 设f是R上一个函数. 则对于某个$\varphi\in\mathfrak{L}_1(R)$，函数$f$具有形式

(i) $f(x)=\int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$

的充要条件是：

(1) 对于任意$A>0$，f在$[-A, A]$上绝对连续；

(2) $V_{-\infty}^{\infty}f$有限；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

证 假设f具有形式(i). 那么由(12.34)，f在$[-A, A]$上绝对连续，而根据(18.1)得到

$$V_{-\infty}^{\infty}f=\int_R |\varphi(t)|\,dt<\infty.$$

控制收敛定理(12.30)则蕴涵$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

反过来，如果对于任意$A>0$，f在$[-A, A]$上绝对连续，(18.17)则表明，当A为任意正实数，$x>-A$时，

$$f(x)=f(-A)+\int_{-A}^{x}f'(t)dt.$$

命$A\to\infty$取极限，得到

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{x}f'(t)dt. \qquad (1)$$

应用(12.22)，(18.17)及(18.1)，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|f'(t)|\,dt$$
$$=\lim_{n\to\infty}V_{-n}^{n}f\leqslant V_{-\infty}^{\infty}f<\infty.$$

这样f'便属于$\mathfrak{L}_1(R)$，于是把控制收敛定理应用于(1)式右边，就得出

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}f'(t)dt. \qquad \square$$

就绝对连续函数及 Lebesgue 积分而言，成立分部积分公式.

(18.19) **定理** 设f,g是$\mathfrak{L}_1([a,b])$中两个函数，命

$$F(x)=\alpha+\int_a^x f(t)dt,$$

$$G(x)=\beta+\int_a^x g(t)dt.$$

则

(i) $\int_a^b G(t)f(t)dt+\int_a^b g(t)F(t)dt$

$$=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

证 不等式

$$|F(v)G(v)-F(u)G(u)|\leqslant\|F\|_u|G(v)-G(u)|+\|G\|_u|F(v)-F(u)|$$

表明 FG 是绝对连续的. 所以 FG 是 a.e. 可微的, 通过初等计算并得到

$$(FG)'=FG'+F'G.$$

根据(18.3)知道, $G'=g$ 与 $F'=f$ 都a.e.成立; 于是由(18.16)便得出(i). □

(18.20)**推论** 设 f, g 是 $[a,b]$ 上两个绝对连续函数, 则

(i) $$\int_a^b f(t)g'(t)dt+\int_a^b f'(t)g(t)dt$$
$$=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

证 这无非是借助于(18.17)改写了(18.19). □

(18.21) **推论** 设 f, g 是 R 上两个函数, 并满足(18.18)的条件. 则

(i) $$\int_R f(t)g'(t)dt+\int_R f'(t)g(t)dt$$
$$=\int_R f'(t)dt\cdot\int_R g'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\infty}g(x).$$

证 在(18.20.i)中当 $a\to-\infty$, $b\to\infty$ 时取极限. □

(18.22)**注意** 另一个著名积分公式是换元积分法的基本公式:

(i) $$\int_\alpha^\beta f(y)dy=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

其中 f 是Riemann可积的, φ 是 $[\varphi^{-1}(\alpha),\ \varphi^{-1}(\beta)]=[a,\ b]$ 上具有正连续导数的函数. 其实, 成立一个更一般的公式, (i)只是它的很特殊的情况. 要证明这一公式, 看来最方便的途径是援用

Lebesgue-Radon-Nikodým定理(19.24)，所以我们延迟到(20.4)来做这件事. 这里我们继续讨论有关绝对连续函数的某些细节——(20.4)和(20.5)要用到这些事实.

(18.23) **定理** 设φ是$[a,b]$上一个复值绝对连续函数，对于$[x,y]\subset[a,b]$，命

$$\omega_{\varphi}(x,y)=\sup\{|\varphi(u)-\varphi(v)|:u,v\in[x,y]\}.$$

则对于任意$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使对于$[a,b]$的任意有限个两两不相交的开子区间所成的区间族$\{]c_k,d_k[\}_{k=1}^{n}$，只要

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=1}^{n}(d_k-c_k)<\delta,$$

就有

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{n}\omega_{\varphi}(c_k,d_k)<\varepsilon.$$ ①

证 由于函数φ连续，区间$[c_k,d_k]$又是紧的，因此不难看出，$[c_k,d_k]$必含有两点u_k及v_k，满足$u_k<v_k$，$|\varphi(u_k)-\varphi(v_k)|=\omega_{\varphi}(c_k,d_k)$. 既然

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k-u_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(d_k-c_k)<\delta,$$

由(18.10.ii)便立即得出(ii). □

考虑到定理(20.4)，我们需要引进另一个定义.

(18.24) **定义** 设g是一个函数，有定义域$[a,b]\subset R$及值域$[\alpha,\beta]\subset R$. 如果对于任意$E\subset[a,b]$，只要$\lambda(E)=0$，就有$\lambda(g(E))=0$，就称g是一个**N函数**，或称g**满足条件N**.

(18.25) **定理** 设φ是一个连续的有限变差函数，并有定义域

---

①这样一来，在绝对连续性定义中，我们就可以用看来更强的条件(18.23.ii)来代替条件(18.10.ii).

②这个术语以及这一概念本身，是由N.N.Luzin(1915年)提出的；他曾把这一性质看作是所谓"零条件".

$[a, b]\subset R$和值域$[\alpha, \beta]\subset R$. 则φ是N函数的充要条件是φ是绝对连续的. ①

证 假定φ绝对连续，并且$\lambda(E)=0$. 设ε是任意正数，δ如(18.23)所说. 由于$\lambda(\varphi\{a,b\})$显然为零，所以不妨假设$E\subset]a,b[$. 取$]a,b[$的一族两两不相交的开子区间$\{]c_k, d_k[\}_{k=1}^{\infty}$，使$E\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}]c_k,d_k[$，$\sum_{k=1}^{\infty}(d_k-c_k)<\delta$. 根据(18.23)，对于任意$n$，都有

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{\varphi}(c_k,d_k)<\varepsilon,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\varphi}(c_k,d_k)\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$

自然成立

$$\varphi(E)\subset\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}]c_k,d_k[\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi(]c_k,d_k[). \tag{2}$$

同时，显而易见

$$\lambda(\varphi(]c_k,d_k[))=\lambda(\varphi([c_k,d_k]))=\omega_{\varphi}(c_k,d_k).$$

所以由(2)和(1)推知，$\lambda(\varphi(E))<\varepsilon$. 既然$\varepsilon$是任意的，那么$\lambda(\varphi(E))=0$，就是说$\varphi$是$N$函数.

必要性不象充分性那么明显. 假设φ是N函数，而假定φ并不是绝对连续的. 根据(18.23)，有一个正数ε_0，使得可求出一个序列

$$\{]c_1^{(1)},d_1^{(1)}[,\cdots,]c_{l_1}^{(1)},d_{l_1}^{(1)}[\}=\mathscr{D}_1,$$

$$\{]c_1^{(2)},d_1^{(2)}[,\cdots,]c_{l_2}^{(2)},d_{l_2}^{(2)}[\}=\mathscr{D}_2,$$

---

①本定理是由Banach提出的[Fund.Math. 7，225—236(1925)]，这里提供了其原始证明.

$\cdots$

$$\}c_1^{(n)}, d_1^{(n)}[, \cdots,]c_{l_n}^{(n)}, d_{l_n}^{(n)}[\} = \mathscr{D}_n,$$

具有下列性质．第一，构成各个$\mathscr{D}_n$的区间是两两不相交的．第二，对于一切n，成立不等式

$$\sum_{k=1}^{l_n} \omega_\varphi(c_k^n, d_k^n) \geqslant \varepsilon_0. \tag{3}$$

第三，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} (d_k^n - c_k^n) < \infty. \tag{4}$$

对于每个n，以及对于$y \in [\alpha, \beta]$，命$N_n(y)$等于$\mathscr{D}_n$中与$\varphi^{-1}(\{y\})$有非空交的区间$]c_k^{(n)}, d_k^{(n)}[$的个数．由于区间$]c_k^{(n)}, d_k^{(n)}[$是两两不相交的，所以显而易见

$$N_n(y) \leqslant \nu(y); \tag{5}$$

这里ν是φ的Banach指标，已在(17.34)定义过．不言而喻，

$$N_n = \sum_{k=1}^{l_n} \xi_{\varphi(]c_k^{(n)}, d_k^{n}[)}.$$

由于$\varphi([c_k^{(n)}, d_k^{(n)}])$是闭区间〔其测度为$\omega_\varphi(c_k^{(n)}, d_k^{(n)})$〕，而$(\varphi(]c_k^{(n)}, d_k^{(n)}[))' \cap \varphi([c_k^{(n)}, d_k^{(n)}])$又至多含有两点，所以$N_n$是Borel可测的（实际上是连续函数序列的点态极限），并且

$$\int_R N_n(y)dy = \sum_{k=1}^{l_n} \omega_\varphi(c_k^{(n)}, d_k^{(n)}) \geqslant \varepsilon_0. \tag{6}$$

设A是集$\{y: y \in [\alpha, \beta],\ \overline{\lim_{n\to\infty}} N_n(y) \neq 0\}$．命$A_1 = \{y \in A: \nu(y) = \infty\}$．根据题设，既然$\varphi$具有有限变差，$\nu$便属于$\mathfrak{L}_1([\alpha, \beta])$，从而

$\lambda(A_1)=0$. 试考察任意一点$y_0\in A\cap A_1'$. 在$[a, b]$中存在一个点序列$(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ($n_1<n_2<\cdots$), 满足

$$x_{n_j}\in \sum_{k=1}^{l_{n_j}}]c_k^{(n_j)}, d_k^{(n_j)}[, \quad \varphi(x_{n_j})=y_0$$

($j=1, 2, \cdots$). 由于$y_0\notin A_1$, 那么仅有有限多个点x_{n_j}是不同的, 从而在无限多个集$\bigcup_{k=1}^{l_n}]c_k^{(n)}, d_k^{(n)}[$中存在一点$x_0\in[a,b]$, 使$\varphi(x_0)=y_0$. 记

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{l_n}]c_k^{(n)}, d_k^{(n)}[\right).$$

很明显$x_0\in E$. 由(4)式及(10.15)推出$\lambda(E)=0$. 既然φ是N函数, 便得到$\lambda(\varphi(E))=0$. 因为前面已证实了$\varphi(E)\supset A\cap A_1'$, 所以

$$\lambda(A)=\lambda(A\cap A_1')=0. \tag{7}$$

A的定义及(7)式表明, 对于$[\alpha, \beta]$中几乎所有的y, 有$\lim\limits_{n\to\infty}N_n(y)=0$. 既然$N_n\leqslant\nu$, $\nu\in\mathfrak{L}_1([\alpha, \beta])$, 所以由 Lebesgue 控制收敛定理(12.24)便推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_R N_n(y)dy=0. \tag{8}$$

因为(6)和(8)相矛盾, 这就完成了证明. □

下例说明, (18.25)中φ具有有限变差的假设是必不可少的.

(18.26) **例** 试考虑任意区间$[a, b]$以及$[a, b]$的含有a,b两点的一个完全的无处稠密子集F. 测度$\lambda(F)$可以等于零或正数. 把开集$[a, b]\cap F'$写成$\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$, 其中区间$]a_n, b_n[$两两不相交, 并可按任意次序枚举. 命$c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$, 并设$(t_n)_{n=1}^{\infty}$是有极限零的一个正数列. 在$[a, b]$上规定函数$g$如下:

$g(x)=0, \qquad x\in F;$
$g(c_n)=t_n \qquad (n=1,2,\cdots);$
g在$[a_n,c_n]$和$[c_n,b_n]$内是线性的
$(n=1,2,\cdots).$

不难看出g是连续的．还不难看出$V_a^b g=2\sum_{k=1}^{\infty}t_k$．证明这两件事留给读者．为了看出$g$是$N$函数，试考察满足$\lambda(E)=0$的任意一个集$E\subset[a,b]$．利用（2.15.i）得到

$$g(E)=g(E\cap F)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}g(E\cap]a_k,b_k[).$$

既然g在$[a_k,c_k]$上和$[c_k,b_k]$上是线性的，所以显然有

$$\lambda(g(E\cap]a_k,b_k[))=0,$$

从而

$$\lambda(g(E))\leqslant\lambda(\{0\})+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(g(E\cap]a_k,b_k[))=0.$$

但当$\sum_{k=1}^{\infty}t_k=\infty$时，$g$肯定不是绝对连续的，因为它具有无限变差．

(18.27) **讨论** 我们举(18.5)的一个著名应用实例来结束本节〔实际上正是考虑到这一应用，才促使Lebesgue来定义Lebesgue集（18.6）〕．试考察函数$f\in\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$及其Fourier系数$\hat{f}(n)$(16.33)．唯一性定理(16.34)告诉我们：f由定义在Z上的函数$\hat{f}$所确定〔当然指的是作为$\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$的一个元素〕．这个定理遗留下一个未论及的问题，那就是究竟怎样由$\hat{f}$来重新构造f．这一问题是很重要的，不仅由于其本身的理论需要，而且着眼于物理、化学以及工程技术等方面的应用亦是如此，因为诸如从光谱学、X射线分析等等问题所得到的数据无非是一些函数的Fourier系数，而这些函数却是人们需要确定的．

设法从$\hat{f}$回到f，其最简单易行的途径，是借助于f的Fourier级数，其部分和定义为

$$\text{(i)} \quad s_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\exp(ikx) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

为了把(i)式以及有待定义的其他一些表达式改写得简短些，我们在整个数直线R上根据周期性来定义f：

$$f(x+2k\pi)=f(x), \quad x\in[-\pi,\pi[, k\in Z.$$

〔对于$f\in \mathfrak{L}_1([-\pi, \pi])$来说，数值$f(\pi)$无关紧要．〕

于是得到

$$\text{(ii)} \quad s_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)dt \cdot \exp(ikx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\sum_{k=-n}^{n}\exp(ik(x-t))\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left[\sum_{k=-n}^{n}\exp(ikt)\right]dt.$$

〔读者应验证(ii)中末尾等式．〕利用初等方法可证

$$\text{(iii)} \quad \sum_{k=-n}^{n}\exp(ikt) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}, & \exp(it)\neq 1, \\ 2n+1, & \exp(it)=1. \end{cases}$$

(iii)式所定义的函数叫做Dirichlet核，记作$D_n(t)$．这样就可记

$$\text{(iv)} \quad s_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

就不少函数来说，序列$s_n f$实际上确是收敛于f的。① 但对另一些函

①关于这一事实的详尽讨论，乃至整个三角级数理论，最适宜的入门书无疑是Zygmund的经典著作《*Trigonometric Series*》〔两卷，Cambridge University Press，1959〕．

数却并非如此. 为了由 $\hat{f}$ 重新构造 f，我们仿效Fejér①的做法，来取部分和(i)的**算术平均**. 因此定义

$$\text{(v)}\quad \sigma_n f(x)=\frac{1}{n+1}[s_0 f(x)+s_1 f(x)+\cdots+s_n f(x)]$$
$$=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)\exp(ikx).$$

利用(iv)，记

$$\text{(vi)}\quad \sigma_n f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\left[\frac{1}{n+1}(D_0(t)+D_1(t)+\cdots+D_n(t))\right]dt.$$

(vi)中表达式[…]叫做Fejér**核**，记为$K_n(t)$；不难证明

(vii)

$$K_n(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right]^2, & \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\neq 0,\\[2ex] n+1, & \sin\left(\frac{1}{2}t\right)=0.\end{cases}$$

读者容易验证以下结论：

(viii) $K_n(-t)=K_n(t)$;

(ix) $0\leqslant K_n(t)\leqslant n+1$;

(x) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1$;

因为$\sin(\theta)>\frac{2}{\pi}\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$$\text{(xi)}\quad K_n(t)\leqslant\frac{\pi^2}{(n+1)t^2},\quad 0<|t|\leqslant\pi.$$

---

①L.Fejér（1880—1959）是一位卓越的匈牙利数学家。

由(xi)显然可推出

(xii) $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}K_n(t)dt=0$, $\delta\in]0,\pi[$.

我们的第一个反演定理是基本定理.

(18.28) **定理** 设 p 为实数, $1\leqslant p<\infty$, 并设 f 是 $\mathfrak{L}_p([-\pi,\pi])$ 中一个函数. 则

(i) $\lim_{n\to\infty}\|f-\sigma_n f\|_p=0$.

证 作一辅助函数 g, 当 $p>1$ 时, 它是 $\mathfrak{L}_{p'}([-\pi,\pi])$ 中适合 $\|g\|_{p'}\leqslant 1$ 的任意函数, 而当 $p=1$ 时, 则为恒等于1的函数. 然后可以写出

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sigma_n f(x))g(x)dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_n(t)dt\right)g(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\;|g(x)|K_n(t)dtdx.\text{[1]}\tag{1}$$

我们应用后文Fubini定理(21.13)(自然, 证明Fubini定理时并不依靠本定理)来改变(1)中末尾表达式的积分次序. 这个表达式成为

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\;|g(x)|\,dxK_n(t)dt.\tag{2}$$

现在对(2)中的内积分应用Hölder不等式(13.4.ii):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\;|g(x)|\,dx\leqslant\|f-f_{-t}\|_p\cdot\|g\|_{p'}$$

---

① §21要证明这一累次积分是完全确定的。

$$\leqslant \| f-f_{-t} \|_p. \qquad (3)$$

回到(1)便有

$$\left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sigma_n f(x))g(x)dx \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\|f-f_{-t}\|_p dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta}$$

$$\leqslant \sup\{\|f-f_{-t}\|_p : |t|\leqslant\delta\}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)dt$$

$$+2\|f\|_p\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta}K_n(t)dt. \qquad (4)$$

由(13.24)，只要δ充分小，(4)中的上确界就可任意小. 而由(18.27.xii)，不论δ如何小，当$n\to\infty$时最后一个表达式的极限为零. 这就是说，(4)中第一个表达式可任意小，只要n充分大就行. 由此，根据(15.1)，便推出

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\sigma_n f\|_p=0 \qquad (p>1).$$

当$p=1$时，利用(3)并进行重复论证，其中作些显而易见的改变就可以了. □①

通过(18.28)，旨在逐渐引向远为微妙的事实，即$\sigma_n f$不仅"依测度"（也就是依$\mathfrak{L}_p$范数）收敛到f，而且还**点态几乎处处**收敛到f.

(18.29) **定理**（Lebesgue） 设f是$\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$中一个函数. 则当$x$属于$f$的Lebesgue集时，就有

---

①当$p>1$时，甚至还得到$\|f-s_n f\|_p\to 0$. 证明这一事实要难得多了，这在Fourier级数理论所获得的引人入胜的精致结果中是具有代表性的. 参看Zygmund的上述引文，第七章，定理(6.4).

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n f(x)=f(x)$.

证 为简便起见，把$f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$记作$\varphi(x,t)$. 还规定

$$\Phi(x,t)=\int_0^t|\varphi(x,u)|\,du,$$

并把数值$\Phi(x,t)$记作a. 定理(18.5)表明,当$t\to 0$时,$\frac{1}{t}\Phi(x,t)\to 0$（$x$属于$f$的Lebesgue集！）任给$\varepsilon>0$，取$\alpha>0$，使当$|t|\leqslant\alpha$时，$\left|\frac{1}{t}\Phi(x,t)\right|<\varepsilon$. 然后利用(18.27.xi),选取整数$n_0>\frac{1}{\alpha}$，使

$$当\ n\geqslant n_0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\pi\ 时,\quad |K_n(t)|<\frac{\varepsilon}{a+1}. \tag{1}$$

注意到

$$当\ n\geqslant n_0\ 时,\quad n\,\Phi\left(x,\ \frac{1}{n}\right)<\varepsilon. \tag{2}$$

不难看出

$$\sigma_n f(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\varphi(x,t)K_n(t)\,dt,$$

由此

$$\begin{aligned}
&2\pi\,|\sigma_n f(x)-f(x)|\\
&\leqslant\int_0^\pi|\varphi(x,t)|\,K_n(t)\,dt\\
&=\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|\,K_n(t)\,dt+\int_{1/n}^{\alpha}|\varphi(x,t)|\,|K_n(t)|\,dt\\
&\quad+\int_\alpha^\pi|\varphi(x,t)|\,K_n(t)\,dt=S_1+S_2+S_3.
\end{aligned}\tag{3}$$

现在设$n\geqslant n_0$. 就S_3来说，(1)式蕴涵

$$S_3\leqslant\int_a^\pi|\varphi(x,t)|\ \frac{\varepsilon}{a+1}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{a+1}a<\varepsilon. \tag{4}$$

根据(18,27.ix)及(2)，得到

$$S_1\leqslant\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|(n+1)dt=(n+1)\Phi\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqslant 2n\Phi\left(\frac{1}{n}\right)<2\varepsilon. \tag{5}$$

利用(18.27.xi)，得到

$$S_2=\int_{1/n}^a|\varphi(x,t)|K_n(t)dt\leqslant\int_{1/n}^a|\varphi(x,t)|\frac{\pi^2}{n+1}\frac{1}{t^2}dt.$$

现在应用(18.19)，这时

$$g(t)=-2t^{-3},\quad G(t)=n^2+\int_{1/n}^t g(u)du=t^{-2}.$$

于是得出

$$\int_{1/n}^a|\varphi(x,t)|t^{-2}dt=\Phi(x,a)a^{-2}-\Phi\left(x,\ \frac{1}{n}\right)n^2$$

$$+2\int_{1/n}^a\Phi(x,t)t^{-3}dt.$$

由此

$$S_2\leqslant\frac{\pi^2}{n+1}\Phi(x,a)\ \frac{1}{a^2}+\frac{2\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^a\Phi(x,t)t^{-3}dt$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{n+1}\ \frac{\varepsilon}{a}+\frac{2\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^a\Phi(x,t)t^{-3}dt$$

$$<\pi^2\varepsilon+S_4.$$

最后有

$$S_4\leqslant\frac{2\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^a\varepsilon t^{-2}dt$$

$$=\frac{2\pi^2\varepsilon}{n+1}\left[n-\frac{1}{\alpha}\right]<\frac{2\pi^2\varepsilon}{n+1}\cdot n<2\pi^2\varepsilon,$$

从而

$$S_2<\pi^2\varepsilon+2\pi^2\varepsilon=3\pi^2\varepsilon. \qquad (6)$$

关系式(3)，(4)，(5)及(6)表明，当$n\geqslant n_0$时，

$$2\pi\left|\sigma_n f(x)-f(x)\right|<3\varepsilon+3\pi^2\varepsilon<33\varepsilon. \qquad \square$$

(18.30) 习题 设E是R的一个可测子集，它满足：就某个正实数δ来说，不等式$\lambda(E\cap I)\geqslant\delta\lambda(I)$对于任意区间$I\subset R$都成立. 试证$E'$是零测度集.〔利用(18.2).〕并说明对于某些不可测集上述断言不成立.〔利用(10.43).〕

(18.31) 习题 试求〔0,1〕上的一个实值绝对连续函数，它在区间上不是单调的.〔构造一个可测集$A\subset$〔0,1〕，使对于任意区间$I\subset$〔0,1〕，有$\lambda(A\cap I)>0$，$\lambda(A'\cap I)>0$. 这里可利用Cantor型集(6.62). 然后求$\xi_A-\xi_{A'}$的积分.〕

(18.32) 习题 设有正实数α，在〔0,1〕上定义函数f_α为

$$f_\alpha(0)=0,$$

$$f_\alpha(x)=x^\alpha\cos(x^{-1}) \qquad (0<x\leqslant 1).$$

〔规定x^α为$\exp(\alpha\log(x))$，其中$\log(x)$为实数.〕

(a) α为何值时，f_α具有有限变差？

(b) α为何值时，f_α绝对连续？

(c) α为何值时，f_α在〕0,1〔内具有有限导数，并在0具有有限右导数？

(18.33) 习题 (a) 设f是〔a,b〕上一个连续复值的有限变差函数，假定对于任意c，$a<c<b$，f在〔a,c〕上绝对连续. 试证f在〔a,b〕上也绝对连续.

(b) 试说明：对于某些在〔a,b〕上连续，并在〔a,b〕上具有无限变差的函数，(a)小题不成立.

(18.34) 习题 试证明以下断言.〔a,b〕上一个复值函数属于$\mathfrak{Lip}_1$(〔a, b〕)〔参看(17.31)中的定义〕的充要条件是：对于任

意$\varepsilon>0$，总有$\delta>0$，使对于$[a, b]$的子区间所成的任意有限①序列$([a_k, b_k])_{k=1}^n$，只要成立

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta,$$

就成立不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

就是说，f是"可交叠绝对连续的"(absolutely continuous with overlap permitted).

(18.35) 习题 设f是$\mathfrak{C}^r([a, b])$中一个非减函数，命$E=\{x: a\leqslant x<b, D^+f(x)=\infty\}$. 试证$f$绝对连续的充要条件是$\lambda(f(E))=0$. [利用(18.25)及(17.25).]

(18.36) 习题 设f是$[a, b]$上一个复值函数. 试证：f在$[a,b]$上绝对连续的充要条件是在$\mathfrak{Lip}_1([a, b])$中存在一个函数序列$(f_n)_{n=1}^{\infty}$，使$V_a^b(f-f_n)\to 0$. [如果f绝对连续，则命$f_n(x)=\int_a^x g_n(t)dt$，其中当$|f'(t)|\leqslant n$时，$g_n(t)=f'(t)$，其余情况下$g_n(t)=0$.]

(18.37) 习题 设g在$[a, b]$上绝对连续，$[\alpha, \beta]=\text{rng } g$，$f$在$[\alpha, \beta]$上绝对连续.

(a) 试证$f\circ g$在$[a,b]$上绝对连续的充要条件是$f\circ g$在$[a, b]$上是有限变差的. [利用(18.25).]

(b) 试举例说明$f\circ g$不一定在$[a, b]$上是绝对连续的.

(18.38) 习题 设f是定义在闭区间$[\alpha,\beta]$上的复值函数，试证$f\in\mathfrak{Lip}_1([\alpha,\beta])$的充要条件是对于任意闭区间$[a, b]$以及对于$\text{dom } g=[a, b]$和$\text{rng } g\subset[\alpha, \beta]$的任意绝对连续函数$g$，$f\circ g$在$[a, b]$上绝对连续.

(18.39) 习题 (a) 试求一个严格递增函数$f\in\mathfrak{C}^r([0,1])$，适合条件：存在$[0,1]$的一个子集$A$，使$\lambda(A)=0$，$\lambda(f(A))$

---

① "有限"二字是译者加的.——译者注

$=1$．〔利用(18.8)．〕

(b) 试证：$\mathfrak{C}^r([a,b])$中的函数f把每个可测集映满一个可测集的充要条件是f是N函数．〔提示．如果f是N函数．而A是可测集，就把A写成一个σ紧集加上一个零测度集．如果f不是N函数，可应用(10.28)．〕

(18.40) 习题 通过特殊选取(18.26)中的数t_n，可以发现一些函数具有很特别的性质．

(a) (Ruziewicz-Saks)．F如(18.26)所设．根据F的构造，很明显的是，对于任意n，区间族$\{[a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n]\}$是两两不相交的：命$\rho_n$是形成集$[a, b]\cap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k]\right)'$的$[a, b]$中那些开子区间的长度的极大值．显而易见$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$．既然$F$无处稠密，通过简单论证便知道$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$．在(18.26)$g$的定义中，命$t_k=\frac{1}{2}(b_k-a_k)+\rho_k$．则$g$在$F$的任何点都没有有限导数．这样，当$\lambda(F)>0$时，便有一个$N$函数，它在一个正测度集上不存在导数．〔提示．先证明如果g在$x\in F$可微，那么$g'(x)=0$，然后证明当$x=a_k$或$x=b_k$时，g的导数非零．对于其他点$x\in F$以及对于每个指标n，在区间$]a_1, b_1[, \cdots,]a_n, b_n[$中有一个区间$]a_{j(n)}, b_{j(n)}[$相距$x$为极小距离（显然这样的区间最多有两个）．一想便知$\lim\limits_{n\to\infty}j(n)=\infty$，而且

$$0<|x-c_{j(n)}|<\rho_{j(n)}+\frac{1}{2}(b_{j(n)}-a_{j(n)}),$$

又有$\lim\limits_{n\to\infty}c_{j(n)}=x$．由此得到

$$\frac{g(c_{j(n)})-g(x)}{|c_{j(n)}-x|}$$

$$>\frac{\frac{1}{2}(b_{j(n)}-a_{j(n)})+\rho_{j(n)}}{\frac{1}{2}(b_{j(n)}-a_{j(n)})+\rho_{j(n)}}=1,$$

这表明：或是$D^+g(x)\geqslant 1$，或是$D_-g(x)\leqslant -1$．这样一来，g在F上处处不可微．〕

(b) 假设$\lambda(F)>0$．试证$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty$．〔假如$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$有限，那么$g$就会具有有限变差，并几乎处处可微．〕

(c) 考虑Cantor三分点集$P\subset[0, 1]$，沿用(6.62)的记号．依次序

$I_{1,1}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, I_{3,4}, \cdots, I_{n,1}, \cdots, I_{n,2^{n-1}}, \cdots$.

写出它们的余区间．计算和数$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$，这里$\rho_k$象(a)那样定义．试问这一结果为什么与(b)并不矛盾？

(18.41) 习题 本题要稍微费点事，不过，(d)小题的结果是太优美了，我们希望读者都能认真完成它．本题中闭区间$[a, b]$是取定的．

(a) 设A是$[a,b]$的一个测度为0的子集．则在$[a,b]$上存在一个绝对连续的非减函数ψ，使对于任意$x\in A$，$\psi'(x)=\infty$．〔提示．设$(U_n)_{n=1}^{\infty}$是A的一个递减的开超集序列，并且$\lambda(U_n)<2^{-n}$．命$\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_{U_k}$，$\varphi=\lim_{n\to\infty}\varphi_n$．验证$\varphi\in\mathfrak{L}_1^+([a,b])$，$\int_a^b\varphi(t)dt<1$．命$\psi(x)=\int_a^x\varphi(t)dt$，$\psi_n(x)=\int_a^x\varphi_n(t)dt$．如果$x\in A$，$[x,x+h]\subset U_n$，那么

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\geqslant\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varphi_n(t)dt=n.$$

于是$\psi'_+(x)=\infty$；对$\psi'_-(x)$可作类似论证．〕

(b) (A.Zygmund) 对于$f\in\mathfrak{C}^r([a, b])$，规定

$$E=\{x: a\leqslant x<b,\ D^+f(x)\leqslant 0\}.$$

假设$f(E)$不包含区间．则f是非减的．〔提示．倘若$f(c)>f(d)$，其中$a\leqslant c<d\leqslant b$，则任取$y_0\in]f(d), f(c)[$，并规定$x_0$为$\sup\{x: c$

$\leqslant x < d$，$f(x) \geqslant y_0\}$. 证明$f(x_0) = y_0$，进而证明$D^+f(x_0) \leqslant 0$. 由此推知$f(E) \supset]f(d), f(c)[$，与题设矛盾. 〕

(c) 设有任意$f \in \mathfrak{C}^r([a, b])$. 假定$D_+f$在$[a, b[$上几乎处处非负. 同时假定集$B = \{x : x \in [a, b[, D_+f(x) = -\infty\}$是可数的. 则$f$是非减的. 〔提示. 命

$$A = \{x : x \in]a, b[, D^+f(x)\text{或}D_+f(x)\text{为负并有限}\}.$$

对于集A来说，ψ如(a)小题所设. 命

$$o(x) = \psi(x) + x, \quad g = f + \varepsilon\sigma,$$

这里ε为正数. 证明：当$x \in A$时，$D^+g(x) = \infty$，当$x \in A' \cap B'$时，$D^+g(x)$为正. 所以，集$E = \{x : D^+g(x) \leqslant 0\}$含在可数集$B$中，相应地$g(E)$可以不包含区间. 由(b)小题知道，$g$非减，既然$\varepsilon$是任意的，所以$f$也必定是非减的. 〕

(d) （主要结果）设f是$\mathfrak{C}([a, b])$中一个函数. 假定$f'(x)$除去在$]a, b[$中x的一个可数集上之外是存在的，并且有限，又假定$f' \in \mathfrak{L}_1([a, b])$. 则

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

特别说来，f是绝对连续的. 〔证明概要如下，考虑$f \in \mathfrak{C}^r([a, b])$，因为复值情况显然是这一情况的开拓. 对于每个正整数n，规定

$$g_n = \max\{f', -n\}, \quad f_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt.$$

应用(12.24)，证明

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

然后证对于几乎所有$x \in]a, b[$，

$$D_+(f_n - f)(x) = f_n'(x) - f'(x) = g_n(x) - f'(x) \geqslant 0.$$

由于

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \geqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(-n)dt = -n,$$

可以看出$D_+(f_n-f)(x)$大于$-\infty$，只在可数集——在其上f'不是有限的或者不存在——是例外．由(c)小题知道f_n-f非减．于是

$$f_n(x)-f(x)\geqslant f_n(a)-f(a)=-f(a),$$

从而

$$\int_a^x f'(t)dt=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geqslant f(x)-f(a).$$

用$-f$代替f，使末尾不等式变成反向不等式．〕

(18.42) **习题** 设在$[a, b]$上函数f定义为

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(x^{-2}), & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

试证：f在$]0,1[$的所有点都具有有限导数，并且$f'_+(0)=0$．但$f'\notin\mathfrak{L}_1([0,1])$．试问：$f$在$[0,1]$上是否绝对连续？$f$在$[0,1]$上是否是有限变差的？〔比较(18.41.d)．通过本例就产生了以下问题．如果f是$[a, b]$上的连续函数，并且f'在$]a, b[$内处处为有限，但f'并不属于$\mathfrak{L}_1([a, b])$，那么，究竟怎样由f'来重新构造f呢？这个问题可利用**Denjoy积分**来解决，而后者正是为此目的创造出来的．读者如想了解这一积分以及比Lebesgue积分更为一般的其他积分的细节，请参看Saks①．〕

(18.43) **习题** **凸函数的积分表示** 试证以下命题．设I是R中一个开区间，f是I上一个实值函数，f是凸函数的充要条件是在I上有一个非减函数φ及一点$c\in I$，使得

$$f(x)=\begin{cases}f(c)+\displaystyle\int_c^x\varphi(t)dt, & x\geqslant c,\\ f(c)-\displaystyle\int_x^c\varphi(t)dt, & x<c.\end{cases}$$

①S.Saks, *Theorg of the Integral*, 第二版, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwow, 1937.

〔充分性部分只要把(13.35)稍作开拓就行．至于必要性部分，可一并考虑(17.37.b)，(18.16)，以及(17.37.a)．〕

(18.44) **习题** 设f是定义在R上以2π为周期的复值函数，并且$f\in \mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$．假定$f$在$[a,b]$的各点都连续．试证$(\sigma_n f)_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$上一致收敛于$f$．〔利用一致连续性及Fejér核，参看(18.29)．〕

(18.45) **习题** 试利用一致有界性原理证明：存在一个定义在R上的以2π为周期的实值连续函数，其Fourier级数在0处发散〔命

$$\mathfrak{P}=\{f\in \mathfrak{C}^r([-\pi,\pi]):f(-\pi)=f(\pi)\}.$$

那么按照一致范数，$\mathfrak{P}$成为一个实Banach空间．对于每个$n\in N$，规定T_n：$\mathfrak{P}\to R$如下：

$$T_n f=s_n f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t)dt,$$

其中记号与(18.27)一样．证明对于每个n，$T_n\in\mathfrak{P}^*$，并且

$$\|T_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt.$$

然后证实$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=\infty$．最后，由(14.23)推知，存在$f\in\mathfrak{P}$，使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|s_n f(0)|=\infty.〕$$

(18.46) **习题** (a) 设χ是定义在R上的一个复值Lebesgue可测函数，它满足：

(i) χ有界；

(ii) χ不恒等于零；

(iii) $\chi(x+y)=\chi(x)+\chi(y)$，$x,y\in R$．

试证：存在一个实数α，使

$$\chi(x)=\exp(i\alpha x),\quad x\in R.$$

〔提示．利用(ii)和(iii)证明χ处处不为零，注意到(i)，在R上由

以下规则定义f：

$$f(x)=\int_0^x \chi(t)dt.$$

取$a\in R$，使$f(a)\neq 0$，证明

$$\chi(x)f(a)=f(x+a)-f(x),\quad x\in R.$$

并推证χ绝对连续．这些事实蕴涵f，从而χ，在R上具有连续导数．关于y微分(iii)式，然后命$y=0$，得$\chi'(x)=\chi(x)\chi'(0)$．再命$\chi'(0)=i\alpha$，其中$\alpha\in K$．验明

$$\frac{d}{dx}[\chi(x)\exp(-i\alpha x)]=0,\quad x\in R.$$

推证存在$\beta\in K$，使$\chi(x)=\beta\exp(i\alpha x)$，并证实$\chi(0)=1$，因此$\beta=1$．最后，利用(i)证明$\alpha\in R$．满足条件(i)—(iii)的函数$\chi$叫做$R$**的特征标**．〕

(b) 设ψ是R上一个实值Lebesgue可测函数，并满足上述条件(ii)和(iii)（自然指的是把χ换成了ψ）．试证$\psi(x)=\exp(\beta x)$，其中β为一实数．〔先证对于所有x，$\psi(x)>0$，这是初等事实．利用(10.43)证明ψ在0处连续，再利用(iii)证明ψ处处连续．然后象(a)小题那样完成本题．〕

(c) 设ω是R上一个复值Lebesgue可测函数，并满足条件(ii)和(iii)．试证：对于某个$\gamma\in K$，$\omega(x)=\exp(\gamma x)$．〔对$\omega|\omega|^{-1}$利用(a)小题，对$|\omega|$利用(b)小题．〕

(d) 试举例说明，如果去掉可测性假设，(a)和(b)两小题都不复成立．〔利用(5.46)所说的Q上R的Hamel基，并注意：象(a)小题中的χ，如果是间断的，就不可能是Lebesgue可测的；(b)小题中的ψ完全类似．〕

(18.47) Fourier级数的Abel可和性． 定理(18.29)有一个类似命题，它涉及另一个古典求和法．事实上，这一方法的例外集可能比Lebesgue集的余集要小得多．我们仅叙述其构造及证明的梗

概，而把许多细节留给读者作为练习．这里不加解释的所有记号都和(18.27)一样．

对于$f\in \mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])$，当$0<r<1$时，命

(i) $\alpha_r f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)\exp(ikx)$.

〔试与(18.27.v)中$\sigma_n f$的定义相对照.〕函数$\alpha_r f$叫做**级数$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\exp(ikx)$的第$r$ Abel和**．利用(i)中级数的一致收敛性，可以证明

(ii) $$\alpha_r f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\exp(ikt)\right]dt.$$

(ii)中表达式[…]叫做**Poisson核**，记作$P(r,t)$．简单计算表明

(iii) $$P(r,t)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t)}.$$

此外，还不难验证下列关系式：

(iv) $P(r,t)=P(r,-t)$,

(v) $$\frac{1-r}{1+r}\leqslant P(r,t)\leqslant\frac{1+r}{1-r},$$

(vi) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,t)dt=1,$$

(vii) $$P'(r,t)=-\frac{(1-r^2)2r\sin(t)}{(1+r^2-2r\cos(t))^2}$$

（关于t微分）．

设有函数$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x}f(t)dt$，并考虑满足以下条件的任意$x\in\,]-\pi,\pi[$：在$x$处对称导数

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=D_1F(x)$$

存在并且有限〔参看(17.36)〕．我们要证

(viii) $\lim_{r\uparrow 1}\alpha_r f(x)=D_1F(x)$.

鉴于(17.36.a)及(18.3)，这就是要证：在$[-\pi,\pi]$上a.e.成立$\lim_{r\uparrow 1}\alpha_r f(x)=f(x)$．〔应当指出，这个式子成立的点集，严格说来，或许包含f的Lebesgue集(18.5)〕．通过把f加上一个常数（不妨这样做），可以假定$F(\pi)=0$．把(18.19)应用于(ii)，我们看出

$$
\text{(ix)}\quad \begin{aligned}\alpha_r f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)P'(r,x-t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x-t)P'(r,t)dt\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+t)P'(r,t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(x+t)-F(x-t)}{2\sin t}M(r,t)\,dt,\end{aligned}
$$

其中核$M(r,t)$定义为

$$
\text{(x)}\quad M(r,t)=\frac{(1-r^2)2r\sin^2(t)}{(1+r^2-2r\cos(t))^2}=-\sin(t)P'(r,t).
$$

以下等式成立：

$$
P'(r,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}(ik)\exp(ikt).
$$

这是因为无穷级数关于t是一致收敛的．从而

$$
\begin{aligned}-\sin(t)P'(r,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}[&-k\exp(i(k+1)t)\\
&+k\exp(i(k-1)t)],\end{aligned}
$$

因此

$$
\text{(xi)}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M(r,t)dt=r.
$$

由于$1+r^2-2r\cos(t)=|1-r\exp(it)|^2$，由(x)不难看出，对于

任意$\delta\in]0,\pi[$，成立等式

$$\text{(xii)}\quad \lim_{r\uparrow 1}[\max\{M(r,\ t):\delta\leqslant|t|\leqslant\pi\}]=0.$$

最后，对于充分小的$|t|$，$\left|\dfrac{F(x+t)-F(x-t)}{2\sin t}-D_1F(x)\right|$为任意小．把这一结论与(xii)，(xi)及(ix)结合起来，便立即得出(viii)．

(18.48) **习题：关于N函数的补充知识** 设$[a,\ b]$是R中一个紧区间，f是定义在$]a,\ b[$内的一个实值函数．

(a) 假设$E\subset]a,\ b[$，$\beta\geqslant 0$，满足：对于任意$x\in E$，$D^+f(x)\leqslant\beta$，$D_-f(x)\geqslant-\beta$．试证：$\lambda(f(E))\leqslant\beta\lambda(E)$．〔提示．对于$\varepsilon>0$，$n\in N$，规定

$$E_n=\Big\{x\in E:\ 对于任意t\in]a,\ b[,$$

$$只要|t-x|<\frac{1}{n}，就有f(t)-f(x)<(\beta+\varepsilon)|t-x|\Big\}.$$

则

$$E_1\subset E_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E.$$

对于每个n，设区间族$\{I_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$是$E_n$的一个覆盖，其中诸区间的长度$<\dfrac{1}{n}$，而且$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_{n,k})<\lambda(E_n)+\varepsilon$．则对于任意$n\in N$，

$$\lambda(f(E_n))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(f(E_n\cap I_{n,k}))$$

$$<(\beta+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_{n,k})<(\beta+\varepsilon)(\lambda(E)+\varepsilon).$$

命n趋向∞，并利用(9.17)．〕

(b) 假设在$[a,b]$上除去可数多个点外，f具有有限导数．试证f是N函数．〔提示．考察集$A_n=\{x\in]a,\ b[:f'(x)存在,\ |f'(x)|\leqslant n\}$，并利用(a)小题．〕

(c) 假设B是$]a, b[$的Lebesgue可测子集，f在B的每一点都具有有限导数. 试证：f和f'在B上都是Lebesgue可测的，并且

$$\lambda(f(B))\leqslant\int_B |f'(x)|\,dx.$$

〔提示. 对于$\varepsilon>0$，$n\in N$，命$B_n=\{x\in B:(n-1)\varepsilon\leqslant|f'(x)|<n\varepsilon\}$. 应用(a)小题，得到

$$\lambda(f(B))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(f(B_n))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon\lambda(B_n)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{B_n}|f'(x)|\,dx+\varepsilon\lambda(B_n)\right]$$

$$=\int_B|f'(x)|\,dx+\varepsilon\lambda(B).\text{〕}$$

(d) 试利用(c)小题〔不用(18.25)〕证明：如果f是$[a, b]$上一个连续的具有有限变差的N函数，则f在$[a, b]$上绝对连续.〔提示. 对于$[c, d]\subset[a, b]$，命

$B=\{x\in]c, d[:f'(x)$存在并有限$\}$，

$A=[c, d]\cap B'$.

则

$$|f(d)-f(c)|\leqslant\lambda(f([c,d]))=\lambda(f(B))+\lambda(f(A))$$

$$=\lambda(f(B))\leqslant\int_c^d|f'(x)|\,dx.$$

忆及$f'\in\mathfrak{L}_1([a, b])$. 〕①

①注意，这里提供了定理(18.25)的简捷证法.

§ 19 复测度与Lebesgue-Radon-Nikodým定理

本节进一步探讨绝对连续函数和有限变差函数在测度论上所具有的意义. 我们先考察与 § 17和 § 18中某些经典概念相类似的抽象概念. 然后利用这些抽象结果获得关于经典情况的深一层的知识.

不定积分概念最为有用的推广看来是下面这样的推广. 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个任意测度空间, f是 $\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$ 中任何一个函数. 在$\mathscr{A}$上规定ν如下:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \qquad (E \in \mathscr{A}).$$

显然ν是复值的, $\nu(\varnothing) = 0$, ν还是可数加性的(12.32). 这样, ν便具有测度的两个基本属性. 既然ν可以取任何复值, 所以它未必是(10.3)意义下的测度. 这就导致定义并研究广义测度与复测度.

(19.1) **定义** 设 $(X, \mathscr{A})$ 是一个任意可测空间. 又设 ν 是定义在$\mathscr{A}$上的一个广义实值函数, 如果它满足下列条件:

(i) $\nu(\varnothing) = 0$,

以及对于$\mathscr{A}$的元素所成的所有两两不相交序列$(E_n)_{n=1}^{\infty}$, 成立

$$\text{(ii)} \qquad \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n),$$

则称ν是一个**广义测度**或**符号测度**. 而定义在$\mathscr{A}$上并满足(i)和(ii)的复值函数 ν 则称为一个**复测度**.

(19.2) **注意** 不言而喻, 在上述定义里, 出现在(19.1.ii)中的无穷级数必须总有意义, 而且必须收敛(或肯定发散)到等式左端的值. 尤其要注意, 在∞和$-\infty$两值中广义测度ν至多可以取一个值. 原因是, 倘若$\nu(E) = \infty$, 又$\nu(F) = -\infty$, 那么等式

$$\nu(E \cup F) = \nu(E \cap F') + \nu(E \cap F) + \nu(E' \cap F)$$

右端就没有意义了．这是因为在它的三项中，既有∞，又有$-\infty$的缘故〔见(6.1.b)〕．

我们第一个目标是要证明，正象一个有限变差函数可以表示成四个单调函数的线性组合一样，一个复测度也可以表示成四个测度的线性组合．显而易见，任意一个复测度ν都可以唯一地表示成以下形式：$\nu=\nu_1+i\nu_2$，其中ν_1，ν_2都是实值广义测度；就任意$E\in\mathscr{A}$来说，无非是设$\nu_1(E)=\mathrm{Re}\,\nu(E)$，$\nu_2(E)=\mathrm{Im}\,\nu(E)$．因之，我们先研究广义测度．

(19.3)　**定理**　设ν是可测空间$(X,\mathscr{A})$上一个广义测度．则有：

(i)　如果E，$F\in\mathscr{A}$，$|\nu(E)|<\infty$，$F\subset E$，那么$|\nu(F)|<\infty$；

(ii)　如果$A_n\in\mathscr{A}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，而且$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right);$$

(iii)　如果$A_n\in\mathscr{A}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，又$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，$|\nu(A_1)|<\infty$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

证　为了证明(i)，注意到

$$\nu(E)=\nu(F)+\nu(E\cap F').$$

为使$\nu(E)$成为有限的，其充要条件是上式右端两个被加数都有限．证明结论(ii)和(iii)时，分别逐字逐句重复(10.13)和(10.15)的证明就行了．注意，在(iii)的证明过程中，可利用(i)写成

$$\nu(A_1\cap A_n')=\nu(A_1)-\nu(A_n).\ \square$$

(19.4)　**定义**　设ν是可测空间$(X,\mathscr{A})$上一个广义测度．如果集$P\in\mathscr{A}$具有性质：对于任意$E\in\mathscr{A}$，都有$\nu(P\cap E)\geqslant 0$，就称P**关于ν是非负集**．如果集$M\in\mathscr{A}$具有性质：对于任意$E\in\mathscr{A}$，

都有$\nu(M\cap E)\leqslant 0$，就称M**关于**ν**是非正集**．应当指出，$\varnothing$关于ν既是非负集又是非正集．当P关于ν是非负集，而P'（即P在X中的余集）关于ν是非正集时，就称有序偶(P,P')是X**关于**ν**的Hahn分解**．

(19.5) **引理** 设ν是$(X,\mathscr{A})$上一个广义测度，假定E是$\mathscr{A}$中一个集，$0<\nu(E)<\infty$．则存在一个集$S\in\mathscr{A}$，满足：$S\subset E$，S关于ν是非负集，$\nu(S)>0$．

证 由(19.3.i)可知，对于任意$F\in\mathscr{A}$，只要$F\subset E$，便有$|\nu(F)|<\infty$．假定所要求的这种集S不存在．特别，E关于ν就不是非负集．设n_1为适合以下条件的最小正整数：存在一个集$F_1\in\mathscr{A}$，满足$F_1\subset E$，$\nu(F_1)<-\frac{1}{n_1}$．则有

$$\nu(E\cap F_1')=\nu(E)-\nu(F_1)>\nu(E)>0,$$

从而根据我们的假定，$E\cap F_1'$关于ν便不是非负集．象前面一样，设n_2为适合以下条件的最小正整数：存在一个集$F_2\in\mathscr{A}$，满足$F_2\subset E\cap F_1'$，$\nu(F_2)<-\frac{1}{n_2}$．则

$$\nu(E\cap(F_1\cup F_2)')=\nu(E)-\nu(F_1)-\nu(F_2)>0,$$

从而$E\cap(F_1\cup F_2)'$关于ν便不是非负集．继续这一过程，便得到一个极小正整数序列$(n_k)_{k=1}^{\infty}$以及相应的$\mathscr{A}$中一个两两不相交集序列$(F_k)_{k=1}^{\infty}$，满足对于每个$k\in N$，$\nu(F_k)<-\frac{1}{n_k}$．命$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$．则有

$$\infty>\nu(E\cap F')=\nu(E)-\nu(F)=\nu(E)-\sum_{k=1}^{\infty}\nu(F_k)$$
$$>\nu(E)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}>0.$$

于是$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}<\infty$，而$E\cap F'$关于$\nu$不是非负集．取$A\in\mathscr{A}$，使$A\subset E\cap F'$，$\nu(A)<0$．然后取$k$如此之大，使$\nu(A)<-\frac{1}{n_k}$，$n_k>2$．这时

$$A\cup F_k\subset E\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}F_j\right)',$$

$$\nu(A\cup F_k)=\nu(A)+\nu(F_k)<-\frac{1}{n_k}-\frac{1}{n_k}<-\frac{1}{n_k-1}.$$

这与n_k的极小性相矛盾．可见所要求的这种集S必存在． □

(19.6) **Hahn分解定理** 设ν是可测空间$(X, \mathscr{A})$上一个广义测度．则存在X关于ν的一个Hahn分解．此外，这个分解在这样的意义下是唯一的，即如果(P_1, P_1')和(P_2, P_2')是任意两个这样的分解，那么对于每个$E\in\mathscr{A}$，都有

$$\nu(P_1\cap E)=\nu(P_2\cap E),\quad \nu(P_1'\cap E)=\nu(P_2'\cap E).$$

证 既然ν在∞和$-\infty$两值中至多取一个值，因此可以假定对于任意$E\in\mathscr{A}$，$\nu(E)<\infty$．不然的话，就考虑广义测度$-\nu$，无非是正、负互换一下．

命

$$\alpha=\sup\{\nu(A): A关于\nu是非负集\}.$$

取关于ν的一个非负集序列$(A_k)_{k=1}^{\infty}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}\nu(A_k)=\alpha$．规定

$$P=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad P_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\quad(n=1,2,\cdots).$$

通过施归纳于n，可知每个P_n关于ν是非负集，$\nu(P_n)\geqslant\nu(A_n)$．应用(19.3.ii)，对于任意$E\in\mathscr{A}$，就有

$$\nu(P\cap E)=\lim_{n\to\infty}\nu(P_n\cap E)\geqslant 0.$$

这样，P关于ν便是非负集，而且$\nu(P)=\alpha$．(注意$\alpha<\infty$．)

其次证明P'关于ν是非正集．设若不然，就可取一个集$E\in\mathscr{A}$，使$E\subset P'$，$\nu(E)>0$．既然ν不取值∞，便有$\nu(E)<\infty$．应用(19.5)可求出一个集$S\subset E$，满足$S\in\mathscr{A}$，S关于ν是非负集，$\nu(S)>0$．那么$S\cup P$关于ν是非负集，而

$$\nu(S\cup P)=\nu(S)+\alpha>\alpha;$$

这违背α的定义．因之P'关于ν是非正集．

为了证明定理的唯一性断言，假定（P_1，P_1'）和（P_2，P_2'）是X关于ν的两个Hahn分解，并取$E\in\mathscr{A}$．由于$E\cap P_1\cap P_2'$既是P_1的子集，又是P_2'的子集，所以得出

$$\nu(E\cap P_1\cap P_2')=0;$$

同样得出

$$\nu(E\cap P_1'\cap P_2)=0.$$

于是得到

$$\nu(E\cap P_1)=\nu(E\cap(P_1\cup P_2))=\nu(E\cap P_2),$$
$$\nu(E\cap P_1')=\nu(E\cap(P_1'\cup P_2'))=\nu(E\cap P_2'). \ \square$$

(19.7) **定义** 设ν是（X，$\mathscr{A}$）上一个广义测度，又设（P，P'）是X关于ν的一个Hahn分解．在$\mathscr{A}$上对于任意$E\in\mathscr{A}$定义ν^+，ν^-，$|\nu|$如下：

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap P);$$
$$\nu^-(E)=-\nu(E\cap P');$$
$$|\nu|(E)=\nu^+(E)+\nu^-(E).$$

集函数ν^+，ν^-，$|\nu|$分别称为ν**的正变差**，ν**的负变差**，ν**的全变差**．

(19.8) **定理** 记号如(19.7)所设．则集函数ν^+，ν^-，$|\nu|$是（X，$\mathscr{A}$）上完全确定的三个测度，而且成立

(i) $\nu(E)=\nu^+(E)-\nu^-(E)$ $(E\in\mathscr{A})$．①

证明很简单，从略．

(19.9) **例** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，f是X上一个$\mathscr{A}$可测的、广义实值函数，并且$\int_E f d\mu$有定义．在$\mathscr{A}$上规定ν为

$$\nu(E)=\int_E f d\mu.$$

①类似于(17.16)，表达式$\nu=\nu^+-\nu^-$通常称为ν的**Jordan分解**．

那么，对于任意$E\in\mathscr{A}$便有

$$\nu^{+}(E)=\int_{E}f^{+}d\mu,$$

$$\nu^{-}(E)=\int_{E}f^{-}d\mu,$$

$$|\nu|(E)=\int_{E}|f|\,d\mu.$$

命$P=\{x\in X,\ f(x)>0\}$，那么$(P,\ P')$就是X关于ν的一个Hahn分解．值得注意的是，如果ν^{+}，ν^{-}都是非退化的，那么对于某些集$E\in\mathscr{A}$，肯定出现非等式

$$|\nu|(E)\neq|\nu(E)|.$$

(19.10) **定理** 设ν是$(X,\ \mathscr{A})$上一个广义测度．则对于任意$E\in\mathscr{A}$，都有

(i) $$|\nu|(E)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|:\{E_1,\cdots,E_n\}\text{是}E\text{的一个可测剖分}\right\}$$

证 设E是$\mathscr{A}$中任意固定的集，并用β表示(i)式右端．那么对于E的每个可测剖分$\{E_1,\ \cdots,\ E_n\}$，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|&=\sum_{k=1}^{n}|\nu^{+}(E_k)-\nu^{-}(E_k)|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\nu^{+}(E_k)+\nu^{-}(E_k))\\&=\sum_{k=1}^{n}|\nu|(E_k)=|\nu|(E);\end{aligned}$$

由此$\beta\leqslant|\nu|(E)$．试考察剖分$\{E\cap P,\ E\cap P'\}$，其中$(P,\ P')$是X关于ν的一个Hahn分解．我们得到

$$\beta\geqslant|\nu(E\cap P)|+|\nu(E\cap P')|=\nu^{+}(E)+\nu^{-}(E)=|\nu|(E).\quad\square$$

鉴于(19.10)，我们提出以下定义并不会招致矛盾.

(19.11) **定义** 设ν是$(X, \mathscr{A})$上一个复测度. 所谓ν**的全变差**，指的是$\mathscr{A}$上由公式(19.10.i)所定义的函数$|\nu|$. ①

(19.12) **定理** 记号如(19.11)所设. 则集函数$|\nu|$是$(X, \mathscr{A})$上一个测度.

证 $|\nu|(\varnothing)=0$是显然的事实. 这样只须证明$|\nu|$是可数加性的. 设$(A_j)_{j=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中一个两两不相交的集序列，命$A=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. 设$\beta$是适合$\beta<|\nu|(A)$的任意实数. 取$A$的一个可测剖分$\{E_1, \cdots, E_n\}$，使$\beta<\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|$. 于是得到

$$\begin{aligned}\beta&<\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_k\cap A_j)\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(E_k\cap A_j)|\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k\cap A_j)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\nu|(A_j).\end{aligned}$$

既然β是任意的，可见

$$|\nu|(A)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\nu|(A_j). \qquad (1)$$

当$|\nu|(A)=0$时〔我们在(19.13.v)中会看到，不可能出现这种情况〕，反向不等式就分明成立了. 因此可以假定$|\nu|(A)<\infty$. 对于任意$j_0\in N$及A_{j_0}的任意可测剖分$\{B_1, \cdots, B_m\}$，得到

①应当注意本定义与(17.14)中$V_a^b f$的定义之间的类似之处.

$$\sum_{k=1}^{m}|\nu(B_k)|\leqslant\left|\nu\left(\bigcup_{j\neq j_0}A_j\right)\right|+\sum_{k=1}^{m}|\nu(B_k)|\leqslant|\nu|(A),$$

从而对于所有$j\in N$，$|\nu|(A_j)<\infty$. 任给$\varepsilon>0$. 对于每个j，取A_j的一个可测剖分$\{E_{j,1},\cdots,E_{j,n_j}\}$，使

$$\sum_{k=1}^{n_j}|\nu(E_{j,k})|>|\nu|(A_j)-\frac{\varepsilon}{2^j}.$$

于是对于所有$m\in N$，便得出

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}|\nu|(A_j)&<\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}+\sum_{k=1}^{n_j}|\nu(E_{j,k})|\right)\\&<\varepsilon+\left|\nu\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty}A_j\right)\right|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j}|\nu(E_{j,k})|\\&\leqslant\varepsilon+|\nu|(A).\end{aligned}$$

既然ε是任意的，那么对于每个$m\in N$便成立

$$\sum_{j=1}^{m}|\nu|(A_j)\leqslant|\nu|(A),$$

从而

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\nu|(A_j)\leqslant|\nu|(A). \qquad (2)$$

结合(1)和(2)，就知道$|\nu|$是可数加性的. □

(19.13) **定理** 设ν是$(X,\mathscr{A})$上一个复测度，ν_1和ν_2分别是ν的实部和虚部. 则：

(i) ν_1和ν_2都是$(X,\mathscr{A})$上的广义测度；

对于任意$E\in\mathscr{A}$，成立

(ii) $\nu(E)=\nu_1^+(E)-\nu_1^-(E)+i\nu_2^+(E)-i\nu_2^-(E)$；①

(iii) $|\nu|(E)\leqslant\nu_1^+(E)+\nu_1^-(E)+\nu_2^+(E)+\nu_2^-(E)$；

---

①仍类似于(17.16)，我们称这一表达式为ν的**Jordan分解**.

(iv)　$\sup\{|\nu(A)|: A\in\mathscr{A},\ A\subset E\}\leqslant|\nu|(E)$

$\leqslant 4\cdot\sup\{|\nu(A)|: A\in\mathscr{A},\ A\subset E\}$;

(v)　$|\nu(E)|\leqslant|\nu|(X)<\infty$;

(vi)　$\nu_j^+(E)\leqslant|\nu|(E)$, $\nu_j^-(E)\leqslant|\nu|(E)$　$(j=1,2)$.

于是ν_1^+, ν_1^-, ν_2^+, ν_2^-, 以及$|\nu|$都是(X, $\mathscr{A}$)上的有限测度.

证　(i)和(ii)两结论显然成立. 设(P_1, P_1')和(P_2,P_2')分别是X关于ν_1和ν_2的Hahn分解，对于E的任意可测剖分$\{E_1, \cdots, E_n\}$，得到

$$\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\nu_1^+(E_k)+\nu_1^-(E_k)+\nu_2^+(E_k)+\nu_2^-(E_k))$$

$$=\nu_1^+(E)+\nu_1^-(E)+\nu_2^+(E)+\nu_2^-(E).$$

就所有$\{E_1, \cdots, E_n\}$取上确界，便得出(iii).

其次命$\alpha=\sup\{|\nu(A)|: A\in\mathscr{A},\ A\subset E\}$. 应用(iii)和(19.7)，便有

$$|\nu|(E)\leqslant\nu_1(E\cap P_1)+|\nu_1(E\cap P_1')|+\nu_2(E\cap P_2)+|\nu_2(E\cap P_2')|$$

$$\leqslant|\nu(E\cap P_1)|+|\nu(E\cap P_1')|+|\nu(E\cap P_2)|+|\nu(E\cap P_2')|$$

$$\leqslant 4\alpha.$$

当$A\in\mathscr{A}$, $A\subset E$时，$\{A,\ E\cap A'\}$就是E的一个可测剖分，从而

$$|\nu(A)|\leqslant|\nu(A)|+|\nu(E\cap A')|\leqslant|\nu|(E).$$

就所有这样的A取上确界，便得到

$$\alpha\leqslant|\nu|(E). \qquad (2)$$

结合(1)和(2)，则得出(iv).

由(iv)及(iii)可推出结论(v)(记住：ν是复值的，而∞并非复数).

最后，由(iv)可推得(vi)．这是因为

$$\nu_j^+(E)=\nu_j(E\cap P_j)\leqslant|\nu|(E),$$

$$\nu_j^-(E)=|\nu_j(E\cap P_j')|\leqslant|\nu|(E). \quad \square$$

等式(19.13.ii)启示我们提出以下定义，而在后面的论证和构造中也要用到这一定义．

(19.14) **定义** 设$(X,\mathscr{A})$是一个可测空间，μ_1和μ_2是$(X,\mathscr{A})$上两个复测度，α_1和α_2是两个复数，在$\mathscr{A}$上规定集函数$\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2$如下：对于任意$E\in\mathscr{A}$，

$$(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)(E)=\alpha_1\mu_1(E)+\alpha_2\mu_2(E).$$

如果μ是$(X,\mathscr{A})$上一个广义测度，$\alpha\in R$，那么$\alpha\mu$是$\mathscr{A}$上的集函数，并满足

$$(\alpha\mu)(E)=\alpha(\mu(E)).$$

如果μ和ν都是$(X,\mathscr{A})$上的广义测度，而且对于$E\in\mathscr{A}$，不同时成立等式

$$\mu(E)=\infty,\qquad \nu(E)=-\infty, \tag{1}$$

或不同时成立

$$\mu(E)=-\infty,\qquad \nu(E)=\infty, \tag{2}$$

就规定$\mu+\nu$为

$$(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)\quad (E\in\mathscr{A}).$$

这时称$\mu+\nu$**有定义**．如果对于某个$E\in\mathscr{A}$，(1)和(2)中任一组联立等式成立，那么$\mu+\nu$没有定义．

(19.15) **注意** (a) 记号如(19.14)所设，则$\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2$是$(X,\mathscr{A})$上的复测度，$\alpha\mu$是广义测度，而$\mu+\nu$当有定义时也是广义测度，这差不多都是显然的事实．

(b) 如果μ_1，μ_2都是$(X,\mathscr{A})$上的测度，α_1，α_2都属于$[0,\infty[$，则$\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2$也是$(X,\mathscr{A})$上的测度．

(c) 为了记法方便起见，往往把复测度ν的Jordan分解(19.13.ii)写成

$$\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3+\alpha_4\nu_4.$$

我们现在来考察关于复测度的积分，先证明一个虽颇为明显但很有用的事实.

(19.16) **定理** 设ν是$(X,\mathscr{A})$上一个复测度，$\nu=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\nu_k$为其Jordan分解. 则在$X$上$|\nu|$-a.e.有定义的一个复值函数$f$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},|\nu|)$的充要条件是：对于每个$k\in\{1,2,3,4\}$，$f$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\nu_k)$.

证 当f是$\mathscr{A}$可测、非负简单函数（比如说$f=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\xi_{E_j}$）时，定理成立. 这是因为，如(19.13.iii)所示，

$$\int_X fd|\nu|=\sum_{j=1}^{m}\beta_j|\nu|(E_j)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{k=1}^{4}\nu_k(E_j)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\int_X fd\nu_k. \qquad (1)$$

此外，根据(19.13.vi)，

$$\int_X fd\nu_k=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\nu_k(E_j)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}\beta_j|\nu|(E_j)=\int_X fd|\nu|. \qquad (2)$$

至于一般情况，可设$(s_n)_{n=1}^{\infty}$是a.e.收敛于$|f|$的$\mathscr{A}$可测、非负简单函数所成的一个非减序列.〔注意，$|\nu|(A)=0$的充要条件是：对于任意k，$\nu_k(A)=0$.〕象往常一样，把B.Levi定理(12.22)应用于(1)，(2)，这里f换成s_n，对于任意k得到

$$\int_X|f|d|\nu|\leqslant\sum_{k=1}^{4}\int_X|f|d\nu_k,$$

$$\int_X |f|\, d\nu_k \leqslant \int_X |f|\, d|\nu|. \quad \square$$

现在可以引进以下定义.

(19.17) **定义** 记号如(19.16)所设.对于$f\in \mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},|\nu|)$,规定

$$\int_X f d\nu = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \int_X f d\nu_k.$$

(19.18) **定理** 设ν是$(X, \mathscr{A})$上一个复测度. 如果$f, g\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, |\nu|)$, $\alpha\in K$, 则

(i) $\int_X (f+g) d\nu = \int_X f d\nu + \int_X g d\nu$,

(ii) $\int_X \alpha f d\nu = \alpha \int_X f d\nu$.

这样,$\int_X \cdots d\nu$便是$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},|\nu|)$上一个线性泛函.

通过简单计算可以证明本定理,证明留给读者.

下面定义测度的绝对连续性.(19.53)要证明,R上关于λ绝对连续的Borel测度,无非是由绝对连续的非减函数所导出的Lebesgue-Stieltjes测度.

(19.19) **定义** 设$(X, \mathscr{A})$是一个可测空间,μ和ν是$(X, \mathscr{A})$上的广义测度或复测度. 如果对于任意$E\in\mathscr{A}$,只要$|\mu|(E)=0$,就有$\nu(E)=0$,则称ν**关于**μ**是绝对连续的**. 记作$\nu\ll\mu$.

(19.20) **定理** 设μ, ν是$(X,\mathscr{A})$上的复测度或广义测度,$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\nu_k$是$\nu$的Jordan分解. 则以下三语句是等价的:

(i) $\nu\ll\mu$;

(ii) $\nu_k\ll\mu$, $k\in\{1, 2, 3, 4\}$;

(iii) $|\nu|\ll\mu$.

证 只考察复情况，假定$E\in\mathscr{A}$，$|\mu|(E)=0$．设(i)成立．由于对E的任意子集F，只要$F\in\mathscr{A}$，就有$|\mu|(F)=0$，因此对这样的F，也有$\nu(F)=0$．从(19.10.i)可以看出$|\nu|(E)=0$．这样(i)蕴涵(iii)．

当(iii)成立时，$|\nu|(E)=0$，从而(19.13.vi)表明，对于所有k成立$\nu_k(E)=0$，即(iii)蕴涵(ii)．

最后，(ii)蕴涵(i)则是显然的，因为$\nu=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\nu_k$．□

正如本节绪言所指出的，如果$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$，那么在$\mathscr{A}$上由

$$\nu(A)=\int_A f d\mu \qquad (1)$$

所规定的函数ν乃是$(X,\mathscr{A})$上的一个复测度．显而易见，$\nu\ll\mu$．Lebesgue-Radon-Nikodým定理断言：当$\nu\ll\mu$，并满足某些别的条件时，ν便具有(1)式的形状．我们将给出这一定理的若干具体化表述．首先证明一个细节．

(19.21) **引理** 设μ，ν是$(X,\mathscr{A})$上两个测度，而且对于任意$E\in\mathscr{A}$，$\nu(E)\leqslant\mu(E)$．如果$p>0$，$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$，则可推出$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\nu)$，并且

$$\int_X |f|^p d\nu\leqslant\int_X |f|^p d\mu$$

证 当$f\in\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$时，必存在一个$\mathscr{A}$可测、非负、递增地趋向于$|f|^p$的简单函数序列$(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\sigma_n d\mu=\int_X|f|^p d\mu<\infty$$

显然

$$\int_X\sigma_n d\nu\leqslant\int_X\sigma_n d\mu,$$

由此可见

$$\int_X |f|^p d\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X \sigma_n d\nu\leqslant\int_X |f|^p d\mu. \quad \square$$

下面的引理乍一看似乎颇为奇特，其实它乃是Lebesgue-Radon-Nikodým定理证明中很关键的一步.

(19.22) **引理** 设μ，ν是$(X, \mathscr{A})$上两个有限测度，而且$\nu\ll\mu$. 则X上有一个$\mathscr{A}$可测函数g，它满足$g(X)\subset[0, 1[$，并且对于任意$f\in\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，成立

(i) $$\int_X f(1-g)d\nu=\int_X fg d\mu.$$

证 对于$f\in\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，规定

$$L(f)=\int_X f d\nu. \tag{1}$$

既然μ和ν，随之$\mu+\nu$，都是有限的，f便属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu+\nu)$；从而根据(10.21)，$f$也属于$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu)$，这样$L$在$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu+\nu)$上有定义并有限. 显而易见，对于任意$\alpha$，$\beta\in K$及$f$，$g\in\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，有

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g).$$

不等式(13.4, iii)则表明

$$|L(f)|=\left|\int_X f d\nu\right|\leqslant\left(\int_X |f|^2 d\nu\right)^{\frac{1}{2}}(\nu(X))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_X |f|^2 d(\mu+\nu)\right)^{\frac{1}{2}}(\nu(X))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|f\|_2(\nu(X))^{\frac{1}{2}}.$$

[这里$\|f\|_2$表示$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$中的范数.] 因此，$L$是$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$上一个有界线性泛函，从而根据(15.11)，存在一个函数$h\in\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，使

$$L(f)=\int_X f\ \bar{h}\, d(\mu+\nu).\text{①} \qquad (2)$$

h实际上（$\mu+\nu$）-a. e. 为实值的和非负的，下面就来证明这一点. 对于任意$f\in\mathfrak{L}_2$（X，$\mathscr{A}$，$\mu+\nu$），可写出

$$L(f)=\int_X f\ \mathrm{Re}h\ d(\mu+\nu)-i\int_X f\ \mathrm{Im}h\ d(\mu+\nu).$$

假定$\mathrm{Im}h$并不（$\mu+\nu$）-a. e. 等于零；比如说集

$$A=\{x:\mathrm{Im}h(x)>0\}$$

满足（$\mu+\nu$）$(A)>0$. 那么

$$L(\xi_A)=\int_A \mathrm{Re}hd(\mu+\nu)-i\int_A \mathrm{Im}hd(\mu+\nu)$$

不等于实数. 根据（1），L在实值函数集上显然是实值的. 这就引出了矛盾. 同样，设有一个集B，（$\mu+\nu$）（B）>0，如果h在B上为负的，就有L（ξ_B）<0，这又与L的定义相矛盾. 所以h必定（$\mu+\nu$）-a.e.为实值的和非负的；不妨假定h处处如此. L的定义（1）和（2）式表明，对于任意$f\in\mathfrak{L}_2$（X，$\mathscr{A}$，$\mu+\nu$），都有

$$\int_X f(1-h)d\nu=\int_X fhd\mu. \qquad (3)$$

①为了得出（2）式，只需要定理（15.11）$p=2$的情况，但是定理（15.11）当然远不止$p=2$时才成立. 在涉及$\mathfrak{L}_p$空间的不少问题里，往往都属$p=2$的情况，这种情况最最简单，而且，事实上，可以用抽象Hilbert空间语言来表述（15.11）当$p=2$时的证明，这一证明概述于（16.56）. 利用（16.56）则可证明（19.22），从而也可证明（19.24）及（19.27），而无须依靠（15.11）、由此看来就任意$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$而言——只要（$X$,$\mathscr{A}$,$\mu$）满足（19.27）的假设，证明(15.11)应该是可能的. 我们所以提供（15.11）所给出的证明，部分原因在于它乃是非常一般的方法，还由于它既隐含构造性，又表现了经典文风. 在§20我们构造$\mathfrak{L}_1$（X，$\mathscr{A}$，μ）的共轭空间，这一过程显然需要（19.27）. 然后就能由（19.24）证明（15.11）的一般情况.（参看序言——译者注）

其次，命

$$E=\{x\in X:h(x)\geqslant 1\}.$$

由于ξ_E属于$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，所以就$f=\xi_E$可以应用(3)式，于是得到

$$0\leqslant\mu(E)=\int_X\xi_E d\mu\leqslant\int_X\xi_E h d\mu=\int_X\xi_E(1-h)d\nu\leqslant 0.$$

因此有$\mu(E)=0$，从而也有$\nu(E)=0$.(题设$\nu\ll\mu$仅用于此处.)命$g=h\xi_{E'}$.那么关于μ和ν二者几乎处处有$g(x)\subset[0, 1[$及$g=h$. 这样(3)式表明，对于任意$f\in\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$，

$$\int_X f(1-g)d\nu=\int_X fgd\mu.\square$$

(19.23) **定理** (Lebesgue-Radon-Nikodým). 设$(X, \mathscr{A})$是一个可测空间，μ, ν是$(X, \mathscr{A})$上两个有限测度，而且$\nu\ll\mu$. 则存在一个函数$f_0\in\mathfrak{L}_1^+(X, \mathscr{A}, \mu)$，使对于$X$上任意的非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数$f$，成立

(i) $$\int_X fd\nu=\int_X ff_0 d\mu.$$

又设$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu)$，则函数$ff_0$在$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$中，并且(i)式成立. 特别说来，对于任意$A\in\mathscr{A}$，都有

(ii) $$\nu(A)=\int_A f_0 d\mu.$$

证 首先考虑任意的有界、非负、$\mathscr{A}$可测函数f. 设g是(19.22.i)中的函数. 既然g，f都有界，$\mu+\nu$又是有限测度，那么对于任意正整数n，函数$(1+g+\cdots+g^{n-1})f$便属于$\mathfrak{L}_2(X, \mathscr{A}, \mu+\nu)$；因此根据(19.22)，就成立等式

$$\int_X(1+g+g^2+\cdots+g^{n-1})f(1-g)d\nu$$

$$= \int_X (1+g+g^2+\cdots+g^{n-1}) fg d\mu.$$

既然对于所有$x\in X$，$0\leqslant g(x)<1$，这一等式便可写成

$$\int_X (1-g^n) f d\nu = \int_X \frac{g}{1-g}(1-g^n) f d\mu. \qquad (1)$$

当n趋向无穷大时，函数$(1-g^n)f$所成的序列递增地趋向f. 利用(12.22)，(1)式两边取极限，得到

$$\int_X f d\nu = \int_X \frac{g}{1-g} f d\mu. \qquad (2)$$

(2)式中命$f=1$，便知道函数$\frac{g}{1-g}$在$\mathfrak{L}_1^+(X, \mathscr{A}, \mu)$中；规定$f_0$为函数$\frac{g}{1-g}$.

当f是无界、非负，$\mathscr{A}$可测函数时，可记$f=\lim\limits_{m\to\infty} f_m$，这里$f_m=\min\{f, m\}$，把(12.22)应用于(2)式，便得出(i).

至此，定理的其余断言分明是正确的. □

(19.24) **Lebesgue-Radon-Nikodým 定理** 设μ，ν是$(X, \mathscr{A})$上两个σ有限测度，而且$\nu\ll\mu$. 则X上存在一个非负、有限值、$\mathscr{A}$可测函数f_0，使对于X上任意的非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数f，成立

(i) $$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d\mu.$$

又设$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu)$，则函数$ff_0$在$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$中，并且(i)式成立. 特别说来，对于任意$A\in\mathscr{A}$，都有

(ii) $$\nu(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

此外，f_0在下述意义下还是唯一的：如果g_0是任意的非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数，并且(ii)式成立，则μ-a.e.成立$g_0=f_0$.

证 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$都是两两不相交的$\mathscr{A}$可测集所成的集族，每个集族都有并X，并且对于任意n，$\mu(A_n)<\infty$，$\nu(B_n)<\infty$. 集族

$$\mathscr{C}=\{A_m\cap B_n\}_{m,\ n=1}^{\infty}$$

也是两两不相交的，而且它的并也是X. 同时，这个族的各个元都具有有限ν测度和有限μ测度. 设$(E_n)_{n=1}^{\infty}$是由$\mathscr{C}$的元任意排列而成的一个集序列. 对于每个n，在$\mathscr{A}$上规定μ_n和ν_n为

$$\mu_n(A)=\mu(A\cap E_n),\quad \nu_n(A)=\nu(A\cap E_n).$$

那么，对于每个n，μ_n，ν_n都是$(X, \mathscr{A})$上的有限测度，而且$\nu_n\ll\mu_n$；从而适合(19.23)的条件. 于是，对于每个n，都可以得到X上一个非负、有限值、$\mathscr{A}$可测函数f_n，使对于X上任意的非负$\mathscr{A}$可测函数f，成立

$$\int_X f d\nu_n=\int_X f f_n d\mu_n. \tag{1}$$

设f_0是X上这样的函数，即对于任意$n\in N$，在E_n上f_0等于f_n. 不难看出，f_0是非负的、$\mathscr{A}$可测的、有限值的. 同时，根据(12.21)，如果f是X上一个非负、$\mathscr{A}$可测函数，那么

$$\int_X f d\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X \xi_{E_n} f d\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f d\nu_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f f_n d\mu_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X \xi_{E_n} f f_0 d\mu=\int_X f f_0 d\mu.$$

这就证明了，对于非负、$\mathscr{A}$可测的f，(i)式成立；由此可立即推知，对于$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu)$，(i)式成立，并成立(ii)式.

为了证明f_0的唯一性，设g_0是$\mathscr{A}$可测的，并满足(ii)式. 假定存在一个集$E\in\mathscr{A}$，适合$\mu(E)>0$，而对于任意$x\in E$，$f_0(x)>g_0(x)$. 对于某个n，有$\mu(E\cap E_n)>0$；设$A=E\cap E_n$，便有$\nu(A)<\infty$，$0<\mu(A)$，而在A上$f_0-g_0>0$. 应用(12.6)及(ii)式，便得到

$$0<\int_A(f_0-g_0)d\mu=\nu(A)-\nu(A)=0.$$

这个矛盾说明了μ-a.e.成立$f_0\leqslant g_0$；同样可证μ-a.e.成立$f_0\geqslant g_0$. □

具有可以设想的种种用途的Lebesgue-Radon-Nikodým定理，其最一般的形式乃是涉及任意的$\nu\ll\mu$并涉及这样一个μ，即它可以被分解，使得（19.24）能适用于每一项，以下定义“可分解”这一概念.

(19.25) **定义** 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间. 假设存在$\mathscr{A}$的一个子族$\mathscr{F}$，具有下列性质：

(i) 对于任意$F\in\mathscr{F}$，$0\leqslant\mu(F)<\infty$；

(ii) $\mathscr{F}$中的集是两两不相交的，并且$\bigcup\mathscr{F}=X$；

(iii) 如果$E\in\mathscr{A}$，$\mu(E)<\infty$，那么$\mu(E)=\sum\limits_{F\in\mathscr{F}}\mu(E\cap F)$①；

(iv) 如果$S\subset X$，并且对于任意$F\in\mathscr{F}$，都有$S\cap F\in\mathscr{A}$，那么$S\in\mathscr{A}$.

则称$(X,\mathscr{A},\mu)$以及μ本身是**可分解的**，而$\mathscr{F}$叫做$(X,\mathscr{A},\mu)$**的分解**.

对于可分解的μ以及适合$\nu\ll\mu$的任意一个ν，成立所说的一般形式的Lebesgue-Radon-Nikodým定理. 为了证明这一定理，须专门引进以下引理.

(19.26) **引理** 设$(X,\mathscr{A})$是一个可测空间，μ,ν是$(X,\mathscr{A})$上两个测度，而且$\mu(X)<\infty$，$\nu\ll\mu$. 则必存在一个集$E\in\mathscr{A}$，它满足：

(i) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，只要$A\subset E$，就有$\nu(A)=0$，或有$\nu(A)=\infty$；

(ii) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，只要$A\subset E$，并且当$\nu(A)=0$时，就有

①所说的和可能是不可数的，这时将其定义为诸和$\sum\limits_{F\in\mathscr{D}}\mu(E\cap F)$的上确界，其中$\mathscr{D}$取遍$\mathscr{F}$的一切有限子族.

$\mu(A)=0$；

(iii) ν在E'上是σ有限的.

证 为了证明(i)起见，试考虑集族

$\mathscr{D}=\{B\in\mathscr{A}: C\subset B$及$C\in\mathscr{A}$蕴涵$\nu(C)=0$或$\nu(C)=\infty\}$. 应当注意$\varnothing\in\mathscr{D}$. 定义$\alpha$为

$$\alpha=\sup\{\mu(B): B\in\mathscr{D}\};$$

显然，$\alpha\leqslant\mu(X)<\infty$. 在$\mathscr{D}$中有一个非减集序列$(B_n)_{n=1}^{\infty}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)=\alpha$；命$D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 因为$\mu$是可数加性的，所以分明有$\mu(D)=\alpha$ (10.13). 集D属于$\mathscr{D}$，这是因为，如果$C\in\mathscr{A}$，$C\subset D$，那么

$$\nu(C)=\nu(C\cap B_1)+\sum_{n=2}^{\infty}\nu(C\cap(B_n\cap B'_{n-1})).$$

由于每个集$C\cap(B_n\cap B'_{n-1})$都属于$\mathscr{A}$，并具有ν测度0或∞，所以对C而言也是如此.

其次考虑集D'. 要证对于任意集$F\subset D'$，如果$F\in\mathscr{A}$，$\nu(F)>0$，那么$\mathscr{A}$中必存在一个集F_1，适合$F_1\subset F$，而且

$$0<\nu(F_1)<\infty. \tag{1}$$

当$\nu(F)<\infty$时，(1)显然满足. 因此假设$\nu(F)=\infty$，并假设对于F的任意子集G，只要$G\in\mathscr{A}$，就有$\nu(G)=0$，或有$\nu(G)=\infty$. 在这一假定下，很明显，$F\cup D\in\mathscr{D}$. 既然$\nu\ll\mu$，而$\nu(F)>0$，必有$\mu(F)>0$，但同时就得到

$$\mu(F\cup D)=\mu(F)+\mu(D)>\alpha,$$

这就引出矛盾，因为$F\cup D\in\mathscr{D}$. 因此满足(1)式的集F_1是存在的.

以下要证ν在D'上是σ有限的. 为此，命

$\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{A}: F\subset D'$，$\nu$在$F$上是$\sigma$有限的$\}$.

在$\mathscr{F}$中有一个非减序列$(F_n)_{n=1}^{\infty}$，适合

$$\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\sup\{\mu(F): F\in\mathscr{F}\}=\beta;$$

命 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} Fn$. 由于$F$是可数个集之并，而在这些集上 ν 是 σ 有限的，因而 ν 在F上也是σ有限的；于是 $F\in\mathscr{F}$. 同时，由（10.13）可得出等式$\mu(F)=\beta$. 我们断言：

$$\nu(F'\cap D')=0.$$

设若不然，那么根据前段，便存在一个集$H\in\mathscr{A}$，使

$$H\subset D'\cap F',\quad 0<\nu(H)<\infty;$$

所以$F\cup H\in\mathscr{F}$，$\mu(H)>0$. 然而这样一来就得到

$$\mu(F\cup H)=\mu(H)+\mu(F)>\mu(F)=\beta\geqslant\mu(F\cup H).$$

这个矛盾表明$\nu(F'\cap D')=0$，从而 ν 在D'上是σ有限的.

最后，我们来规定本引理所断言的集 E. 命

$$\mathscr{G}=\{B\in\mathscr{A}:B\subset D,\ \nu(B)=0\}.$$

在$\mathscr{G}$中有一个非减集序列$(B_n)_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\sup\{\mu(B):B\in\mathscr{G}\}=\gamma.$$

命

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\qquad E=D\cap G'.$$

因为$\nu(G)=0$，所以 ν 在 $E'=D'\cup G$ 上是σ有限的；即E满足(iii). 断言(i)则是显然成立的，因为$E\subset D$. 为了验明(ii)，假定有一个集$B\subset E$，它满足$B\in\mathscr{A}$，$\nu(B)=0$，而$\mu(B)>0$. 那么必有$G\cup B\in\mathscr{G}$. 但这是不可能的，因为

$$\mu(G\cup B)=\mu(G)+\mu(B)>\mu(G)=\gamma\geqslant\mu(G\cup B);$$

从而验明了(ii). □

我们现在可以证明Lebesgue-Radon-Nikodým 定理的最终说法了.

(19.27) Lebesgue-Radon-Nikodým定理 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是可分解的，并具有分解$\mathscr{F}$，又设 ν 是$(X,\mathscr{A})$上适合 $\nu\ll\mu$ 的任意测度 则X上存在一个非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数f_0（可以

在每个$F\in\mathscr{F}$上选取有限值的f_0，这时ν是σ有限的），具有下列性质：

(i) $\nu(A)=\int_A f_0 d\mu$

对于关于μ是σ有限的所有$A\in\mathscr{A}$成立；

(ii) $\int_X f d\nu=\int_X f f_0 d\mu$

对于X上使得$\{x\in X: f(x)>0\}$关于μ是σ有限的所有非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数f成立；

(iii) 如果$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\nu)$，$\{x\in X: f(x)\neq 0\}$关于$\mu$是σ有限的，那么$ff_0\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$，并且

$$\int_X f d\nu=\int_X f f_0 d\mu.$$

此外，f_0在下述意义下还是唯一的：如果g_0是X上任意一个非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测函数，并且对于所有$A\in\mathscr{A}$，只要$\mu(A)<\infty$，就有

(iv) $\nu(A)=\int_A g_0 d\mu$,

那么，对于关于μ是σ有限的所有$E\in\mathscr{A}$，$f_0\xi_E$和$g_0\xi_E$是μ-a.e相等的.

证 对于每个$F\in\mathscr{F}$，ν在F上的限制关于μ在F上的限制是绝对连续的，从而根据(19.26)，在$\mathscr{A}$中有两个集D_F和E_F，满足：

(1) $D_F\cap E_F=\varnothing$；

(2) $D_F\cup E_F=F$；

(3) 对于E_F，(19.26.i)及(19.26.ii)成立；

(4) ν在D_F上是σ有限的.

如果ν在F上是σ有限的，就取$D_F=F$. 由于ν在D_F上是σ有限的，μ在D_F上是有限的，因此可以应用(19.24)断言：有一个定义在D_F上的非负、有限值、$\mathscr{A}$可测函数$f_0^{(F)}$，使对于限制在D_F上的μ

和ν，成立（19.24）的结论．现在设f_0是X上的函数，使对于所有$F\in\mathscr{F}$，

$$f_0(x)=\begin{cases} f_0^{(F)}(x), & x\in D_F, \\ \infty, & x\in E_F. \end{cases} \qquad (1)$$

当每个D_F就是F时，f_0自然是有限值的．不难看出，f_0是$\mathscr{A}$可测的；证明留给读者．我们把$\bigcup_{F\in\mathscr{F}} D_F$还记作$D$，而$\bigcup_{F\in\mathscr{F}} E_F$记作$E$．

为了证实f_0具有所说的全部属性，先考察一个集$A\in\mathscr{A}$，它适合$\mu(A)<\infty$ 条件（19.25.iii）保证了

$$\mu(A)=\sum_{F\in\mathscr{F}_0}\mu(A\cap F), \qquad (2)$$

这里$\mathscr{F}_0$是$\mathscr{F}$的一个可数子族．条件（19.25.iii）还蕴涵着

$$\mu(A\cap(\bigcup\{F:F\in\mathscr{F}\cap\mathscr{F}_0'\}))=0,$$

既然$\nu\ll\mu$，便得到

$$\nu(A\cap(\bigcup\{F:F\in\mathscr{F}\cap\mathscr{F}_0'\}))=0,$$

因此

$$\nu(A)=\sum_{F\in\mathscr{F}_0}\nu(A\cap F)$$

由（1）式显然得出

$$\nu(A\cap F)=\nu(A\cap D_F)+\nu(A\cap E_F)$$

$$=\int_{A\cap D_F}f_0d\mu+\nu(A\cap E_F). \qquad (4)$$

根据（19.26.i），$\nu(A\cap E_F)$的值不是0就是∞；而根据(19.26.ii)以及绝对连续性，$\nu(A\cap E_F)$等于零的充要条件是$\mu(A\cap E_F)$等于零．由此

$$\nu(A\cap E_F)=\int_{A\cap E_F}\infty d\mu=\int_{A\cap E_F}f_0d\mu. \qquad (5)$$

结合（3），（4），（5），并回溯到（12.21），则得出

$$\nu(A)=\sum_{F\in\mathscr{F}_0}\nu(A\cap F)=\sum_{F\in\mathscr{F}_0}\int_{A\cap F}f_0d\mu=\int_A f_0d\mu. \quad (6)$$

断言(i)现在已很明白，因为(6)式两边是可数加性的.

等式(ii)可以这样来证：先考察特征函数，然后考察简单函数，最后利用(11.35)及(12.22)取极限.

把f写成$\mathfrak{L}_1^+(X, \mathscr{A}, \nu)$中函数的线性组合，就推出等式(iii).

尚需证明f_0的唯一性. 命g_0如(iv)中所设. 那么，对于任意$F\in\mathscr{F}$及D_F的任意$\mathscr{A}$可测子集A，就有

$$\nu(A)=\int_A f_0d\mu=\int_A g_0d\mu,$$

从而根据(19.24)，对于μ几乎所有$x\in D_F$，$f_0(x)=g_0(x)$.现在假定存在一个集$A\in\mathscr{A}$，满足：$A\subset E_F$，$\mu(A)>0$，并且

$$g_0(x)<\infty=f_0(x) \qquad (x\in A)$$

由(19.26.ii)，可以看出$\nu(A)>0$. 对于每个$n\in N$，记

$$A_n=\{x\in A:g_0(x)<n\}.$$

那么$(A_n)_{n=1}^{\infty}$是一个非减序列，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$. 应用(10.13)，可以推知

$$0<\nu(A)=\lim_{n\to\infty}\nu(A_n);$$

所以存在n，使$\nu(A_n)>0$；由于$A_n\subset E_F$，便有$\nu(A_n)=\infty$. 看一下(iv)就引出矛盾：

$$\infty=\nu(A_n)=\int_{A_n}g_0d\mu\leqslant n\mu(A_n)<\infty.$$

这一矛盾证实了在F上μ-a.e.成立$g_0=f_0$. □

(19.28) **推论** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个σ有限测度空间，ν是$(X, \mathscr{A})$上适合$\nu\ll\mu$的任意一个测度. 则对于所有$A\in\mathscr{A}$，所

有非负、广义实值、$\mathscr{A}$可测的f以及所有$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu)$分别成立(19.27.i),(19.27.ii)以及(19.27.iii).

证 由于X是具有有限μ测度的集所成可数族之并,$(X, \mathscr{A}, \mu)$则显然是可分解的;而在(19.27.i),(19.27.ii)以及(19.27.iii)中所加的限制,在目前情况下都根本不是限制了. □

(19.29) 说明[①] 以下我们就测度空间$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$的情况来讨论Lebesgue-Radon-Nikodým定理,这里X是局部紧Hausdorff空间,ι是§9中所说的测度. 结果表明:凡这种测度空间$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$在(19.25)意义下都是可分解的,因而可以应用(19.27). 这项讨论多少有一些专门性,不过在我们看来这实在是难以避免的.

(19.30) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间,$(X, \mathscr{M}_\iota, \iota)$是如§§9—10所构造的一个测度空间. 则存在一个X的子集所成的集族$\mathscr{F}_0$,具有下列性质:

(i) $\mathscr{F}_0$中的集都是紧的,并具有(有限的!)正测度;

(ii) $\mathscr{F}_0$中的集两两不相交;

(iii) 如果$F\in\mathscr{F}_0$,U是开集,$U\cap F\neq\varnothing$,那么$\iota(U\cap F)>0$;

(iv) 如果$E\in\mathscr{M}_\iota$,$\iota(E)<\infty$,那么仅对于可数个集$F\in\mathscr{F}_0$,$E\cap F$非空;

(v) $D=X\cap(\bigcup\mathscr{F}_0)'$既是$\iota$可测集,又是局部$\iota$零集;

(vi) 如果Y是X的一个子集,并且对于所有$F\in\mathscr{F}_0$,$Y\cap F\in\mathscr{M}_\iota$,那么$Y\in\mathscr{M}_\iota$.

证 设$\mathfrak{K}$是X的具有以下性质的子集族$\mathscr{F}$全体所成的总类:

(1) $\mathscr{F}$中的集都是紧的,并具有正ι测度;

(2) $\mathscr{F}$中的集两两不相交;

---

① "说明"二字是译者加的.——译者注

（3） 如果$F\in\mathscr{F}$，U是X的开子集，$U\cap F\neq\varnothing$，那么$\iota(U\cap F)\neq 0$.

很清楚，$\mathcal{H}$非空. 这是因为，空族无疑满足（1）—（3）. 此外，显而易见，按照包含关系，$\mathcal{H}$还成为一个半序集：对于$\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2\in\mathcal{H}$，$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$成立，或者不成立. 如果$\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$，并且$\mathcal{H}_0$被包含关系线性有序化，那么，显而易见，$\bigcup\{\mathscr{F}:\mathscr{F}\in\mathcal{H}_0\}\in\mathcal{H}$. 这样，由Zorn引理知道，$\mathcal{H}$必含有一个极大族，叫它作$\mathscr{F}_0$.

我们来证明$\mathscr{F}_0$就满足本定理的全部条件. 条件(i)成立，这是由于（1）以及紧集具有有限ι测度的事实（9.27）. 条件(ii)正是（2），(iii)和（3）一样. 为了验证(iv)，试考察适合$\iota(E)<\infty$的任意$E\in\mathscr{M}$，并取一个开集U，使

$$E\subset U,\quad \iota(U)<\infty$$

〔参见(9.24)〕. 假定对于不可数个集$F\in\mathscr{F}_0$，$E\cap F$非空. 那么对于$U\cap F$而言，也是如此，而性质(iii)表明，对于不可数个$F\in\mathscr{F}_0$.

$$\iota(U\cap F)>0.$$

所以$\iota(U)=\infty$，这个矛盾证明了(iv).

接下去证(v). 设U是适合$\iota(U)<\infty$的任意开集，又设$\mathscr{F}_1$是$\mathscr{F}_0$的（可数）子族，它由满足$\iota(U\cap F)>0$的全体F组成. 那么(iii)表明

$$\mathscr{F}_1=\{F\in\mathscr{F}_0:U\cap F\neq\varnothing\}.$$

很明显

$$\iota(U)=\iota(U\cap(\bigcup\mathscr{F}_1))+\iota(U\cap(\bigcup\mathscr{F}_1)'),$$

原因是$\bigcup\mathscr{F}_1$是σ紧的，从而是ι可测的；由此还得到

$$\iota(U)=\iota(U\cap(\bigcup\mathscr{F}_0))+\iota(U\cap(\bigcup\mathscr{F}_0)'),$$

由（10.31）知道，$\bigcup\mathscr{F}_0$和$(\bigcup\mathscr{F}_0)'=D$都是$\iota$可测的.

在以上证明中，至今还未曾用到$\mathscr{F}_0$的极大性. 证明D是局部ι零集时，就要用这一属性了. 倘若D不是局部ι零集，那么根据定义，必有一个紧集C，使

$$\iota(C\cap D)>0,$$

而由（10.30）以及D是ι可测的这一事实，可以推知存在一个紧集H，使

$$H\subset C\cap D,\ \iota(H)>0$$

考察适合$\iota(U\cap H)=0$的开集U全体所成的集族$\mathscr{U}$．那么

$$\iota(H\cap(\bigcup\mathscr{U}))=0,$$

因为要不然，$H\cap(\bigcup\mathscr{U})$就会含有一个具有正$\iota$测度的紧集$E$（10.30），而$E$就会被有限个，其每个都具有零$\iota$测度的集$U\cap H$所覆盖．集$H\cap(\bigcup\mathscr{U})'$是紧集，并含在$D$内，而且

$$\iota(H\cap(\bigcup\mathscr{U})')=\iota(H)-\iota(H\cap(\bigcup\mathscr{U}))=\iota(H)>0.$$

同时，如果V是开集，$V\cap H\cap(\bigcup\mathscr{U})'\neq\varnothing$，那么$V\notin\mathscr{U}$，所以

$$\begin{aligned}\iota(V\cap H\cap(\bigcup\mathscr{U})')&=\iota(V\cap H)-\iota(V\cap H\cap(\bigcup\mathscr{U}))\\&=\iota(V\cap H)>0.\end{aligned}$$

因而可以把$H\cap(\bigcup\mathscr{U})'$添加到$\mathscr{F}_0$上，仍保有性质（1）—（3）．这就与$\mathscr{F}_0$的极大性相矛盾了．

尚需验明(vi)，为此，我们借助于（10.31）．设U是一个开集，$\iota(U)<\infty$，命

$$\mathscr{F}_1=\{F\in\mathscr{F}_0:U\cap F\neq\varnothing\},$$

而Y如(vi)所设．于是可写出

$$\begin{aligned}U\cap Y&=(U\cap Y\cap D)\cup(U\cap Y\cap(\bigcup\mathscr{F}_0))\\&=(U\cap Y\cap D)\cup\bigcup_{F\in\mathscr{F}_1}(U\cap Y\cap F).\end{aligned}$$

集$U\cap Y\cap D$是ι可测的，因为它是局部ι零集之故（10.32）（注意，凡局部ι零集的子集都是局部ι零集）．集$\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}_1}(U\cap Y\cap F)$乃是$\iota$可测集之可数并，从而也是$\iota$可测的．所以$U\cap Y$是$\iota$可测的，于是（10.31）表明，$Y$也是$\iota$可测的．□

（19.31）**推论**　$(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$如（19.30）所设．则测度空间$(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$在（19.25）的意义下是可分解的．

证 $\mathscr{F}_0$，D如（19.30）所设，命

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}_0\cup\{\{x\}:x\in D\}.$$

由（19.30.ii）及（19.30.v）容易明白，$\mathscr{F}$中的集是两两不相交的，$\cup\mathscr{F}=X$；就是说，对于$\mathscr{F}$，（19.25.ii）成立．由于$\mathscr{F}$中每个集是紧的，（19.25.i）也就成立．假定$E\in\mathscr{M}_\iota$，$\iota(E)<\infty$．既然D是局部ι零集，便有

$$\iota(E\cap D)=0,$$

从而对于任意$x\in D$，

$$\iota(E\cap\{x\})=0.$$

这样，由（19.30.iv）及ι的可数加性便得出

$$\sum_{F\in\mathscr{F}}\iota(E\cap F)=\sum_{x\in D}\iota(E\cap\{x\})+\sum_{F\in\mathscr{F}_0}\iota(E\cap F)$$

$$=\iota(E\cap D)+\iota(E\cap(\cup\mathscr{F}_0))=\iota(E);$$

因此$\mathscr{F}$满足（19.25.iii）．由（19.30.vi）可立即推出条件（19.25.iv）． □

我们现在就局部紧Hausdorff空间情况，介绍Lebesgue-Radon-Nikodým定理的说法．

(19.32) 定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间，ι是如§§9—10所构造的X上一个测度．又设ν是$(X,\mathscr{M}_\iota)$上适合$\nu\ll\iota$的任何一个测度．则（19.27）的全部结论，当μ用ι代替而$\mathscr{A}$用$\mathscr{M}_\iota$代替后仍成立．

证 根据（19.31）知道，$(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$是可分解的，于是只要应用（19.27）就可以了． □

(19.33) 评注 如果X是一个局部紧Hausdorff空间，ι，η是如§9由非负线性泛函所构造的X上任意两个外测度，并满足条件：$\iota(E)=0$蕴涵$\eta(E)=0$，那么$\mathscr{M}_\iota\subset\mathscr{M}_\eta$．为了明白这一点，设$A\in\mathscr{M}_\iota$，并设$F$是紧集．按照（10.34）得到

$$A\cap F=B\cup E,$$

其中$B\in\mathscr{B}(X)$，$\iota(E)=0$．因为$\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{M}_\eta$，$\eta(E)=0$，所以

$$A\cap F\in\mathscr{M}_\eta.$$

由（10.31）可知，$A\in\mathscr{M}_\iota$．这样一来，对于（X，$\mathscr{M}_\iota$）上的ι和η，（19.27）便成立．

（19.34）**注意** 假如所有测度都是σ有限的，而所有局部紧Hausdorff空间又都是σ紧的，那我们从（19.25）到（19.33）作如此详尽的阐述就是不必要的了．人们当然会问：在（19.27）和（19.33）中所得出的一般性结论，是否值得化这么大的力气？不少数学家认为不必如此．但是我们感到有责任向读者说明最为一般的定理——我们可以合理地步步引进这些定理，而读者或许相当需要它们．习题（19.71）中有一些例子，表明了Lebesgue-Radon-Nikodým定理的另一些似乎合理的说法其实并不成立．

（19.35）**说明**[①] 利用Hahn分解及Jordan分解，不难把Lebesgue-Radon-Nikodým定理开拓到μ和ν都是广义测度或复测度的情况．我们仅限于研究其中一类重要的开拓．

（19.36）**定理** 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是一个σ有限测度空间，ν是（X,$\mathscr{A}$）上一个复测度，而且$\nu\ll\mu$．则存在唯一的一个$f_0\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$，使对于任意$f\in\mathfrak{L}_1$（$X$，$\mathscr{A}$，$|\nu|$），

$$\text{(i)}\qquad \int_X f\,d\nu=\int_X ff_0\,d\mu,$$

又对于任意$A\in\mathscr{A}$，

$$\text{(ii)}\qquad \nu(A)=\int_A f_0\,d\mu.$$

此外，对于任意$A\in\mathscr{A}$，

$$\text{(iii)}\qquad |\nu|(A)=\int_A |f_0|\,d\mu,$$

特别，

---

① “说明”二字是译者加的．——译者注

(iv) $|\nu|(X)=\int_X |f_0|\,d\mu=\|f_0\|_1$.

证 命

$$\nu=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\nu_k$$

是 ν 的Jordan分解〔(19.13.ii)及(19.15.c)〕. 按照(19.13)及(19.20), ν_1, ν_2, ν_3, ν_4及$|\nu|$都是$(X, \mathscr{A})$上的有限测度, 其中每一个关于μ都是绝对连续的. 根据(19.24), 在X上存在非负、有限值、$\mathscr{A}$可测函数f_k, 使当$f\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu_k)$时,

$$\int_X f d\nu_k=\int_X ff_k d\mu \qquad (1)$$

$(k\in\{1, 2, 3, 4\})$. 命

$$f_0=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k f_k,$$

其中$\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=i$, $\alpha_4=-i$. f_0肯定属于$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$, 因为每个$f_k$是属于$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$的〔在(1)中命$f=1$〕. 那么, 当$f\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, |\nu|)$时, (19.16)则表明对于任意$k$, $f\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \nu_k)$, 从而由(1)和(19.17)便得出

$$\int_X f d\nu=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\int_X f d\nu_k=\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\int_X ff_k d\mu$$
$$=\int_X ff_0 d\mu$$

〔这里我们利用了下述事实: 对于任意k, $ff_k\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$——从(1)式来看, 这很明显〕. (i)得证. 取$f=\xi_A$, 由(i)可得出恒等式(ii), 因为$|\nu|$是有限测度的缘故.

为了证明$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$中$f_0$的唯一性, 假定$h_0\in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$, 并且对于任意$A\in\mathscr{A}$,

$$\nu(A)=\int_A h_0 d\mu.$$

命$\nu=\sigma+i\tau$, 其中σ, τ都是实值的. 那么对于任意$A\in\mathscr{A}$,

$$\int_A \mathrm{Re}\,h_0 d\mu = \sigma(A) = \int_A \mathrm{Re}\,f_0 d\mu.$$

正如(19.24)中唯一性证明，由此可推出μ-a.e.成立$\mathrm{Re}\,h_0 = \mathrm{Re}\,f_0$；同样，$\mu$-a.e.成立$\mathrm{Im}\,h_0 = \mathrm{Im}\,f_0$. 所以$h_0$和$f_0$乃是$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$的同一个元素.

最后证明(iii). 设给定$A \in \mathscr{A}$. 对于A的任意一个可测剖分$\{A_1, \cdots, A_n\}$，得到

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{A_j} f_0 d\mu \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} |f_0| d\mu$$

$$= \int_A |f_0| d\mu.$$

对所有这种剖分取上确界，便得出

$$|\nu|(A) \leqslant \int_A |f_0| d\mu. \tag{2}$$

为了证明反向不等式，利用(11.35)取一个$\mathscr{A}$可测简单函数序列$(\sigma_m)_{m=1}^{\infty}$，使得$\mu$-a.e.成立$\sigma_m \to \xi_A \mathrm{sgn}\,\bar{f}_0$，并且$|\sigma_m| \leqslant |\xi_A \mathrm{sgn}\,\bar{f}_0| \leqslant 1$. 于是对于任意$m$，

$$|f_0 \sigma_m| \leqslant |f_0| \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu),$$

从而由Lebesgue控制收敛定理(12.30)可推出

$$\int_A |f_0| d\mu = \int_X f_0 \xi_A \mathrm{sgn}\,\bar{f}_0 d\mu$$

$$= \lim_{m \to \infty} \int_X f_0 \sigma_m d\mu. \tag{3}$$

每个σ_m具有$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \xi_{A_j}$的形状，其中$\{A_1, \cdots, A_n\}$是$A$的一个可测剖分，而且对于任意$j$，$|\beta_j| \leqslant 1$. 因而

$$\left| \int_X f_0 \sigma_m d\mu \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{A_j} f_0 d\mu \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{A_j} f_0 d\mu \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)| \leqslant |\nu|(A). \qquad (4)$$

结合(3)，(4)，便得到

$$\int_A |f_0| d\mu \leqslant |\nu|(A). \qquad (5)$$

现在由(2)和(5)就推出(iii). 命$A=X$，得(iv). □

(19.37) **注意** 读者如果对照一下(19.36.iii)的陈述、证明和关于绝对连续函数的相应结果(18.1)，将会受到启示.

(19.38) **推论** 设ν是$(X, \mathscr{A})$上一个复测度. 则X上存在一个$\mathscr{A}$可测函数f_0，它满足以下三个条件：

(i) $|f_0|=1$;

(ii) 对于任意$A \in \mathscr{A}$，$\nu(A)=\int_A f_0 d|\nu|$;

(iii) 对于任意$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, |\nu|)$，$\int_X f d\nu=\int_X f f_0 d|\nu|$.

而且，

(iv) 对于任意$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, |\nu|)$，$\left|\int_X f d\nu\right| \leqslant \int_X |f| d|\nu|$.

证 显然有$\nu \ll |\nu|$. 规定f_0和(19.36)一样；那么可直接得到(ii)和(iii). 命

$$A=\{x \in X: |f_0(x)|<1\},$$
$$B=\{x \in X: |f_0(x)|>1\}.$$

应用(19.36.iii)，得出

$$\int_A (1-|f_0|) d|\nu| = 0 = \int_B (|f_0|-1) d|\nu|.$$

由(12.6)可以看出

$$|\nu|(A)=0=|\nu|(B).$$

这样，就不妨在$A \cup B$上来重新规定f_0，使得(i)成立. 设$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, |\nu|)$，则得到

$$\left|\int_X f d\nu\right| = \left|\int_X f f_0 |\nu|\right| \leqslant \int_X |f f_0| d|\nu|$$
$$= \int_X |f| d|\nu|,$$

从而(iv)成立. □

我们接下去考虑测度对之间的某种关系——它正是绝对连续性的对立面.

(19.39) **定义** 设μ, ν是$(X, \mathscr{A})$上的两个测度，广义测度或复测度，如果存在一个集$B \in \mathscr{A}$，使得$|\mu|(B) = 0$，$|\nu|(B') = 0$，就称μ和ν是（**互相**）**奇异的**，记作$\mu \perp \nu$. 也称μ〔ν〕**关于**ν〔μ〕**是奇异的**.

(19.40) **定理** 设μ, ν及σ是$(X, \mathscr{A})$上的复测度或广义测度，并且$\nu + \sigma$有定义，又设α属于K. 则：

(i) $\nu \ll \mu$及$\sigma \ll \mu$蕴涵$\alpha\nu \ll \mu$及$(\nu + \sigma) \ll \mu$;

(ii) $\nu \perp \mu$及$\sigma \perp \mu$蕴涵$\alpha\nu \perp \mu$及$(\nu + \sigma) \perp \mu$.

证 假定$\nu \ll \mu$，$\sigma \ll \mu$，并设$E \in \mathscr{A}$，而且$|\mu|(E) = 0$. 那么

$$(\alpha\nu)(E) = \alpha\nu(E) = \alpha \cdot 0 = 0,$$
$$(\nu + \sigma)(E) = \nu(E) + \sigma(E) = 0.$$

所以(i)成立.

其次假定$\nu \perp \mu$，$\sigma \perp \mu$. 在$\mathscr{A}$中取A，B，使

$$|\mu|(A) = |\mu|(B) = 0,$$
$$|\nu|(A') = 0, \quad |\sigma|(B') = 0.$$

命$C = A \cup B$. 显而易见

$$|\nu + \sigma|(C') \leqslant (|\nu| + |\sigma|)(C') \leqslant |\nu|(A') + |\sigma|(B') = 0,$$

而且

$$|\mu|(C) \leqslant |\mu|(A) + |\mu|(B) = 0.$$

所以$(\nu + \sigma)$和μ是奇异的. $\alpha\nu \perp \mu$则是显然的事实. □

(19.41) **定理** 设μ, ν是$(X, \mathscr{A})$上两个复测度或广义测度. 则以下三语句是等价的：

(i) $\mu \perp \nu$;

(ii) $|\mu| \perp |\nu|$;

(iii) 对于所有 j, $k \in \{1,2,3,4\}$, $\mu_k \perp \nu_j$, 其中 $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k \mu_k$ 和 $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j \nu_j$ 分别是μ和 ν 的Jordan分解.

证 由(19.40)及(19.13)不难推出本定理，细节从略. □

以下定理表明，如果在一个可测空间上给定了一个σ有限测度μ，那么所说的空间上任意一个σ有限测度都可以唯一地分解成这样的两部分，即一部分关于μ是绝对连续的，而另一部分关于μ是奇异的.

(19.42) **Lebesgue分解定理** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个σ有限测度空间，ν是$(X, \mathscr{A})$上一个复测度或σ有限广义测度，则有

(i) $\nu = \nu_1 + \nu_2$,

其中$\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$. 而且分解(i)还是唯一的；其实，假如分解$\nu = \tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2$具有同样性质的话，那么必有$\tilde{\nu}_1 = \nu_1$, $\tilde{\nu}_2 = \nu_2$.

证 鉴于ν的Jordan分解，并由于(19.20)，(19.40)及(19.41)，所以只考虑ν是一个测度的情况也就可以了. 这样便假定ν是$(X, \mathscr{A})$上一个σ有限测度. 测度ν关于测度$\mu + \nu$是绝对连续的，并且二者都是σ有限的. 所以，根据(19.24)，在X上便存在一个非负、实值、$\mathscr{A}$可测函数f_0，使对于所有非负$\mathscr{A}$可测函数f，成立

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d(\mu + \nu). \qquad (1)$$

我们断言：关于$\mu + \nu$，a.e.成立$f_0 \leqslant 1$. 为了证实这一点，命$E = \{x : f_0(x) > 1\}$，并假定$(\mu + \nu)(E) > 0$. E可以写成

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : f_0(x) \geqslant 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

由这一等式，易见必存在一个数$\alpha>1$，使得$(\mu+\nu)(F)>0$，其中

$$F=\{x: f_0(x)\geqslant\alpha>1\}.$$

既然$\mu+\nu$是σ有限的，便有一个集$A\in\mathscr{A}$，使得$A\subset F$，$0<(\mu+\nu)(A)<\infty$. 在(1)中命$f=\xi_A$，便得到

$$\nu(A)=\int_A f_0 d\mu+\int_A f_0 d\nu\geqslant\alpha\mu(A)+\alpha\nu(A),$$

从而

$$(1-\alpha)\nu(A)\geqslant\alpha\mu(A).$$

既然$\alpha>1$，那么当$\nu(A)>0$时，就会有$\alpha\mu(A)<0$；由此可知$\nu(A)=0$. 于是有$0\geqslant\alpha\mu(A)$，从而又知道$\mu(A)=0$. 这样一来，便成立等式

$$(\mu+\nu)(A)=\mu(A)+\nu(A)=0,$$

这就引出矛盾。

如果记$f_1=\min\{f_0, 1\}$，那么$0\leqslant f_1\leqslant 1$，并且

$$\int_X f d\nu=\int_X f f_1 d(\mu+\nu). \tag{2}$$

现在考察集

$$B=\{x\in X: f_1(x)=1\}.$$

设有一个集$C\in\mathscr{A}$，适合：$C\subset B$，$\mu(C)<\infty$及$\nu(C)<\infty$，在(2)中命$f=\xi_C$，便得出

$$\nu(C)=\int_C f_1 d\mu+\int_C f_1 d\nu=\mu(C)+\nu(C),$$

因此$\mu(C)=0$. 但μ在B上是σ有限的，由此可见$\mu(B)=0$. 在$\mathscr{A}$上规定ν_2为

$$\nu_2(A)=\nu(A\cap B),$$

便得到$\nu_2(B')=0$. 这样，ν_2和μ就是互相奇异的.〔ν_2显然是$(X, \mathscr{A})$上的一个测度.〕对于$A\in\mathscr{A}$，记

$$\nu_1(A)=\nu\ (A\cap B')$$

那么显然有 $\nu=\nu_1+\nu_2$.

须证ν_1关于μ是绝对连续的. 为此, 先考察适合$\mu(C)=0$而$\nu(C)<\infty$的任意$C\in\mathscr{A}$, 则有

$$\nu_1(C)=\nu(C\cap B')=\int_{C\cap B'}f_1d\mu+\int_{C\cap B'}f_1d\nu$$

$$=\int_{C\cap B'}f_1d\nu,$$

从而

$$\int_{C\cap B'}(1-f_1)d\nu=0. \tag{3}$$

函数$1-f_1$在B'上为正, 因此等式(3)蕴涵

$$\nu_1(C)=\nu(C\cap B')=0,$$

这正是所期望的. 对于$\mathscr{A}$中适合$\mu(C)=0$的任何一个C, 记$C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$, 其中诸$C_n$是$\mathscr{A}$中两两不相交的集, 并且对于任意$n$, $\nu(C_n)<\infty$. 刚才所考虑的情况适用于各个C_n, 于是得到$\nu_1(C_n)=0$ ($n=1, 2, \cdots$); 根据可数加性, 由此自然推出$\nu_1(C)=0$.

最后, 我们来证明分解的唯一性. 假定

$$\nu=\nu_1+\nu_2=\tilde{\nu}_1+\tilde{\nu}_2,$$

其中ν_1和$\tilde{\nu}_1$关于μ都是绝对连续的, 而ν_2和$\tilde{\nu}_2$关于μ都是奇异的. 设B和$\tilde{B}$是$\mathscr{A}$中两个集, 并且

$$\mu(B)=\mu(\tilde{B})=0,\quad \nu_2(B')=\tilde{\nu}_2(\tilde{B}')=0.$$

对于$\mathscr{A}$中适合$C\subset B\cup\tilde{B}$的集C, 有$\mu(C)=0$, 从而根据ν_1和$\tilde{\nu}_1$的绝对连续性, 便成立等式

$$\nu(C)=\nu_2(C)=\tilde{\nu}_2(C).$$

如果$C \subset B' \cap \widetilde{B}'$，$C \in \mathscr{A}$，那么就成立等式

$$\nu_2(C) = \widetilde{\nu}_2(C) = 0.$$

由此对于任意一个集$A \in \mathscr{A}$，都有

$$\nu_2(A) = \nu_2(A \cap (B \cup \widetilde{B})) + \nu_2(A \cap (B' \cap \widetilde{B}'))$$
$$= \widetilde{\nu}_2(A \cap (B \cup \widetilde{B})) + \widetilde{\nu}_2(A \cap (B' \cap \widetilde{B}')) = \widetilde{\nu}_2(A).$$

既然$\nu_2 = \widetilde{\nu}_2$，而所论及的每个测度又都是$\sigma$有限的，所以等式$\nu_1 = \widetilde{\nu}_1$也是成立的. □①

(19.43) **定义** 在 Lebesgue-Radon-Nikodým 定理〔(19.23)，(19.24)，(19.27)，(19.36)〕中所出现的（本质唯一的）函数f_0通常称为ν关于μ的**Lebesgue-Radon-Nikodým导数**，并用记号$\dfrac{d\nu}{d\mu}$来表示f_0. μ，ν和f_0三者之间的这种关系有时也用以下公式来表示：

$$d\nu = f_0 d\mu, \quad \nu = f_0 \mu.$$

(19.44) **定理（链式法则）** 设μ_0，μ_1及μ_2都是$(X, \mathscr{A})$上的σ有限测度，并且

$$\mu_2 \ll \mu_1, \quad \mu_1 \ll \mu_2.$$

则

(i) $\mu_2 \ll \mu_0$，

(ii) $$\frac{d\mu_2}{d\mu_0} = \frac{d\mu_2}{d\mu_1} \cdot \frac{d\mu_1}{d\mu_0} \quad \mu_0\text{-a, e.}$$

证 断言(i)是显然的事实. 命$f_0 = \dfrac{d\mu_1}{d\mu_0}$，$f_1 = \dfrac{d\mu_2}{d\mu_1}$. 由等式

$$\int_X f d\mu_2 = \int_X f f_1 d\mu_1 = \int_X f f_1 f_0 d\mu_0$$

---

①在S.Saks的前述引文〔(18.42)的注①〕中，收录了(19.42)的一个证明方法，其中没有用到Lebesgue-Radon-Nikodým定理.

便推出断言(ii).　□

现在我们着手仔细探讨函数的绝对连续性与测度的绝对连续性之间的关系．我们首先证明，§§ 8—9所说的映射

$$\alpha\to S_\alpha\to\lambda_\alpha$$

建立了R上正规化非减函数α全体所成的集（8.20），$\mathfrak{C}_{00}(R)$上非负线性泛函全体所成的集，以及R上（正则）Borel测度① 全体所成的集之间的 1－1 对应关系．

（19.45）　**定理**　设ι是R上任意一个正则Borel测度．在R上由以下规则定义α：

$$\text{(i)}\qquad \alpha(t)=\begin{cases}\iota([0,t[), & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\iota([t,0[), & t<0,\end{cases}$$

则α是R上一个非减、实值、左连续函数．而且

(ii)　$\lim\limits_{t\to-\infty}\alpha(t)>-\infty$的充要条件是$\iota(]-\infty,0[)<\infty$，

(iii)　$\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)<\infty$的充要条件是$\iota([0,\infty[)<\infty$．

证　当$0<t_1<t_2$时，

$$\alpha(t_2)-\alpha(t_1)=\iota([0,t_2[)-\iota([0,t_1[)$$
$$=\iota([t_1,t_2[)\geqslant 0,$$

从而$\alpha(t_2)\geqslant\alpha(t_1)$．当$t_1<0\leqslant t_2$时，成立不等式

$$\alpha(t_1)\leqslant 0\leqslant\alpha(t_2),$$

因此也有$\alpha(t_1)\leqslant\alpha(t_2)$．当$t_1<t_2<0$时，

$$\alpha(t_2)-\alpha(t_1)=-\iota([t_2,0[)+\iota([t_1,0[)$$
$$=\iota([t_1,t_2[)\geqslant 0.$$

---

①所谓**Borel测度**，自然指的是定义在Borel集所成的σ代数上的测度．虽然在§§9—10中ι定义为一可测集所成的σ代数$\mathscr{M}_\iota$的全体子集上的外测度，但是在（19.45）中，我们仍沿用符号"ι"来表示正则（12.39）Borel测度．根据定理（19.48），这并无差别．还值得注意的是，如果μ是R上的Borel测度，并且对于任意紧集$F\subset R$，$\mu(F)<\infty$，那么，μ便自动成为正则测度（12.55）．

这样，在一切情况下，由关系式$t_2>t_1$都可推出$\alpha(t_2)\geqslant\alpha(t_1)$.

为了证明α是左连续的，先考察 $t>0$ 的情况. 设$(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$是任意一个收敛到零的递减正实数列，并且$\varepsilon_1<t$. 则有

$$]0,\ t[=\bigcup_{n=1}^{\infty}]0,\ t-\varepsilon_n[,$$

从而

$$\alpha(t)=\iota(]0,\ t[)=\lim_{n\to\infty}\iota(]0,\ t-\varepsilon_n[)=\lim_{n\to\infty}\alpha(t-\varepsilon_n).$$

由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},0\right[=\varnothing,$$

所以得到

$$\lim_{n\to\infty}\alpha\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\iota\left(\left[-\frac{1}{n},\ 0\right[\right)=\iota(\varnothing)=0;$$

从而α在 0 左连续. 最后，当 $t<0$ 时，等式

$$\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)=-\iota\left(\left[t-\frac{1}{n},\ 0\right[\right)$$

$$=-\left[\iota\left(\left[t-\frac{1}{n},\ t\right[\right)+\iota([t,\ 0[)\right]$$

表明

$$\alpha(t)-\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)=\iota\left(\left[t-\frac{1}{n},\ t\right[\right).$$

由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[t-\frac{1}{n},\ t\right[=\varnothing.$$

可见

$$\lim_{n\to\infty}\iota\left(\left[t-\frac{1}{n},\ t\right[\right)=0,$$

我们已证明了α在 t 左连续.

根据(10.13)，成立下列等式:

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=\iota([0,\infty[),\quad -\lim_{t\to-\infty}\alpha(t)=\iota(]-\infty,0[),$$

这两个等式证实了本定理(ii)，(iii)两个断言. □

(19.46) **评注** (19.45)中函数α未必是右连续的. 比如说，如果 ι 是由

$$\iota(A)=\begin{cases}1, & 0\in A,\\ 0, & 0\notin A.\end{cases}$$

所定义的点质量，不难看出，相应的α在0处就不是右连续的. 至于怎样定义α，在这方面是任意的；它也可以定义为右连续的、非减的. 同时，应当选取$\alpha(0)=0$，成为任意一个正规化. 就有限测度 ι〔即$\iota(R)<\infty$〕而言，把α正规化，使得 $\lim\limits_{t\to-\infty}\alpha(t)=0$，这样做往往较为方便. 和(8.20)一样，我们将用**正规化非减函数**这一术语来指R上这样一个非减函数α，即它是左连续的，并满足$\alpha(0)=0$. 因此，定理(19.45)规定了一个映射 $\iota\to\alpha$，它把R上正则Borel测度全体所成的集映入正规化非减函数全体所成的集. 以下证明这一映射还是映满的.

(19.47) **定理** 设α是R上一个正规化非减函数，S_α是象§8那样相应于α的Riemann-Stieltjes积分，λ_α是§9中由S_α所构造的R上的Lebesgue-Stieltjes测度〔请特别参看(9.19)〕. 如果 β 是(19.45)中由λ_α所构造的正规化非减函数，则$\beta=\alpha$. 这样，当$a<b$，a, $b\in R$时，就有

(i) $\lambda_\alpha([a,b[)=\alpha(b)-\alpha(a)$.

证 等式$\beta(0)=\alpha(0)=0$的成立是显然的事实. 在R中取$t>0$. 那么

$$\beta(t)=\lambda_\alpha([0,t[),$$

要证这个数等于$\alpha(t)$.

试考察适合$\varepsilon_n\to 0$及$0<\varepsilon_n<\varepsilon_1<t$的任意一个递减正数列$(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$. 设有函数$f_n$，其图象如图8所示.

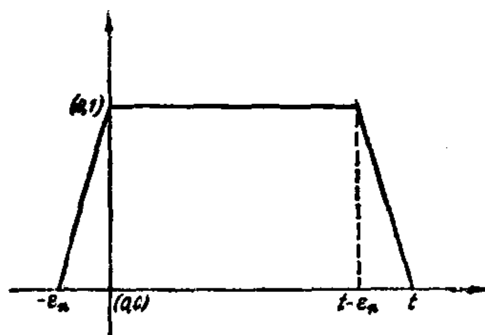


图 8

函数$(f_n)_{n=1}^{\infty}$处处收敛到$\xi_{[0,t[}$，并且

$$f_n \leqslant \xi_{[-\varepsilon_1,t]} \in \mathfrak{L}_1(R,\ \mathscr{M}_{\lambda_\alpha},\ \lambda_\alpha)$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

根据(12.24)得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f_n d\lambda_\alpha = \int_R \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda_\alpha = \lambda_\alpha([\,0,\ t[) = \beta(t).$$

由(12.36)，成立等式

$$\int_R f_n d\lambda_\alpha = S_\alpha(f_n) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

我们通过证实$\lim\limits_{n\to\infty} S_\alpha(f_n)=\alpha(t)$，来完成定理的证明．如果$\Delta_n$是$[-\varepsilon_1,t]$的一个细分，满足

$$\{-\varepsilon_n,\ 0,\ t-\varepsilon_n\}\subset\Delta,$$

那么

$$\begin{aligned} S_\alpha(f_n) &\leqslant U(f_n,\ \alpha,\ \Delta_n) \\ &\leqslant (\alpha(t)-\alpha(t-\varepsilon_n))+(\alpha(t-\varepsilon_n)-\alpha(0)) \\ &\quad +(\alpha(0)-\alpha(-\varepsilon_n)) \\ &= \alpha(t)-\alpha(-\varepsilon_n)-\alpha(t)-\alpha(0)=\alpha(t), \end{aligned}$$

而

$$S_\alpha(f_n) \geqslant L(f_n, \alpha, \Delta_n) \geqslant \alpha(t-\varepsilon_n) - \alpha(0) \to \alpha(t-) = \alpha(t).$$

（记住α是左连续的．）于是

$$\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} S_\alpha(f_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_R f_n d\lambda_\alpha = \beta(t).$$

$t<0$时，同样可证$\beta(t)=\alpha(t)$.

现在由β的定义可推出关系式(i)． □

(19.48) 定理 (19.45)中所定义的映射

(i) $$\iota \to \alpha$$

乃是一个1-1映射，它把R上正则Borel测度全体所成的集映满R上适合$\alpha(0)=0$的非减、实值、左连续函数α全体所成的集．这一映射的逆映射为

(ii) $$\alpha \to \lambda_\alpha$$

这样，凡R上正则Borel测度便都是Lebesgue-Stieltjes测度．

证 设给定了α．定理(19.47)表明，(i)中α是λ_α的象，从而这一映射是映满的．假定α也是正则Borel测度ι的象，而(19.47.i)及(19.45.i)表明，对于R中任意$a<b$,

$$\lambda_\alpha([a, b[) = \alpha(b) - \alpha(a) = \iota([a, b[). \qquad (1)$$

R的每个开子集U可以表示成可数个不相交的形如$[a,b[$的集之并，例如，$]0,1[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$，从而由(1)式可推出，对于任意开集$U\subset R$,

$$\lambda_\alpha(U) = \iota(U).$$

由于λ_α，ι都是正则的，由此推知对于任意$E\in\mathscr{B}(R)$,

$$\bar{\lambda}_\alpha(E) = \iota(E).$$

于是$\lambda_\alpha=\iota$，而且映射(i)是1-1的．其余则是显而易见的． □

(19.49) **评注** (19.48)有一个不同的证明方法，它不利用ι的正则性，但要用对于R中任意$a<b$，$\iota([a,b[)<\infty$这一条件，由于定义α时需要这一条件．〔当然，(12.35)①蕴涵着这样的ι是正则的．〕这再一次表明，R上满足$\iota([a,b[)<\infty$的任意Borel测度，势必都是Lebesgue-Stieltjes测度，因而也都是正则的．这另一个证明方法如下．

利用(19.48.1)证实：在有限个不相交的具有$[a,b[$，$]-\infty,b[$，或$[a,\infty[$任意形状的区间之并全体所成的代数上，α与λ_α是一致的．注意到在这个代数上，λ_α和ι都是σ有限的，最后利用Hopf开拓定理(10,39)的唯一性部分得出结论：在由这个代数所生成的σ代数〔即$\mathscr{B}(R)$〕上，λ_α与ι是一致的．

(19.50) **定理** Riemann-Stieltjes积分S_α是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上仅有的非负线性泛函．

证 设I是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上任意一个非负线性泛函，ι是象§§9-10由I所构造的测度．利用(19.48)可以找到α，使在$\mathscr{B}(R)$上，$\iota=\lambda_\alpha$．最后，由Riesz表示定理(12.36)得出结论：对于任意$f\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，都成立

$$I(f)=\int_R f d\iota=\int_R f d\lambda_\alpha=S_\alpha(f). \quad \square$$ [②]

(19.51) **记号** 为了行文简洁起见，我们将用记号

$$\iota\to\alpha$$

来表示ι是R上一个正则Borel测度，α则为(19.45)中由ι得到的R上的正规化非减函数．自然，(19.48)表明$\iota=\lambda_\alpha$．

(19.52) **定理** 设$\iota\to\alpha$．则α连续的充要条件是，对于任意$x\in R$，$\iota(\{x\})=0$．其实，对于任意$x\in R$，

---

①似应为(12.55)．——译者注

②定理(19.50)，(19.48)，以及(12.56)表明，Riemann积分是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上仅有的**不变**非负线性泛函．至多差一个正常数(倍数)．参看上文(8.16)．

$$\iota(\{x\})=\lim_{h\downarrow 0}\alpha(x+h)-\alpha(x).$$

证 对于任意$x\in R$，正如(19.47.i)所指出的，则有

$$\iota(\{x\})=\iota\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x,\ x+\frac{1}{n}\right[\right)=\lim_{n\to\infty}\iota\left(\left[x,\ x+\frac{1}{n}\right[\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\alpha\left(x+\frac{1}{n}\right)-\alpha(x)=\lim_{h\to 0}\alpha(x+h)-\alpha(x).\ \square$$

(19.53) **定理** 函数α在任意区间$[-p,p]$($p\in N$)上绝对连续(18.10)的充要条件是，相应的测度ι关于Lebesgue测度λ是绝对连续的.①

证 先假定对于任意$p\in N$，α在$[-p,p]$上绝对连续. 设A是R的适合$\lambda(A)=0$的任意一个子集，ε是一个正数. 对于每个$p\in N$，总存在$\delta(p)>0$，使得只要$\{]a_k,b_k[\}_{k=1}^{n}$是一族两两不相交的区间，并满足

$$\bigcup_{k=1}^{n}]a_k,\ b_k[\subset[-p,\ p],$$

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta(p),$$

就有

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha(b_k)-\alpha(a_k))<\varepsilon.$$

由于$\lambda(A\cap[-p,p])=0$，便有两两不相交的诸区间$\{]a_k,b_k[\}_{k=1}^{\infty}$，使

$$A\cap]-p,\ p[\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k,\ b_k[\subset[-p,\ p],$$

①σ代数$\mathscr{M}_\lambda$当然包含$\mathscr{B}(R)$. 应用测度的绝对连续定义时，我们就考虑测度空间$(R,\mathscr{B}(R),\iota)$及$(R,\mathscr{B}(R),\lambda)$.

并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta(p).$$

根据$\delta(p)$的选取，便得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(b_k)-\alpha(a_k))\leqslant\varepsilon.$$

鉴于(19.47)以及α的连续性，又有$\alpha(b_k)-\alpha(a_k)=\iota(]a_k,b_k[)(k\in N)$，从而

$$\varepsilon\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(b_k)-\alpha(a_k))=\sum_{k=1}^{\infty}\iota(]a_k,\ b_k[)$$

$$=\iota\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k,\ b_k[\right),$$

由此推得$\iota(A\cap]-p,p[)\leqslant\varepsilon$. 既然$\varepsilon$是任意的，便得到等式

$$\iota(A)=\lim_{p\to\infty}\iota(A\cap]-p,\ p[)=0.$$

其次假定ι(在Borel集上)关于λ是绝对连续的，并考虑任意区间$[-p,p]$，$p\in N$. 根据(19.24)，有一个非负Borel可测函数f_0，使对于任意Borel集$A\subset R$，都成立

$$\iota(A)=\int_A f_0 d\lambda.$$

特别

$$\int_{[-p,p]}f_0 d\lambda=\iota([-p,\ p])<\infty,$$

从而$f_0\in\mathfrak{L}_1([-p,p],\mathscr{B}(R),\lambda)$. 设给定$\varepsilon>0$. 根据(12.34)，便有$\delta>0$，使对于适合$\lambda(A)<\delta$的任意Borel集$A\subset[-p,p]$，都有

$$\int_A f_0 d\lambda<\varepsilon.$$

这样，设$\{]a_k,b_k[\}_{k=1}^{n}$是任意一族互不相交的开区间，其并是

$A\subset[-p,p]$，并成立不等式$\lambda(A)<\delta$. 于是有

$$\int_A f_0 d\lambda<\varepsilon,$$

而这一积分显然等于

$$\sum_{k=1}^{n} \iota([a_k, b_k[)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha(b_k)-\alpha(a_k)).$$

就是说，α在$[-p,p]$上绝对连续. □

在结束本节正文以前，我们来求出测度ι的一种经典分解，随之求出相应的函数α的分解. 我们从"提取"ι的不连续部分讲起.

(19.54) **定理** 对于$x\in R$，设ε_x是满足以下条件的集函数：对于任意$A\subset R$

$$\varepsilon_x(A)=\xi_A(x).$$

又设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$是R的任意一个可数子集①，φ是一个映射，它把$\{x_k\}$映入$]0,\infty[$，并且

$$\sum\{\varphi(x_k): |x_k|\leqslant n\}<\infty(n=1, 2, 3, \cdots).$$

对于任意$A\subset R$，命

$$(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(x_k)\varepsilon_{x_k}(A).$$

则[$\mathscr{B}(R)$上的]ι是由$\mathfrak{C}_{00}(R)$上的非负线性泛函

$$I(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(x_k)f(x_k)$$

所得到的唯一的正则Borel测度.

证明不难，从略.

(19.55) **定义** 如(19.54)所规定的测度ι称为**纯不连续的**. 如果一个测度ι满足条件：对于任意$x\in R$，都有$\iota(\{x\})=0$，则称ι为

①注意$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$是函数(2.18)。这里指$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$在R中.——译者注

连续的①.

(19.56) **定理** 如果ι是纯不连续的，则相应的α a.e.具有导数0. ②

证 命$\sigma_u=\xi_{]u,\infty[}$. 当$t>0$时，得到

$$\alpha(t)=\iota([0,t[)=\sum\{\iota(\{u\}):0\leqslant u<t\}$$

$$=\sum_{x_k\geqslant 0}\iota(\{x_k\})\sigma_{x_k}(t).$$

根据(17.18)，等式$\alpha'(t)=\sum_{x_k>0}\iota(\{x_k\})\sigma'_{x_k}(t)$ a.e.成立.

因为

$$\sigma'_{x_k}(t)=0 \qquad (t\neq x_k),$$

所以当$t>0$时，a.e.成立$\alpha'(t)=0$. 当$t<0$时，则考虑函数$\tau_u=\xi_{]-\infty,u]}$. 于是

$$\alpha(t)=-\sum_{x_k<0}\iota(\{x_k\})\tau_{x_k}(t),$$

从而当$t\leqslant 0$时，a.e.成立$\alpha'(t)=0$. □

(19.57) **定理** 设ι是R上任意一个正则Borel测度. 则ι可以唯一地表示成以下形式：

(i) $$\iota=\iota_c+\iota_d,$$

其中ι_d是如(19.54)所说的纯不连续测度，而ι_c是连续正则Borel测度.

证 命

---

①定理(19.54)以及定义(19.55)，显然可以推广到$(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$，这里$X$是一个任意的局部紧Hausdorff空间.参见(9.20),(10.22).

②凡写到"几乎处处"、"a.e."等，如果别无说明，我们总是指关于Lebesgue测度而言的.

$$D=\{x\in R:\iota(\{x\})>0\}.$$

因为对于每个$n\in N$，$\iota([-n,n])$是有限的，所以D必定是可数的．如果D是空集，命$\iota_d=0$，$\iota_c=\iota$．不然的话，则命$D=\{x_1,x_2,\cdots\}$是D的一个枚举，其中当$j\neq k$时，$x_j\neq x_k$，然后规定

$$\iota_d=\sum_k\iota(\{x_k\})\varepsilon_{x_k}.$$

显然，ι_d是如(19.54)所说的纯不连续测度，并且对于任意Borel集E，成立

$$\iota_d(E)=\sum_{x\in E}\iota(\{x\})\leqslant\iota(E).\qquad(1)$$

由(1)式直接得到：对于R上任意的非负Borel可测函数f，成立

$$\sum_k f(x_k)\iota(\{x_k\})=\int_R fd\iota_d\leqslant\int_R fd\iota.\qquad(2)$$

在$\mathfrak{C}_{00}(R)$上规定I_c为

$$I_c(f)=\int_R fd\iota-\int_R fd\iota_d.\qquad(3)$$

因为对于R的任意紧子集F，$\iota(F)$是有限的，所以(3)式右端两个积分都是有限的．这样，(2)式表明I_c是$\mathfrak{C}_{00}(R)$上一个非负线性泛函．设ι_c是象§9一样由I_c所构造的R上的正则Borel测度．定理(12.36)表明，对于所有$f\in\mathfrak{C}_{00}(R)$，都有

$$\int_R fd\iota=\int_R fd\iota_c+\int_R fd\iota_d=\int_R fd(\iota_c+\iota_d).$$

由(19.54)及(12.41)便推出等式(i)．对于所有$x\in R$，分明成立

$$\iota_c(\{x\})=\iota(\{x\})-\iota_d(\{x\})=0,$$

一想便知ι的分解(i)是唯一的． □

(19.58) 评注 设ι是R上一个正则Borel测度，ι_c，ι_d如(19.57)所设．诸对应$\iota\to\alpha$，$\iota_c\to\alpha_c$及$\iota_d\to\alpha_d$皆如(19.51)所设．由(19.45)不难看出

$$\alpha=\alpha_c+\alpha_d$$

函数α_c是连续的(19.52).函数α_d叫做**振荡函数**(saltus function)：它a.e.具有导数零(19.56)，并在其每个不连续点(有可数多个)具有等于$\alpha(x+)-\alpha(x)=\iota(\{x\})$的**跃度**(或**振幅**).

以下我们转向关于测度的奇异性及其相应函数α的问题. 先建立一个引理.

(19.59) 引理 设μ,ν是可测空间$(X,\mathscr{A})$上两个σ有限测度. 则$\nu\perp\mu$的充要条件是，在$(X,\mathscr{A})$上不存在σ有限测度$\tilde{\nu}$，能适合$\tilde{\nu}\neq 0$，$\tilde{\nu}\leqslant\nu$及$\tilde{\nu}\ll\mu$.

证 如果$\nu\perp\mu$. 那么

$$\nu=0+\nu$$

便是(19.42)所说的ν的**唯一的**Lebesgue分解. 假定$\tilde{\nu}$是$(X,\mathscr{A})$上一个σ有限测度，并满足$\tilde{\nu}\leqslant\nu$，$\tilde{\nu}\ll\mu$. 由此，在$(X,\mathscr{A})$上便有一个σ有限测度π，使

$$\nu=\tilde{\nu}+\pi$$

〔规定$\pi(E)=\lim\limits_{n\to\infty}(\nu(E\cap A_n)-\tilde{\nu}(E\cap A_n))$，其中$A_1\subset A_2\subset\cdots$，$\tilde{\nu}(A_n)<\infty$，$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$〕. 于是

$$\nu=\tilde{\nu}+\pi_1+\pi_2, \tag{1}$$

其中$\pi_1\ll\mu$，$\pi_2\perp\mu$. 由于$\tilde{\nu}+\pi_1\ll\mu$，(1)便是ν的Lebesgue分解. 因而$\tilde{\nu}=0$.

假定ν与μ不是互相奇异的. 利用(19.42)，记

$$\nu=\nu_1+\nu_2,$$

其中$\nu_1\ll\mu$，$\nu_2\perp\mu$. 那么$\nu_1\neq 0$，$\nu_1\leqslant\nu$；所以ν_1便是所期望的$\tilde{\nu}$. □

(19.60) 定理 设ι是R上任意一个正则Borel测度，α是如(19.45)所说的与ι相联系的正规化非减函数. 则ι和λ互相奇异的充要条件是，α'几乎处处等于零.

证 先假定ι和λ不是互相奇异的. 根据(19.42), 便有

$$\iota=\iota_1+\iota_2$$

其中$\iota_1\neq 0$, $\iota_1\ll\lambda$, $\iota_2\perp\lambda$. 正如(19.49)所说, ι_1便是正则测度.[①]

以下设$\iota_1\to\alpha_1$, 即$\iota_1=\lambda_{\alpha_1}$. 那么$\alpha_1$在任意区间$[-p,p]$上都是绝对连续的(19.53), 从而(19.45)及(18.16)蕴涵

$$\iota_1([0,\ x[)=\alpha_1(x)=\int_0^x\alpha_1'(t)dt\quad(x>0),$$

$$\iota_1([x,\ 0[)=-\alpha_1(x)=\int_x^0\alpha_1'(t)dt\quad(x<0).$$

因为$\iota_1\neq 0$, ι_1又是正则的, 所以α_1'在适合$\lambda(E)>0$的Borel集E上为正. 如果$\iota_2\to\alpha_2$, 那么$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 从而

$$\alpha'=\alpha_1'+\alpha_2'\geqslant\alpha_1'\quad\text{a.e.};$$

由此α'不可能a.e.等于零. 这样便证明了$\alpha'=0$ a.e. 蕴涵$\iota\perp\lambda$.

为了证明必要性, 假定在某个具有正Lebesgue测度的Borel集A上, 有$\alpha'>0$. 根据(18.14), α'在R上是Lebesgue可测的, 而且无疑有$\alpha'\geqslant 0$ a.e., 在$\mathscr{B}(R)$上规定σ为

$$\sigma(E)=\int_E\alpha'(t)dt.$$

---

①也可以这样证明: 如果E是有界Borel集, 则取一个递减的有界开集序列$(U_n)_{n=1}^\infty$, 使$E\subset\bigcap_{n=1}^\infty U_n=B$, $\lambda(B\cap E')=0$. 于是

$$\iota_1(B\cap E')=0,\ \iota_1(U_1)\leqslant\iota(U_1)<\infty,$$
$$\iota_1(E)=\iota_1(B)=\lim_{n\to\infty}\iota_1(U_n).$$

现在不难讨论具有有限ι_1测度的无界Borel集. 如果U是R中的开集, 则取一个递增的紧集序列$(F_n)_{n=1}^\infty$, 使

$$A=\bigcup_{n=1}^\infty F_n\subset U,\ \lambda(U\cap A')=0.$$

于是

$$\iota_1(U\cap A')=0,\ \iota_1(U)=\iota_1(A)=\lim_{n\to\infty}\iota_1(F_n).$$

这样, ι_1便是正则的.

显然

$$\sigma \ll \lambda, \tag{1}$$

也分明有

$$\sigma(A) > 0. \tag{2}$$

根据(18.14)，对于R中任意的$a<b$，得到

$$\sigma([a, b[) = \int_a^b \alpha'(t)dt \leqslant \alpha(b) - \alpha(a) = \iota([a,b[). \tag{3}$$

和前段的ι_1一样，σ也是R上一个正则Borel测度．正如(19.48)的证明，由(3)式推知，对于任意$E \in \mathscr{B}(R)$，都有

$$\sigma(E) \leqslant \iota(E). \tag{4}$$

结合(1)，(2)，(4)及(19.59)，可以看出$\iota \perp \lambda$不可能成立．因之$\iota \perp \lambda$缊涵$\alpha' = 0$ a.e. □

我们现在介绍适合于R上正则Borel测度及其相应的非减函数的最重要的分解定理．

(19.61) **定理** 设ι是R上任意一个正则Borel测度．则ι可以唯一地表示成以下形式：

(i) $$\iota = \iota_a + \iota_s + \iota_d,$$

其中ι_a，ι_s及ι_d都是R上的正则Borel测度，$\iota_a \ll \lambda$，$\iota_s \perp \lambda$，ι_d是纯不连续的，而ι_s是连续的．如果α，α_a，α_s及α_d是相应的非减函数〔参见(19.45)〕，则：

(ii) $$\alpha = \alpha_a + \alpha_s + \alpha_d;$$

α_a在任意紧区间上都是绝对连续的；α_s是连续的；$\alpha_s' = 0$ a.e.；α_d是振荡函数．此外，对于任意Borel集E，还成立

(iii) $$\iota_a(E) = \int_E \alpha'(t)dt,$$

又有

(iv) $$\alpha_a(x) = \begin{cases} \int_0^x \alpha'(t)dt, & x \geqslant 0, \\ -\int_x^0 \alpha'(t)dt, & x < 0. \end{cases}$$

证 (19.57)证明了

$$\iota=\iota_c+\iota_d,$$

其中ι_c是正则的、连续的，ι_d是纯不连续的. 还证明了这一分解是唯一的. (19.58)推出了分解

$$\alpha=\alpha_c+\alpha_d,$$

其中α_c是连续的，α_d是振荡函数. (19.56)说明了$\alpha_d'=0$ a.e.；由此$\alpha'=\alpha_c'$a.e.

现在根据公式(iii)来规定ι_a. 那么ι_a正是(19.60)证明中所出现的正则测度σ. 显而易见，$\iota_a\ll\lambda$. 设$\iota_a\to\alpha_a$. 于是α_a在任意紧区间上都是绝对连续的(19.53)，而且对于一切$E\in\mathscr{B}(R)$，都成立

$$\iota_a(E)=\int_E\alpha_c'(t)dt.$$

应用(19.45)及(18.14)，只要在R中$a<b$，就有

$$\begin{aligned}\alpha_a(b)-\alpha_a(a)&=\iota_a([a,\ b[)\\&=\int_a^b\alpha_c'(t)dt\leqslant\alpha_c(b)-\alpha_c(a).\end{aligned}\qquad(1)$$

命α_s等于函数$\alpha_c-\alpha_a$. 那么α_s是连续的，而根据(1)，α_s又是非减的. 再设$\iota_s\to\alpha_s$，即$\iota_s=\lambda_{\alpha_s}$. 那么$\iota_s$是连续的(19.52)、正则的，并且

$$\iota_c=\iota_a+\iota_s.\qquad(2)$$

由(iii)及α_a的定义便直接得出公式(iv). 从这一事实以及(18.3)，得到$\alpha_a'=\alpha'=\alpha_c'$a.e.；所以$\alpha_s'=0$ a.e.，从而$\iota_s\perp\lambda$(19.60). 这样一来，(2)式便给出了ι_c关于λ的唯一的Lebesgue分解. □

照例，我们布置一组习题来结束本节. 就随后的研究来说，这些习题都不是必要的，不过，它们都用种种方法阐明了理论. 因此，建议读者做做这些练习.

(19.62) **习题** 设ν是$(X,\mathscr{A})$上一个广义测度. 试证：对于任意$E\in\mathscr{A}$，

$$\nu^+(E)=\sup\{\nu(F):F\in\mathscr{A},\ F\subset E\},$$

$$\nu^-(E)=-\inf\{\nu(F):F\in\mathscr{A},\ F\subset E\}.$$

(19.63) **习题** 设X是一个非空集，$\mathscr{A}$是X的子集所成的一个代数. 假定ν是定义在$\mathscr{A}$上的一个实值集函数，并满足条件：(i)$\nu(\varnothing)=0$，(ii)如果A,B是$\mathscr{A}$中的两个不相交的集，那么，$\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)$. 又设$\nu^+,\nu^-$如(19.62)那样定义.

(a) 试证：ν^+,ν^-都是$(X,\mathscr{A})$上的有限加性测度.

(b) 假设$\sup\{|\nu(A)|:A\in\mathscr{A}\}<\infty$. 试证$\nu=\nu^+-\nu^-$.（此即有限加性广义测度的Jordan分解.）

(19.64) **习题** 命$X=[-1,1[$，设$\mathscr{A}$是形如$[a,b[\subset[-1,1[$的不相交的区间之有限并全体所成的代数. 假设当$x\neq 0$时，$f(x)=\frac{1}{x}$，而$f(0)=0$. 并在$\mathscr{A}$上定义ν为

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,\ b_k[\right)=\sum_{k=1}^{n}f(b_k)-f(a_k).$$

试证：ν是完全确定的，并满足(19.63)的假设，但是$\nu\neq\nu^+-\nu^-$. 试问是否有X关于ν的Hahn分解？

(19.65) **习题** 命$X=[0,1]$，$\mathscr{A}=\mathscr{B}([0,1])$. 在$\mathscr{A}$上定义$\nu$为

$$\nu(E)=\lambda(E)+i\lambda\left(E\cap\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right).$$

(a) 试依据ν计算$|\nu|$.

(b) 试证：这时(19.13.iii)中成立严格不等式.

(c) 试在$[0,1]$上求出一个Borel可测函数g，满足：$|g|=1$，并且对于任意$E\in\mathscr{A}$，$\nu(E)=\int_E g\,d|\nu|$.

(19.66) **习题** 设$(X,\mathscr{A})$是一个可测空间. 试证：$(X,\mathscr{A})$上复测度全体所成的集，按照集态线性运算及$\|\nu\|=|\nu|(X)$，成为一个复Banach空间.

(19.67) **习题** 设$(X,\mathscr{A})$是一个可测空间，μ,ν是$\mathscr{A}$上的复测度或广义测度. 当$\lim\limits_{|\mu|(E)\to 0}\nu(E)=0$时，称$\nu$是$\mu$**连续的**.（也就是

说，如果对于任意$\varepsilon>0$，总有$\delta>0$，使当$|\mu|(E)<\delta$时，有$|\nu(E)|<\varepsilon$，就称ν是μ连续的．〕如果ν是有限的，试证ν为μ连续的，其充要条件是ν关于μ是绝对连续的．

(19.68) **习题** 设$(X,\mathscr{M},\mu)$是一个测度空间，$(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{M}$上的一个有限测度序列，而且各个ν_n关于μ都是绝对连续的．假定对于任意$E\in\mathscr{M}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n(E)=\nu(E)$存在并有限，又假定$\mu(X)<\infty$.

(a) 试证：各个ν_n关于μ都是一致绝对连续的：即关于n一致地成立$\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\nu_n(E)=0$.

(b) 试证ν是一个测度．

(c) 把假设改为μ是$\mathscr{M}$上一个复值测度，而各个ν_n都是复测度，再做(a)题．并证明：这时ν是一个复测度．

〔提示．可考虑(10.45)所定义的度量空间$(\mathscr{M},\rho)$①．证明在这个空间上每个ν_n是完全确定的并连续．对于给定的$\varepsilon>0$，

$$\mathscr{M}_{m,n}=\left\{E\in\mathscr{M}:|\nu_n(E)-\nu_m(E)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\right\},\ m,\ n=1,2,3,\ \cdots,$$

$$\mathscr{M}_p=\bigcap_{m,n\geqslant p}\mathscr{M}_{m,n},\ p=1,\ 2,\ \cdots,$$

则都是闭族．应用Baire范畴定理，可以得到一个有内点A的$\mathscr{M}_q$.
对于集$B\in\mathscr{M}$，记

$$\nu_n(B)=\nu_q(B)+\{\nu_n(B)-\nu_q(B)\},$$

并利用恒等式

---

①中译文是按1978年修订版译出的，在1965年初版中，(10.45)开头是这样的：设$(X,\mathscr{M},\mu)$是一个测度空间，在$[0,\infty]$上规定φ如下：当$0\leqslant t<\infty$时，命$\varphi(t)=1-\exp(-t)$，并取$\varphi(\infty)=1$．对于A，$B\in\mathscr{M}$．规定

$$\rho(A,B)=\varphi(\mu(A\triangle B)).$$

（以下同1978年版，只是1978年版中的$\widetilde{\mathscr{M}}$，在1965年版中为$\mathscr{M}$.）
——译者注

$$\nu_k(B)=\nu_k(A\cup B)-\nu_k(A\cap B'),\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

来估计$\nu_n(B)$. 利用(a)证明(b). 为了完成(c), 可利用μ定义一个类似于$(\mathscr{M},\rho)$的度量空间, 然后象(a), (b)一样进行证明. 〕

(19.69) **习题** 设X是一个非空集, $\mathscr{M}$是X的子集所成的一个σ代数. 假定$(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{M}$上一个非零复测度序列, 而且对于任意$E\in\mathscr{M}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n(E)=\nu(E)$存在并有限. 试证$\nu$是$\mathscr{M}$上一个复测度.

〔提示. 命 $\mu(E)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\nu_n(E)}{|\nu_n|(X)}2^{-n}$, 证明每个$\nu_n$关于$\mu$是绝对连续的, 然后应用(19.68). 〕

(19.70) **习题** 设$\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$\sigma$代数$\mathscr{A}$上的一族测度. 试证由

$$\mu(A)=\sum_{\alpha\in I}\mu_\alpha(A)$$

所给定的集函数μ是$\mathscr{A}$上的一个测度.

(19.71) **习题** **有关Lebesgue-Radon-Nikodým定理的例题.**

(a) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个任意的测度空间, 在$\mathscr{A}$上定义ν为

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & \mu(A)=0,\\ \infty, & \mu(A)>0.\end{cases}$$

试证: $(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间, 而且$\nu\ll\mu$. 试求出一个函数f_0, 使得(19.24)的结论成立.

(b) 设X是一个局部紧Hausdorff空间, 并含有如§9所说的满足以下条件的一个非零测度ι: 对于任意$x\in X$, $\iota(\{x\})=0$. 又设μ是计数测度(10.4.a), 其定义域限制在$\mathscr{M}_\iota$上. 试证$\iota\ll\mu$, 并证明在X上不存在函数f_0, 能使(19.24.ii)成立. 试求出一个f_0, 使对于关于μ为σ有限的任意$A\in\mathscr{M}_\iota$, (19.24.ii)成立.

(c) 设X是一个局部紧Hausdorff空间, 并含有如§9所说的满足以下条件的一个测度ι: X关于ι不是σ有限的, 并且对于任意$x\in X$, $\iota(\{x\})=0$. 试证: 存在X的一个子集, 它是局部ι零集, 但

不是 ι 零集.〔利用(19.30)，并选取一个集 S，它恰含有每个 $F\in\mathscr{F}_0$ 的一个点.〕

(d) 命 $X=R\times R$，$\mathscr{A}=\mathscr{B}(X)$. 在 $\mathscr{A}$ 上定义 μ 和 ν 为

$$\mu(E)=\sum_{x\in R}\lambda(\{y\in R:(x,\ y)\in E\})+\sum_{y\in R}\lambda(\{x\in R:(x,y)\in E\}),$$

$$\nu(E)=\sum_{x\in R}\lambda(\{y\in R:(x,\ y)\in E\}).$$

试证：μ 和 ν 都是 $(X,\mathscr{A})$ 上的测度；ν 关于 μ 是绝对连续的；但在 X 上不存在 $\mathscr{A}$ 可测函数 f_0，使对于 $\mathscr{A}$ 中适合 $\mu(A)<\infty$ 的任意集 A，(19.27.i)成立.

〔提示. 考虑两个集

$$H_y=[0,\ 1]\times\{y\},\ y\in[0,\ 1],$$
$$V_x=\{x\}\times[0,\ 1],\ x\in[0,\ 1].$$

读者也可以把(d)题放到学习过(21.12)后再做.〕

(19.72) **习题** 试叙述并证明关于逐项微分的 Fubini 定理(17.18)改用可测空间上测度的无穷级数来表述的类似命题.

(19.73) **习题** 假定 μ,ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上两个 σ 有限测度，而且 $\mu\ll\nu$，$\nu\ll\mu$. 试证

$$\frac{d\nu}{d\mu}\neq 0\ \text{a.e.},\qquad \frac{d\mu}{d\nu}=1\Big/\frac{d\nu}{d\mu}\ \text{a.e.}$$

(注意，对于 μ 和 ν 而言，零测度集恰好是一样的.)

(19.74) **习题** 设 $[a,b]$ 是 R 中一个闭区间，f 是 $[a,b]$ 上一个有限变差函数. 试证：

(a) $f=g+h$，这里 g 在 $[a,b]$ 上绝对连续，在 $[a,b]$ 上 a.e. 成立 $h'=0$.

(b) 如果不计加上的常数，(a)中的分解则是唯一的.

(19.75) **习题** $\mathscr{B}(R)$ 上存在并非Lebesgue-Stieltjes测度的 σ 有限测度. 试考虑下述病态例子. 设 $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Q 的一个枚举，并

设 g 为适合以下条件的函数：

$$g(x)=x^{-\frac{1}{2}},\quad 0<x<1,$$
$$g(x)=0,\qquad 其他.$$

在R上由以下规则定义f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g(x+r_n).$$

(a) 试证$f\in \mathfrak{L}_1(R)$.

在$\mathscr{M}_\lambda$上定义μ为

$$\mu(E)=\int_E f^2 d\lambda.$$

注意$\mu\ll\lambda$.

(b) 试证对于R中任意的$a<b$，$\mu(]a,b[)=\infty$.

(c) 试证μ是σ有限的.

(d) 试求出R的Borel子集所成的一个序列$(F_n)_{n=1}^{\infty}$，它满足$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=R$，且对于任意$n\in N$，$\mu(F_n)<\infty$. 能否选取$F_n$，使其成为紧集？

(e) 本例并不是(19.48)的反例，为什么？

(19.76) 习题 试把(16.48.b)的结果开拓到$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$的子空间，这里$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个任意的可分解测度空间. 这就是说，命$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{F}$如(16.48.a)所设. 则存在一个集$E\in\mathscr{A}$，使得映满$\mathfrak{M}$的射影恰好是乘以$\xi_E$，从而$\mathfrak{M}$乃是$\mathfrak{L}_2(X,\mathscr{A},\mu)$中在$E'$上等于零的函数$f$全体所成的集.

(19.77) 习题 可分解测度的Lebesgue分解. 设$(X,\mathscr{A})$是一个可测空间，μ,ν是$(X,\mathscr{A})$上两个可分解测度.

(a) 试证$\mu+\nu$也是可分解测度.

把奇异性定义(19.39)换成以下说法. 如果存在一个集$B\in\mathscr{A}$，使对于关于μ是σ有限的一切$E\in\mathscr{A}$，都有$\mu(B\cap E)=0$，而对于关

于ν是σ有限的一切$F\in\mathscr{A}$，都有$\nu(B'\cap F)=0$，就说 μ和 ν 是互相奇异的.

(b) 试对于任意的两个可分解测度μ和ν，叙述并证明(19.24)的类似命题. 说明所得到的结果正是(19.42)的推广.

§ 20 Lebesgue-Radon-Nikodým定理的应用

(20.1) 引言 Lebesgue-Radon-Nikodým定理有着众多的应用. 诸如证实积分的某些熟知性质，计算多种多样的经典Banach空间的共轭空间，阐明概率论的若干概念，以及研究乘积测度等等，在上述种种问题里，这一定理都是非常有用的. 我们难以举出Lebesgue-Radon-Nikodým定理的全部乃至为数较多的已知应用，而只能以适当的篇幅讨论这个题目，我们挑选出了四个著名应用例子——或者其本身乃是分析学的重要定理，或者有必要确立该项事实.

(20.2) **换元积分法** 我们将应用Lebesgue-Radon-Nikodým定理，来证明关于换元积分法或者说“积分变量的更换”的一个非常一般的定理.

我们打算利用(12.45)及(12.46)所提供的测度的连续象的构造，还要用(19.24). 因此，我们来考虑两个局部紧Hausdorff空间X，Y以及把X映满Y的连续映射φ. 为了方便起见，假定Y是σ紧的.（我们也可以取掉这一假定，但这样一来就会把问题弄得冗长乏味、错综复杂.）设μ和ρ分别是§ 9意义下X上和Y上的测度. 同(12.45)一样，假设对于Y中紧集F，$\varphi^{-1}(F)$在X中是紧的，或假设$\mu(X)<\infty$. 也正象(12.45)那样，然后在Y上规定ν，根据假定，既然Y是σ紧的，ν便肯定是σ有限的(9.27). 由定理(12.46)知道，对于Y的一切ν可测子集B，都有

(i) $$\nu(B)=\mu(\varphi^{-1}(B)).$$

有了上述准备，我们就可以叙述并证明关于换元积分法的一般性定理了.

(20.3) **定理** 所有记号如(20.2)所设. 假定对于适合$\mu(E)=0$的任意$E\subset X$，有

(i) $\rho(\varphi(E))=0$.

则在X上存在一个非负、实值、Borel可测函数w，它具有以下性质. 对于每个$f\in \mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{M}_\rho,\rho)$，函数$(f\circ\varphi)w$都属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\mu,\mu)$，并成立

$$\text{(ii)}\quad \int_Y f(y)d\rho(y)=\int_X f\circ\varphi(x)w(x)d\mu(x).$$

此外，对于Y上某个Borel可测函数f_1，w还可取成$f_1\circ\varphi$的形状.

证 ν如(20.2)所设，假定$B\subset Y$，$\nu(B)=0$. 那么，正如(20.2.i)所指出的，便有

$$0=\nu(B)=\mu(\varphi^{-1}(B)),$$

从而由题设(i)知道

$$\rho(B)=\rho(\varphi(\varphi^{-1}(B)))=0.$$

就是说，$\rho\ll\nu$. 就可测空间$(Y,\mathscr{B}(Y))$和测度ν，ρ，引用定理(19.24). 于是，在Y上便存在一个非负、实值、Borel可测函数f_1，使得

$$\int_Y g(y)d\rho(y)=\int_Y g(y)f_1(y)d\nu(y). \tag{1}$$

其中g为使上式左端有定义的Y上的任意Borel可测函数.同时，当g属于$\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{B}(Y),\rho)$时，$gf_1$还属于$\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{B}(Y),\nu)$.

现在借助于(12.46.ii)，对于任意$g\in\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{B}(Y),\rho)$，可写出

$$\int_Y g(y)f_1(y)d\nu(y)=\int_X g\circ\varphi(x)f_1\circ\varphi(x)d\mu(x). \tag{2}$$

既然φ连续，f_1又是Borel可测的，可见$f_1\circ\varphi$也是Borel可测的〔参看（10.42.a)〕. 结合(1)和(2)，并记$w=f_1\circ\varphi$，对于任意$g\in \mathfrak{L}_1(Y, \mathscr{B}(Y), \rho)$，便得到

$$\int_Y g(y)d\rho(y)=\int_X g\circ\varphi(x)w(x)d\mu(x). \qquad (3)$$

假定$B\subset Y$，$\rho(B)=0$. 设(U_n)是Y的开子集所成的一个递减序列，并适合$U_n\supset B$，$\rho(U_1)<\infty$，$\lim_{n\to\infty}\rho(U_n)=0$. 记$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 在(3)中命$g=\xi_A$，并利用(10.15)，得到

$$0=\rho(A)=\int_X \xi_A\circ\varphi(x)w(x)d\mu(x).$$

这样，$(\xi_A\circ\varphi)w$便在X上μ-a.e.等于零，由此$(\xi_B\circ\varphi)w$在X上也μ-a.e.等于零. 如果h是除在B上之外等于零的Y上任意一个$\mathscr{M}_\rho$可测函数，那么显然有

$$(h\circ\varphi)w=(h\circ\varphi)(\xi_B\circ\varphi)w,$$

从而$(h\circ\varphi)w$便是$\mathscr{M}_\mu$可测的，而且在X上μ-a.e.等于零. 最后，考察一个任意的$f\in\mathfrak{L}_1(Y, \mathscr{M}_\rho, \bar{\rho})$. 根据(12.63)，可写成

$$f=g+h,$$

其中g是Borel可测的，h在Y上ρ-a.e.等于零. 利用刚观察到的结果，可以看出

$$(f\circ\varphi)w=(g\circ\varphi)w+(h\circ\varphi)w,$$

因而$(f\circ\varphi)w$等于一个Borel可测函数与一个在X上μ-a.e.等于零的函数之和. 由此$(f\circ\varphi)w$必是$\mathscr{M}_\mu$可测的. 此外，由(3)得出

$$\int_Y fd\rho=\int_Y gd\rho=\int_X (g\circ\varphi)wd\mu=\int_X (f\circ\varphi)wd\mu. \qquad \square$$

下面是一种古典情况，这时X和Y都是闭区间.

(20.4) 定理 设$[a, b]$是R中一个区间，φ是定义在$[a, b]$

上的一个非常值、实值、连续N函数①. 又设$[\alpha,\beta]$是象区间$\varphi([a,b])$. 则在$[a,b]$上存在一个非负、实值、Borel可测函数w，使对于任意$f\in \mathfrak{L}_1([\alpha,\beta],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$，$(f\circ\varphi)w$都属于$\mathfrak{L}_1([a,b],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$，并成立

$$\text{(i)}\quad \int_\alpha^\beta f(y)dy=\int_a^b f\circ\varphi(x)w(x)dx.$$

此外，对于$[\alpha,\beta]$上某个Borel可测函数f_1，w还可以取成$f_1\circ\varphi$的形状.

证 在(20.3)中，取$X=[a,b]$，$Y=[\alpha,\beta]$. 把$[a,b]$上Lebesgue测度λ看成μ，而把$[\alpha,\beta]$上Lebesgue测度λ看成ρ. 注意到定义(18.24)保证了所设的映射函数φ满足(20.3.i). 这样一来，应用(20.3)就行了. □

要计算(20.4)中的函数w，可能相当复杂[参看(20.6)—(20.8)]. 然而就单调的φ而言，正如以下所说的，函数w无非就是$|\varphi'|$. (此即换元积分法定理的古典形式.)

(20.5) 推论 设φ是一个单调连续N函数，并具有定义域$[a,b]$和值域$[\alpha,\beta]$($\alpha<\beta$). 则φ绝对连续，而(20.4)的函数w在$[a,b]$上λ几乎处处等于$|\varphi'|$. 于是，对于$f\in\mathfrak{L}_1([\alpha,\beta])$，便有$(f\circ\varphi)|\varphi'|\in\mathfrak{L}_1([a,b])$，并成立

$$\text{(i)}\quad \int_\alpha^\beta f(y)dy=\int_a^b f\circ\varphi(x)\,|\varphi'(x)|\,dx.$$

证 定理(18.25)表明了φ绝对连续. 这是因为，作为单调函数，φ是具有有限变差的. 不失一般性，我们假定φ非减. 把(20.4.i)应用于$[\alpha,\beta]$上的函数1，便得到

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_\alpha^\beta dy=\int_a^b w(t)dt. \tag{1}$$

对于每个$x\in[a,b]$，包含关系$\varphi^{-1}(\varphi([a,x]))\supset[a,x]$都成立，由此

①关于N函数的定义，请参看(18.24).

根据(20.4.i)——它适用于$\xi_{\varphi([a,x])}$——便有

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^\beta \xi_{\varphi([a,x])}(y)dy$$

$$=\int_a^b \xi_{\varphi([a,x])}\circ\varphi(t)w(t)dt$$

$$=\int_a^b \xi_{\varphi^{-1}(\varphi([a,x]))}(t)w(t)dt$$

$$\geqslant\int_a^x w(t)dt. \tag{2}$$

同理有

$$\varphi(b)-\varphi(x)\geqslant\int_x^b w(t)dt. \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)知道，(2)和(3)中必成立等式.
根据(20.4)，既然$w\in\mathfrak{L}_1([a,b])$，并由于

$$\varphi(x)=\int_a^x w(t)dt+\varphi(a),$$

因此(18.3)表明了$\varphi'(x)=w(x)$a.e. □

以下各题说明，就非单调的映射函数φ而言，由于选取(20.4)中所说的函数w带来的复杂情况.

(20.6) **习题** 设φ是$[0,1]$上这样的函数：$\varphi(t)=\min\{t,1-t\}$. 注意到φ是绝对连续的，因而是N函数(18.25). 把φ看作$[0,1]$到$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的映射，可以应用(20.4).

(a) 设v是$\mathfrak{L}_1([0,1],\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$中的函数，并具有性质：对于任意$[c,d]\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]$，成立

(i) $\int_c^d v d\lambda+\int_{1-d}^{1-c} v d\lambda=d-c.$

试证：对于任意$f \in \mathfrak{L}_1\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], \mathscr{M}_\lambda, \lambda\right)$，成立

$$\text{(ii)} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(y)dy = \int_0^1 (f \circ \varphi(x))v(x)dx.$$

(b) 如果v是$\mathfrak{L}_1([0,1], \mathscr{M}_\lambda, \lambda)$中使得(ii)成立的任意一个函数，试证对于$v$，(i)也成立.

(c) 试推证：当φ非单调时，定理（20.4）中的函数w恒不唯一.

(d) 试问：（20.5）中的函数$|\varphi'|$是不是能使（20.5.i）成立的唯一的函数（当然指的是在a.e.意义下）？

如下题所示，就更为复杂的映射函数φ而言，会出现格外复杂的情况.

(20.7) **习题** 设ψ是R上周期为1的这样的函数：

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

在[0，1]上由下列规则定义函数φ：

$2^{-1} \leqslant t \leqslant 1$时，$\varphi(t) = 2^{-1}\psi(2t)$；

$2^{-2} \leqslant t \leqslant 2^{-1}$时，$\varphi(t) = 2^{-3}\psi(2^3 t)$；

$2^{-3} \leqslant t \leqslant 2^{-2}$时，$\varphi(t) = 2^{-5}\psi(2^5 t)$；

…

$2^{-n} \leqslant t \leqslant 2^{-n+1}$时，$\varphi(t) = 2^{-2n+1}\psi(2^{2n-1} t)$；

…

$\varphi(0) = 0$.

（请读者画出φ的草图.）

(a) 试证明以下断言. 变差$V_0^1\varphi$等于1. 函数φ绝对连续；事实上φ属于$\mathfrak{L}\mathrm{ip}_1([0,1])$. 导数$\varphi'$仅取值±1.

(b) 把φ看作〔0，1〕到$\left[0, \frac{1}{4}\right]$上的映射，可以应用定理(20.4)．试求出〔0，1〕上使得(20.4.i)成立的所有$\mathscr{M}_1$可测函数w．

(20.8) 习题 设g是上文(18.40.a)所构造的函数．它是把〔0，1〕映满〔0，β〕的N函数，其中

$$\beta = \max\left\{\frac{1}{2}(b_k - a_k) + \rho_k\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

这样便可以应用定理(20.4)，这里$g=\varphi$．因为g'在F上并不存在，所以，使得(20.4.i)成立的函数w无论如何不会是g的导数．考虑到$\varphi=g$，试求出〔0，1〕上使得(20.4.i)成立的所有$\mathscr{M}_1$可测函数w①．

(20.9) 注意 除(20.4)和(20.5)所讨论过的而外，显然还有关于古典积分变换的其他问题．比如说，就R^n到R^n内的一个连续映射φ而言，(20.3)中的函数w在某些情况下是变换φ的雅可比行列式的绝对值．限于篇幅和时间，我们不得不略去这一有趣的题目，不过其要点，从(20.3)以及预定在§21定义的n维Lebesgue积分看来是很清楚的．

§15，我们就$1<p<\infty$及任意测度空间$(X, \mathscr{A}, \mu)$的情况，计算过各个Banach空间$\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu)$的共轭空间，但没有提到计算空间$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$的共轭空间的问题．我们现在致力于这项计算．这儿的结果以及所采用的方法与§15截然不同：目前的主要工具是Lebesgue-Radon-Nikodým定理．

(20.10) 评注 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个测度空间．又设g是X上一个有界$\mathscr{A}$可测函数，并在$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$上由以下规则定义$L_g$：

(i) $$L_g(f) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu.$$

①字母"w"是译者加的．——译者注

显然，L_g在$\mathfrak{L}_1$上是线性的，而且对于任意$f\in\mathfrak{L}_1$，成立

$$|L_g(f)|\leqslant\|g\|_u\|f\|_1.$$

因此L_g是$\mathfrak{L}_1$上一个有界线性泛函. 假如在一个零测度集上以任何方式把函数g改成另一个新的$\mathscr{A}$可测函数h，那么分明有$L_h=L_g$. 这样一来，为了产生$\mathfrak{L}_1^*$的一个元素，g就不必要求是有界的. 结果发现：在许多重要情况下，$\mathfrak{L}_1^*$的所有元素都确具有L_g的形状，这儿g是所谓“本质”有界的. 我们先来精确定义这一概念.

(20.11) 定义 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间. 又设集$A\in\mathscr{A}$，如果对于任意$E\in\mathscr{A}$，只要$\mu(E)<\infty$，就有$\mu(A\cap E)=0$，则称A是**局部μ零集**〔参见(9.29)〕. 设g是X上一个$\mathscr{A}$可测函数，如果对于某个实数$a\geqslant 0$，$\{x\in X: |g(x)|>a\}$是局部μ零集，则称g是**本质有界的**. 命$\|g\|_\infty$为这样的数a全体所成的集的下确界. 数$\|g\|_\infty$叫做$|g|$的**本质上确界**. 这个数有时也用记号“ess sup $|g|$”或“vrai max $|g|$”来表示.

(20.12) 定理 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个σ有限测度空间，$A\in\mathscr{A}$. 则A为局部μ零集的充要条件是$\mu(A)=0$.

证 显然.

(20.13) 定理 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个测度空间. 假定$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$，而$g$是本质有界的. 则：

(i) 集$\{x\in X: |f(x)|>0\}$是σ有限的；

(ii) $fg\in\mathfrak{L}_1$；

(iii) $$\left|\int_X fg\,d\mu\right|\leqslant\|g\|_\infty\|f\|_1.$$

证 命

$$E=\{x\in X: |f(x)|>0\},$$

$$E_n=\left\{x\in X: |f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\quad(n=1, 2, \cdots).$$

显然$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，而且对于一切$n$，$\mu(E_n)<\infty$. 于是(i)成立.

设 a 为使得

$$A=\{x\in X: |g(x)|>a\}$$

是局部μ零集的任意一个非负实数. 根据（12.22），得到

$$\int_X |fg|\,d\mu=\int_{E'}|fg|\,d\mu+\lim_{n\to\infty}\int_{E_n\cap A}|fg|\,d\mu$$

$$+\int_{E\cap A'}|fg|\,d\mu$$

$$\leqslant 0+0+a\int_{E\cap A'}|f|\,d\mu$$

$$\leqslant a\int_X |f|\,d\mu=a\|f\|_1.$$

对所有这样的 a 取下确界，便得出(ii)和(iii). □

(20.14) 定理 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是任意一个测度空间. 又设 g 是 X 上一个复值，$\mathscr{A}$可测函数.

(i) 如果 g 是本质有界的，则

$$\{x\in X: |g(x)|>\|g\|_\infty\}$$

是局部μ零集，这就是说，达到了定义（20.11）中的下确界.

(ii) g 是本质有界函数的充要条件是，X上存在一个有界$\mathscr{A}$可测函数φ，使得

$$\{x\in X: g(x)\neq\varphi(x)\}$$

是局部μ零集.

(iii) 如果 g 是本质有界的，则

$$\|g\|_\infty=\inf\{\|\varphi\|_u: \varphi\text{是(ii)中所说的集}\},$$

而且这一下确界是可达到的.

命$\mathfrak{L}_\infty(X,\mathscr{A},\mu)$表示在$X$上本质有界$\mathscr{A}$可测函数全体所成的集，如果两个函数仅在一个局部$\mu$零集上不同，就把它们看成是同一个函数. 则按照点态线性运算及范数$\|\ \|_\infty$，$\mathfrak{L}_\infty$成为一个复Banach空间.

证 由局部μ零集的任意一个可数并仍是局部μ零集这一显然的事实，可推出断言(i). 而断言(ii)则是显而易见的.

为了证明(iii)，假定有一个(ii)中所说的函数φ，使

$$\|\varphi\|_u < \|g\|_\infty.$$

那么

$$\{x\in X: |g(x)| > \|\varphi\|_u\}$$

并不是局部μ零集，而且在这个集的所有点处，$g(x)\neq\varphi(x)$. 这与φ的选取相矛盾，从而对于(ii)中所说的任意φ，都有

$$\|\varphi\|_u \geq \|g\|_\infty.$$

命

$$B=\{x\in X: |g(x)|\leq\|g\|_\infty\}.$$

那么$g\xi_B$是有界、$\mathscr{A}$可测的，并且除在B'的一个局部μ零子集上外，$g\xi_B$等于g. 同时

$$\|g\xi_B\|_u=\|g\|_\infty$$

（当$B=\varnothing$时，$\|g\|_\infty=0$）. 这便证明了(iii).

为了证实$\mathfrak{L}_\infty^-$是一个Banach空间，首先注意到：(ii)表明了$\mathfrak{L}_\infty$中每个等价类必含有一个有界函数. 这样，便可以把$\mathfrak{L}_\infty$（作为一个线性空间）看成是商空间$\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$，其中$\mathfrak{B}$是$X$上有界、复值、$\mathscr{A}$可测函数全体所成的线性空间，而$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{B}$中除在一个局部$\mu$零集上外都等于零的函数全体所成的线性子空间. 很明显的是，$\mathfrak{B}$按照一致范数成为一个Banach空间，而且$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{B}$的闭线性子空间. 断言(iii)说明了$\|\ \|_\infty$是$\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$上的商范数（参看（14.38）. 这样，（14.38.b）就表明$\mathfrak{L}_\infty$是一个Banach空间. □

读者当不会忘记，（15.14.b）中说过，就某个测度空间而言，如果$p>1$，g是一个可测函数，并且对于任意$f\in\mathfrak{L}_p$，都有$fg\in\mathfrak{L}_1$，那么$g\in\mathfrak{L}_{p'}$. 这一事实并非显而易见，（15.14）所提示的证明要用到一致有界性原理. 下面我们将看到，当$p=1$，$p'=\infty$时，要证明其相应结果，却简单得多了.

(20.15) **定理** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，g是定

义在X上的一个复值、$\mathscr{A}$可测函数，并且对于任意$f\in\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$，都有

$$\int_X |fg|\, d\mu<\infty.$$

则g属于$\mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$.

证 假定$g\notin\mathfrak{L}_\infty$. 那么存在一个正实数列$(\alpha_n)$和一个$\mathscr{A}$可测集序列$(A_n)$，满足：

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}<\infty; \tag{1}$$

$$0<\mu(A_n)<\infty; \tag{2}$$

以及当$x\in A_n$时，

$$\alpha_n<|g(x)|\leqslant\alpha_{n+1}. \tag{3}$$

为了推出这一事实，设(β_n)是满足(1)中两条件的任意一个序列. 由$g\notin\mathfrak{L}_\infty$这一假定可推知，对于每个$n$，

$$\{x\in X: |g(x)|>\beta_n\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\in X:\beta_n<|g(x)|\leqslant\beta_{n+j}\}$$

不是局部μ零集，从而对于每个n，存在j，使得

$$\{x\in X:\beta_n<|g(x)|\leqslant\beta_{n+j}\}$$

含有一个具有有限的正μ测度的子集. 按以下规则定义(β_n)的子序列(α_n)：命$\alpha_1=\beta_1$，对于定义好了的α_n，则命α_{n+1}为满足以下条件的β的最小值：

$$\{x\in X: \alpha_n<|g(x)|\leqslant\alpha_{n+1}\}$$

含有一个具有有限的正μ测度的子集A_n. 这就证实了(1)—(3).

命

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\mu(A_n)}\xi_{A_n}.$$

便有$\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}<\infty$，从而$f\in\mathfrak{L}_1$. 但同时却得到

$$\int_X |fg|\, d\mu = \sum_{n=1} \frac{1}{\alpha_n \mu(A_n)} \int_{A_n} |g|\, d\mu$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n \mu(A_n)} \int_{A_n} \alpha_n d\mu = \infty. \qquad \square$$

我们现在回到所要研究的$\mathfrak{L}_1$上的泛函L_g.

(20.16) **定理** 设(X, $\mathscr{A}$, μ)是任意一个测度空间, g是$\mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$的一个元素. 在$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$上由以下规则定义$L_g$:

$$L_g(f) = \int_X f\, \bar{g}\, d\mu.$$

则L_g是$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$上一个有界线性泛函, 而且

$$\| L_g \| = \| g \|_\infty.$$

证 很清楚, L_g是线性的; (20.13)表明了, 对于任意$f \in \mathfrak{L}_1$, 成立

$$|L_g(f)| \leqslant \| g \|_\infty \| f \|_1.$$

这样, L_g便是$\mathfrak{L}_1$上一个有界线性泛函, 而且

$$\| L_g \| \leqslant \| g \|_\infty. \qquad (1)$$

尚需证实(1)的反向不等式. 当$\| g \|_\infty = 0$时, 反向不等式显然成立. 因此假定$\| g \|_\infty > 0$, 并设ε是适合$0 < \varepsilon < \| g \|_\infty$的任意实数. 那么

$$\{x \in X : |g(x)| > \| g \|_\infty - \varepsilon\}$$

不是局部μ零集, 从而它便有一个子集$E \in \mathscr{A}$, 适合$0 < \mu(E) < \infty$. 规定

$$f = \frac{1}{\mu(E)} \xi_E \operatorname{sgn}(g).$$

显而易见, $f \in \mathfrak{L}_1$, $\| f \|_1 \leqslant 1$. 同时还有

$$L_g(f) = \int_X f\, \bar{g}\, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g|\, d\mu$$

$$\geq \|g\|_\infty - \varepsilon. \quad (2)$$

由(1)，(2)以及$\|L_g\|$的定义，便得出

$$\|L_g\| = \|g\|_\infty. \quad \square$$

令人感兴趣的是，猜想凡$\mathfrak{L}_1$上的有界线性泛函，都对于某个$g \in \mathfrak{L}_\infty$，具有$L_g$的形状. 然而，正如下例所表明的，就所有测度空间而言，事实并非如此.

(20.17) **例** 设$I = [0, 1]$，X是单位正方形$I \times I$. 又设$\mathscr{A}$是X（通常拓扑）中Borel集所成的σ代数，并在$\mathscr{A}$上定义ν，μ如下：

$$\nu(E) = \sum_{x \in I} \lambda(\{y \in I : (x, y) \in E\}),$$

$$\mu(E) = \nu(E) + \sum_{y \in I} \lambda(\{x \in I : (x, y) \in E\}).$$

〔这一构造和(19.71.d)中的构造很相似.〕在$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$上定义$L$为

$$L(f) = \int_X f d\nu.$$

由于$\nu \ll \mu$，很明显，$L \in \mathfrak{L}_1^*(X, \mathscr{A}, \mu)$，$\|L\| \leq 1$. 假定存在一个函数$g \in \mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$，使$L = L_g$. 对于每个固定的$y \in I$，命

$$H_y = \{(x, y) : x \in I\},$$
$$f = \xi_{H_y} \mathrm{sgn}(g).$$

那么f便属于$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$，并得到

$$\int_0^1 |g(x, y)| dx = \int_X f \bar{g} d\mu = L_g(f)$$
$$= L(f) = \int_X f d\nu$$
$$= 0.$$

既然$y\in I$是任意的，可见对于每个$y\in I$，$g(x,y)=0$对于λ几乎所有x成立. 应用后面的Fubini定理（21.12）（自然这个定理的成立毫不依赖于本例），便知道存在一点$x_0\in I$，使

$$\int_0^1 |g(x_0,\ y)|\,dy=0.$$

（其实，λ几乎所有x都具有这一性质. ）现在命

$$V=\{(x_0,y):y\in I\},\quad f=\xi_V$$

那么f便属于$\mathfrak{L}_1(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$，于是得到

$$1=\nu(V)=\int_X f\,d\nu=L(f)=L_{\bar{g}}(f)=\int_X f\,\bar{g}\,d\mu$$

$$=\int_V \bar{g}\,d\mu\leqslant\int_0^1 \bar{g}\,(x_0,\ y)\,dy=0.$$

这个矛盾说明了这样的g并不存在.

尽管有上述例子，但就可分解测度空间（19.25）而言，每个$L\in\mathfrak{L}_1^*$，对于某个$g\in\mathfrak{L}_\infty$，确实等于L_g. 为了证明这一事实，需要以下引理.

(20.18) **引理** 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是一个可分解测度空间，并设$\mathscr{F}$是（X，$\mathscr{A}$，μ）的一个分解〔参看（19.25）〕. 假定$f\in\mathfrak{L}_1(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$. 则存在$\mathscr{F}$的一个可数子族$\mathscr{C}$，使在$X\cap(\bigcup\mathscr{C})'$上$\mu$-a.e.有$f=0$. 此外，如果$(F_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{C}$的任意一个枚举，则成立

(i) $$\lim_{p\to\infty}\left\|f-\sum_{n=1}^{p} f\xi_{F_n}\right\|_1=0,$$

(ii) $$\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f\,d\mu.$$

证 对于$n\in N$，记

$$E_n=\left\{x\in X:\ |f(x)|>\frac{1}{n}\right\},\quad E=\{x\in X:f(x)\neq 0\},$$

那么$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，而且对于任意$n\in N$，$\mu(E_n)<\infty$. 命

$$\mathscr{C}_n=\{F\in\mathscr{F}:\mu(F\cap E_n)>0\},\quad A_n=E_n\cap(\cup\mathscr{C}_n)'.$$

由于

$$\mu(E_n)=\sum_{F\in\mathscr{F}}\mu(F\cap E_n)$$

(19.25.iii)，可见$\mathscr{C}_n$是可数族，而且$\mu(A_n)=0$. 命

$$\mathscr{C}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}_n,\quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

于是$\mathscr{C}$可数，$\mu(A)=0$，而且除在$A\cup(\cup\mathscr{C})$上外f都等于零. 如果$(F_n)_{n=1}^{\infty}$如上所设，显而易见

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}f\xi_{F_n}=f\quad \mu\text{-a.e.},$$

并对于一切$p\in N$，都成立

$$\left|f-\sum_{n=1}^{p}f\xi_{F_n}\right|\leqslant|f|\in\mathfrak{L}_1.$$

这样，由Lebesgue控制收敛定理便得出(i)和(ii). □

(20.19) 定理 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个可分解测度空间(19.25). 假定L是$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$上一个有界线性泛函. 则存在一个函数$g\in\mathfrak{L}_\infty(X,\mathscr{A},\mu)$，使

$$L=L_g,$$

其中L_g如(20.16)所设.

证 (I) 假设$\mu(X)<\infty$. 对于$E\in\mathscr{A}$，规定

$$\nu(E)=L(\xi_E). \tag{1}$$

我们断言ν是$(X,\mathscr{A})$上一个复测度，并且$\nu\ll\mu$. 设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中集所成的一个两两不相交集族，命$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，又对于每个

$p\in N$，命$E_p=\bigcup\limits_{n=p+1}^{\infty}E_n$. 则有

$$F_1\supset F_2\supset\cdots,\quad \bigcap_{p=1}^{\infty}E_p=\varnothing;$$

由（10.15）和$\mu(X)<\infty$的假设可知

$$\left|\nu(E)-\sum_{n=1}^{p}\nu(E_n)\right|=\left|L(\xi_E)-L\left(\sum_{n=1}^{p}\xi_{E_n}\right)\right|=|L(\xi_{F_p})|$$

$$\leqslant\|L\|\cdot\|\xi_{F_p}\|_1=\|L\|\cdot\mu(F_p)\to 0\ (p\to\infty).$$

因此

$$\nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n),$$

从而ν是可数加性的. 当$\mu(E)=0$时，在$\mathfrak{L}_1$中$\xi_E=0$，因此$\nu(E)=L(\xi_E)=L(0)=0$；所以$\nu\ll\mu$.

由（19.36）知道，必存在唯一的一个函数$g\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$，使对于任意$E\in\mathscr{A}$，

$$\nu(E)=\int_E\overline{g}\,d\mu,\tag{2}$$

$$|\nu|(E)=\int_E|g|\,d\mu.\tag{3}$$

我们断定μ-a.e.成立$|g|\leqslant\|L\|$. 为了证实这一点，命

$$A=\{x\in X:|g(x)|>\|L\|\},$$

但假设$\mu(A)>0$. 由（3）及（12.6）得到

$$|\nu|(A)=\int_A|g|\,d\mu>\int_A\|L\|\,d\mu=\|L\|\mu(A).$$

这样便存在A的一个可测剖分$\{A_1,\cdots,A_n\}$，使

$$\sum_{j=1}^{n}|\nu(A_j)|>\|L\|\mu(A).$$

援引(1)，便得出

$$\|L\|\mu(A)<\sum_{j=1}^{n}|\nu(A_j)|=\sum_{j=1}^{n}|L(\xi_{A_j})|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|L\|\cdot\|\xi_{A_j}\|_1$$

$$=\|L\|\cdot\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)=\|L\|\mu(A).$$

这个矛盾说明μ-a.e.成立$|g|\leqslant\|L\|$，从而不妨假设对于所有$x\in X$，都成立$|g(x)|\leqslant\|L\|$.

由(1)和(2)不难看出，对于定义在X上的一切复值、$\mathscr{A}$可测、简单函数s，都成立

$$L(s)=\int_X s\bar{g}\,d\mu. \tag{4}$$

现在设$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$，并利用(11.35)选取一个$\mathscr{A}$可测简单函数序列$(s_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$$|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|f|,\quad s_n(x)\to f(x)\quad(x\in X).$$

很明显，对于任意$n\in N$，

$$|s_n\bar{g}|\leqslant\|L\|\cdot|f|\in\mathfrak{L}_1,\quad |f-s_n|\leqslant 2|f|\in\mathfrak{L}_1;$$

由此，(12.30)，(4)及L的连续性便蕴涵

$$L(f)=\lim_{n\to\infty}L(s_n)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\bar{g}\,d\mu=\int_X f\bar{g}\,d\mu.$$

这样，就$\mu(X)<\infty$的情况便证明了定理.

(Ⅱ)现在考察一般情况. 设$\mathscr{F}$是$(X,\mathscr{A},\mu)$的一个分解. 对于每个$F\in\mathscr{F}$，在$(X,\mathscr{A})$上规定μ_F为

$$\mu_F(E)=\mu(E\cap F),$$

而在$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu_F)$上规定$L_F$为

$$L_F(f)=L(f\xi_F).$$

很清楚，$(X, \mathscr{A}, \mu_F)$是一个有限测度空间，而L_F则是$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu_F)$上一个有界线性泛函，并且

$$\|L_F\| \leqslant \|L\|.$$

应用（Ⅰ）：对于每个$F \in \mathscr{F}$，存在一个函数$g_F \in \mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu_F)$，使对于任意$x \in X$，都有

$$|g_F(x)| \leqslant \|L_F\| \leqslant \|L\|,$$

而对于任意$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu_F)$，则有

$$L(f\xi_F) = L_F(f) = \int_X f\,\overline{g}_F d\mu_F = \int_F f\,\overline{g_F} d\mu. \tag{5}$$

由于$\mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu_F)$，（5）式对于任意$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$也显然成立.

其次考虑函数g_F. 这些函数在X上都处处有定义，但在确定L_F的过程中，g_F在F'上的值却无关紧要. 在任何情况下，我们总可在整个X上定义（并且就定义）g为

$$g(x) = g_F(x), \quad x \in F \in \mathscr{F}.$$

显而易见，$g \in \mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$〔由（19.25.iv）可推出$g$的$\mathscr{A}$可测性〕，而且$\|g\|_\infty \leqslant \|g\|_u \leqslant \|L\|$.

设$f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$，并设$\{F_n\}_{n=1}^\infty$是（20.18）所说的$\mathscr{F}$的可数子族. L的连续性，（20.18），g的有界性，以及（12.30）表明

$$\begin{aligned}
L(f) &= \lim_{p\to\infty} L\left(\sum_{n=1}^{p} f\xi_{F_n}\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} L(f\xi_{F_n}) \\
&= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \int_{F_n} f\,\overline{g}\,d\mu = \lim_{p\to\infty} \int_X \sum_{n=1}^{p} f\xi_{F_n}\,\overline{g}\,d\mu \\
&= \int_X f\,\overline{g}\,d\mu. \quad \square
\end{aligned}$$

(20.20) 定理 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个可分解测度空间（19.25）. 则由

$$T(g)=L\overline{g}$$

〔参看（20.16）〕所规定的映射 T 是把 $\mathfrak{L}_\infty$ 映满共轭空间 $\mathfrak{L}_1^*$ 的保范线性映射．这样，作为两个Banach空间，$\mathfrak{L}_\infty$ 和 $\mathfrak{L}_1^*$ 乃是同构的．

证 T 是把 $\mathfrak{L}_\infty$ 映入 $\mathfrak{L}_1^*$ 的保范映射这一事实已为（20.16）所证明．从（20.19）推知，T 还是映满 $\mathfrak{L}_1^*$ 的．而 T 为线性的乃是平凡的事实．既然 T 既是线性的又是保范的，它便是1-1的．□

(20.21) 注意 正如我们在（20.17）所已证明的，就某些不可分解测度空间而言，（20.20）中的结论并不成立．不过，对于任意的（X，$\mathscr{A}$，μ）来说，J.Schwartz业已找到 $\mathfrak{L}_1^*(X,\mathscr{A},\mu)$ 的表示，感兴趣的读者可以查阅文献①．

(20.22) 习题 设 X 是一个局部紧Hausdorff空间，ι 是如§9所说的 $\mathscr{P}(X)$ 上一个外测度．试证（9.29）和（20.11）所给出的局部 ι 零性的两定义是等价的．

(20.23) 习题 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是一个退化测度空间，并且 $\mu(X)=\infty$〔请参看（10.3）的定义〕．试问：这个测度空间是否可分解？试就这一测度空间求出 $\mathfrak{L}_1$，$\mathfrak{L}_1^*$ 及 $\mathfrak{L}_\infty$ 的显式表示．

(20.24) 习题 设（X，$\mathscr{A}$，μ）是任意一个测度空间，$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$．在 $\mathfrak{L}_\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ 上定义 L 为

$$L(g)=\int_X g\overline{f}\,d\mu.$$

试证：$L\in\mathfrak{L}_\infty^*$，并且 $\|L\|=\|f\|_1$．

(20.25) 习题 试通过证实并不是所有 $L\in\mathfrak{L}_\infty^*([0,1])$ 都具有(20.24)所描述的形状，来证明 $\mathfrak{L}_1([0,1])$（具有Lebesgue测度）不是自反的．〔提示．利用Hahn-Banach定理得出 $L\neq0$，并且对于一切 $g\in\mathfrak{L}_\infty$，都有 $L(g)=0$，其中 g 是本质连续的，这指的是，对于某个 $h\in\mathfrak{C}([0,1])$，$\|g-h\|_\infty=0$．〕

①Proc.Amer.Math.Soc.2(1951)，270-275.

(20.26) **习题** (a) 试证 $\mathfrak{L}_\infty([0,1])$ 不是可分的.

(b) 为使一个测度空间的 $\mathfrak{L}_\infty$ 空间是可分的，试求这一测度空间所应满足的充要条件.〔请记住(20.23).〕

我们已经就 $1<p<\infty$ 和任意测度空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 求出了 $\mathfrak{L}_p(X,\mathscr{A},\mu)$ 的共轭空间，又就一大类测度空间求出了 $\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$ 的共轭空间，现在很自然的是，要寻求 $\mathfrak{L}_\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ 的共轭空间. 结果表明：$\mathfrak{L}_\infty^*$ 中每个泛函都可以表示成关于 $\mathscr{A}$ 上某个有界、复值、有限加性测度的一个积分.

我们现在来概述这一表示. 首先须引进几个定义.

(20.27) **定义** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，$\boldsymbol{F}(X,\mathscr{A},\mu)$ 表示定义在 $\mathscr{A}$ 上并满足以下条件的复值函数 τ 全体所成的集：

(i) $\sup\{|\tau(A)|:A\in\mathscr{A}\}<\infty$;

(ii) 当 $A,B\in\mathscr{A}$，$A\cap B=\varnothing$ 时，$\tau(A\cup B)=\tau(A)+\tau(B)$;

(iii) 当 $A\in\mathscr{A}$，A 是局部 μ 零集时，$\tau(A)=0$.

对于这样的一个 τ，〔正如(19.10)及(19.11)那样〕，在 $\mathscr{A}$ 上由以下规则定义 $|\tau|$：

$$|\tau|(A)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\tau(A_j)|:\{A_1,\cdots,A_n\}\text{是}A\text{的一个可测剖分}\right\}.$$

不难证实 $|\tau|\in\boldsymbol{F}(X,\mathscr{A},\mu)$〔参较(19.12)〕. 我们规定 τ **的范数**为

$$\|\tau\|=|\tau|(X).$$

容易验证，按照这个范数以及集态线性运算，$\boldsymbol{F}(X,\mathscr{A},\mu)$ 成为一个复赋范线性空间.

颇为有趣的是，对于 X 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数，可以定义关于如(20.27)所规定的有限加性测度 τ 的积分.〔毫无疑问，不会有极限定理(12.22)及(12.24)的类似命题.〕我们现在草描积分

$\int \cdots d\tau$的构造.

(20.28) **引理** 记号如(20,27)所设. 如果 $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi_{A_j}$ 和 $g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_{B_k}$ 是 X 上两个复值简单函数，其中 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 和 $\{B_1, \cdots, B_n\}$ 是 X 的两个可测剖分，则对于任意 $\tau \in \boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$，成立

(i) $$\left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau(A_j) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau(B_k) \right| \leqslant \| \tau \| \cdot \| f - g \|_u.$$

证 可以写出

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau(A_j) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau(B_k) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_j - \beta_k) \tau(A_j \cap B_k) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_j - \beta_k| \cdot |\tau(A_j \cap B_k)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \| f - g \|_u |\tau(A_j \cap B_k)| \\
&\leqslant \| f - g \|_u \cdot \| \tau \|;
\end{aligned}$$

倒数第二个不等式成立，因为或者有 $A_j \cap B_k = \varnothing$，这时被加数为零，或者存在一个 $x \in A_j \cap B_k$，而这时 $|\alpha_j - \beta_k| = |f(x) - g(x)| \leqslant \| f - g \|_u$. □

(20.29) **定义** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个测度空间，$\tau \in \boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$. 如果 $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi_{A_j}$ 是 X 上一个 $\mathscr{A}$ 可测简单函数，则定义

(i) $$\int_X s \, d\tau = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau(A_j).$$

如果f是X上一个有界、复值、$\mathscr{A}$可测函数，利用（11.35）便可以得到一个X上的$\mathscr{A}$可测简单函数序列$(s_n)_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\| f - s_n \|_u \to 0$$

考虑到引理（20.28），序列$\left(\int_X s_n d\tau\right)_{n=1}^{\infty}$便是一个Cauchy 复数列，因此定义

(ii) $$\int_X f d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\tau.$$

不难明白，这一定义并不依赖于特定的序列(s_n)〔当然要以(s_n)一致收敛到f为条件〕，所以这一积分是完全确定的，而且(i)和(ii)这两定义是一致的．同时，也不难明白，在τ是复测度的情况下，本定义与定义（19.17）相符合．

(20.30) **定理** （X，$\mathscr{A}$，μ）和τ如（20.29）所设．又设f和g是X上两个有界$\mathscr{A}$可测函数，$\alpha\in K$．则

(i) $$\int_X \alpha f d\tau = \alpha \int_X f d\tau,$$

(ii) $$\int_X (f+g) d\tau = \int_X f d\tau + \int_X g d\tau$$

(iii) $$\left| \int_X f d\tau \right| \leqslant \int_X |f| \, d|\tau|.$$

证 留作习题．

(20.31) **定理** （X，$\mathscr{A}$，μ）和τ如（20.29）所设．又设h是X上一个有界$\mathscr{A}$可测函数，并且$A=\{x\in X: h(x)\neq 0\}$是局部μ零集．则$\int_X h d\tau = 0$

证 利用（20.30）及（20.27.iii），得到

$$\left| \int_X h d\tau \right| \leqslant \int_X |h| \, d|\tau| = \int_X \xi_A |h| \, d|\tau| + \int_X \xi_{A'} |h| \, d|\tau|$$

$\leqslant \| h \|_u |\tau| (A) + 0 = 0$. □

(20.32) **定义** $(X, \mathscr{A}, \mu)$和τ如(20.29)所设，并设$g \in \mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$. 又设$f$是$\mathfrak{L}_\infty$中一个有界函数，满足：$\| f - g \|_\infty = 0$. 定义

$$\int_X g d\tau = \int_X f d\tau.$$

鉴于(20.31)，这个定义并不依赖于从$\mathfrak{L}_\infty$类引出的并由g所确定的特定的有界函数f，所以这个定义是非二义性的.

(20.33) **定理** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个测度空间，$\tau \in \boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$. 在$\mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$上由以下规则定义$L_\tau$：

(i) $$L_\tau(g) = \int_X g d\tau.$$

则L_τ是$\mathfrak{L}_\infty$上一个有界线性泛函，而且

(ii) $$\| L_\tau \| = \| \tau \|.$$

证 对于$g \in \mathfrak{L}_\infty$，取一个有界的$f \in \mathfrak{L}_\infty$，满足：$\| f - g \|_\infty = 0$，$\| f \|_u = \| g \|_\infty$(20.14). 根据(20.32)，得到

$$|L_\tau(g)| = \left| \int_X g d\tau \right| = \left| \int_X f d\tau \right|$$
$$\leqslant \int_X |f| d|\tau| \leqslant \| f \|_u \| \tau \|$$
$$= \| g \|_\infty \| \tau \|.$$

于是$L_\tau \in \mathfrak{L}_\infty^*$，而且

$$\| L_\tau \| \leqslant \| \tau \|. \tag{1}$$

设给定了$\varepsilon > 0$，取X的一个可测剖分$\{A_1, \cdots, A_n\}$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} |\tau(A_j)| > \| \tau \| - \varepsilon.$$

对于每个j，命$\alpha_j = \operatorname{sgn}(\overline{\tau(A_j)})$，$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_{A_j}$. 很明显，

$g \in \mathfrak{L}_\infty$, $\| g \|_\infty = \| g \|_u \leqslant 1$，而

$$|L_\tau(g)| = \left| \int_X g\, d\tau \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_j \tau(A_j) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\tau(A_j)| > \| \tau \| - \varepsilon.$$

既然 ε 是任意的，这就表明了

$$\| L_\tau \| \geqslant \| \tau \|. \tag{2}$$

结合(1)，(2)，便得出(ii). □

(20.33)的逆命题成立，这就是：凡 $\mathfrak{L}_\infty$ 上的有界线性泛函都是关于某个有限加性测度的积分. 通过考虑集的特征函数，便直接得出这一测度. 细节如下.

(20.34) 定理 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是任意一个测度空间，L 是 $\mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ 上一个有界线性泛函. 则存在 $\tau \in \boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$，使

$$L = L_\tau,$$

其中 L_τ 如(20.33)所设.

证 对于每个 $A \in \mathscr{A}$，命

$$\tau(A) = L(\xi_A) \tag{1}$$

则有

$$\sup\{ |\tau(A)| : A \in \mathscr{A} \} \leqslant \sup\{ |L(g)| : g \in \mathfrak{L}_\infty,\ \| g \|_\infty \leqslant 1 \}$$
$$= \| L \|.$$

这样，对于 τ (20.27.i) 便成立. 此外，当 A, B 是 $\mathscr{A}$ 中不相交的两个集时，$\xi_A + \xi_B = \xi_{B \cup A}$，从而

$$\tau(A \cup B) = L(\xi_{A \cup B}) = L(\xi_A + \xi_B) = L(\xi_A) + L(\xi_B)$$
$$= \tau(A) + \tau(B);$$

所以，还成立(20.27.ii). 又，当 $A \in \mathscr{A}$，A 是局部 μ 零集时，在 $\mathfrak{L}_\infty$ 中 $\xi_A = 0$，因而

$$\tau(A) = L(\xi_A) = L(0) = 0.$$

于是，（20.27.iii）也成立，所以$\tau\in \boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$.

设g是$\mathfrak{L}_\infty$中任意一个函数，取一个有界的$f\in\mathfrak{L}_\infty$，使$\|g-f\|_\infty=0$，$\|f\|_u=\|g\|_\infty$. 再取一个$\mathscr{A}$可测简单函数序列(s_n)，使$\|f-s_n\|_u\to 0$. 显然，由（1）、L的线性以及(20.29.i)，可得

$$L(s_n)=\int_X s_n d\tau \quad (n\in N). \qquad (2)$$

由于$\|f-s_n\|_\infty\to 0$，而L又在$\mathfrak{L}_\infty$上连续，所以由(2)和（20.29.ii）便推出

$$L(g)=L(f)=\lim_{n\to\infty}L(s_n)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n d\tau=\int_X f d\tau$$

$$=\int_X g d\tau=L_\tau(g). \quad \square$$

(20.35) 定理 设（X, $\mathscr{A}$, μ）是一个任意的测度空间，则由

$$T(\tau)=L_\tau$$

〔参看（20.33）〕所规定的映射T是把$\boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$映满共轭空间$\mathfrak{L}_\infty^*$的一个保范线性映射. 这样，$\boldsymbol{F}$便是一个Banach空间，而且，作为两个Banach空间，$\boldsymbol{F}$和$\mathfrak{L}_\infty^*$乃是同构的.

证 T是把$\boldsymbol{F}$映入$\mathfrak{L}_\infty^*$的保范映射这一事实，已为（20.33）所证明. 而T为线性的乃是平凡的事实. 定理（20.34）表明了T还是映满$\mathfrak{L}_\infty^*$的. 既然T既是线性的又是保范的，它便是1-1的，并保持Cauchy序列不变. 由于$\mathfrak{L}_\infty^*$是完备的，$\boldsymbol{F}$也必是完备的. □

(20.36) 评注 设X是一个任意的非空集. 和（7.3）一样，命$\mathfrak{B}(X)$表示X上有界、复值函数全体所成的空间. 这个空间还有些别的称呼：假如把X看作赋以离散拓扑的拓扑空间，那么

$$\mathfrak{B}(X)=\mathfrak{C}(X)$$

（7.8）；假如μ是定义在$\mathscr{P}(X)$上的计数测度（10.4.a），那么

$$\mathfrak{B}(X)=\mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{P}(X), \mu);$$

而在（14.26）中，这个空间曾记作$l_\infty(X)$〔$l_1(X)$的共轭空间〕. 就一切情况而论，在$\mathfrak{B}(X)$上所用到的范数一直是一致范数. 这样，定理（20.35）说明了，Banach空间$\mathfrak{B}(X)$的共轭空间$\mathfrak{B}(X)^*$等距同构于定义在$\mathscr{P}(X)$上的有界、复值、有限加性测度全体所成的空间.

(20.37) 习题 设X是一个非空集. 假定τ是定义在$\mathscr{P}(X)$上的一个有限加性测度，并满足：$\tau(X)=1$，而对于任意$A\subset X$，$\tau(A)=0$或1，命

$$\mathscr{U}=\{A: A\subset X, \tau(A)=1\}.$$

(a) 试证$\mathscr{U}$具有下列性质：

(i) $\varnothing\notin\mathscr{U}$；

(ii) 如果$A\in\mathscr{U}$，$A\subset B\subset X$，则$B\in\mathscr{U}$；

(iii) $A, B\in\mathscr{U}$，则$A\cap B\in\mathscr{U}$；

(iv) 如果$A\subset X$，则$A\in\mathscr{U}$，或者$A'\in\mathscr{U}$.

满足(i)—(iii)的任意族$\mathscr{U}$叫做**X中的滤子**. X中一个滤子如果满足(iv)，就叫做**X中的超滤子**.

(b) 试证：如果$\mathscr{V}$是X中任意一个超滤子，并在$\mathscr{P}(X)$上规定σ为

$$\sigma(A)=\begin{cases}1, & A\in\mathscr{V},\\ 0, & A\notin\mathscr{V},\end{cases}$$

则σ是$(X, \mathscr{P}(X))$上一个有限加性测度.

这样一来，我们便建立了超滤子与有限加性**零一测度**之间的一一对应.

(c) 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是任意一个测度空间，τ是$\boldsymbol{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$中一个有限加性测度. 试证：对于任意$f, g\in\mathfrak{L}_\infty$，等式

$$\int_X fg\,d\tau=\int_X f\,d\tau\cdot\int_X g\,d\tau$$

成立的充要条件是，对于任意$A\in\mathscr{A}$，$\tau(A)=0$或1.

(20.38) **习题** 设X是一个非空集. X中一个滤子$\mathscr{U}$如果满足条件$\bigcap\mathscr{U}=\varnothing$，则称之为**自由滤子**. 称其余一切滤子为**固定滤子**(fixed filter). 试证以下命题.

(a) 如果$\mathscr{U}$是X中一个固定超滤子，则有一点$p\in X$，使

$$\mathscr{U}=\{A\in\mathscr{P}(X):p\in A\}.$$

(b) 如果X是有限的，则凡X中的超滤子都是固定超滤子.

(c) 如果X是无限的，则X中存在一个自由超滤子.〔设$\mathscr{F}=\{A\in\mathscr{P}(X):A'$是有限的$\}$. 证明$\mathscr{F}$是一个滤子. 利用Zorn引理证实存在一个含有$\mathscr{F}$的极大滤子$\mathscr{V}$. 证明$\mathscr{V}$是一个自由超滤子.〕

(d) 如果$\mathscr{V}$是N中一个自由超滤子，σ如(20.37)所设，则对于一切有限集$F\subset N$，$\sigma(F)=0$，从而σ不是可数加性的.

(e) 如果σ和(d)中一样，则对于任意$f\in l_\infty^r$，都有

$$\varliminf_{n\to\infty}f(n)\leqslant\int_N fd\sigma\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}f(n).$$

〔先考虑$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$的情况. 在一般情况下，可求两个函数(序列!)$g$和$h$，使$g\leqslant f\leqslant h$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n)$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}h(n)$.〕

(20.39) **习题** 试证：存在一个定义在$\mathscr{P}([0,1])$上的非负、实值、有限加性测度τ，它满足条件：对于适合$A\subset[0,1]$的一切$A\in\mathscr{M}_\lambda$，都有$\tau(A)=\lambda(A)$.〔提示. 在$\{f:f$是$[0,1]$上一个有界、实值、Lebesgue可测函数$\}$上定义L为

$$L(f)=\int_0^1 f(x)dx.$$

利用Kreĭn开拓定理(14.27)把L开拓成为$\mathfrak{B}^r([0,1])$上的一个非负线性泛函，这里$\mathfrak{B}^r([0,1])$是$[0,1]$上有界实值函数全体所成的空间.〕

(20.40) **习题** (a) 试证$\mathfrak{B}^r(R)$上存在一个线性泛函M，

使对于任意$f\in\mathfrak{B}^r(R)$和任意$t\in R$，都有

(i) $\inf\{f(x):x\in R\}\leqslant M(f)\leqslant\sup\{f(x):x\in R\}$，

(ii) $$M(f_t)=M(f).$$ ①

〔提示 设$\mathfrak{H}$是$\mathfrak{B}^r(R)$的线性子空间，它由形如f_t-f的函数的有限和全体组成，其中$f\in\mathfrak{B}^r(R)$，$t\in R$. 对于

$$h=\sum_{k=1}^{n}[(f_k)_{t_k}-f_k]\in\mathfrak{H},$$

证明

$$\inf\{h(x):x\in R\}\leqslant 0.$$

如果不然，可取$\varepsilon>0$，使对于任意$x\in R$，$h(x)\geqslant\varepsilon$. 设p是任意正整数，命Φ表示$\{1,2,\cdots,n\}$到$\{1,2,\cdots,p\}$内的函数φ全体所成的集. 显然$\overline{\overline{\Phi}}=p^n$. 对于每个$\varphi\in\Phi$，命

$$x(\varphi)=\varphi(1)t_1+\varphi(2)t_2+\cdots+\varphi(n)t_n.$$

对于每个$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，证实不等式

$$\sum_{\varphi\in\Phi}[f_k(x(\varphi)+t_k)-f_k(x(\varphi))]\leqslant 2p^{n-1}\|f_k\|_u,$$

然后推证

$$p^n\varepsilon\leqslant\sum_{\varphi\in\Phi}h(x(\varphi))\leqslant 2p^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_u.$$

这个矛盾说明了$h\in\mathfrak{H}$没有正的下界. 接下去利用(14.13)，可得到$M\in\mathfrak{B}^r(R)^*$，它满足：$M(1)=1$，$\|M\|=1$，以及对于任意$h\in\mathfrak{H}$，$M(h)=0$. 由此不难得出(i)和(ii). 〕

(b) 试证：存在一个定义在$\mathscr{P}(R)$上的（非负、广义实值）有限加性测度μ，它合于条件：

(iii) 对于任意$A\in\mathscr{M}_\lambda$，$\mu(A)=\lambda(A)$，

(iv) 对于任意$A\subset R$和任意$t\in R$，$\mu(A+t)=\mu(A)$. 〔提示. τ如(20.39)所设. 在$\mathscr{P}(R)$上规定ν为

---

①照例，f_t表示由t产生的f的平移：$f_t(x)=f(x+t)$.

$$\nu(A)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tau((A\cap[n,\ n+1[)-n).$$

证实ν是有限加性的，而且对于任意$A\in\mathscr{M}_\lambda$，$\nu(A)=\lambda(A)$. 对于$A\subset R$，在R上由以下规则定义f_A：

$$f_A(t)=\nu(A+t).$$

设M和(a)小题一样，并在$\mathscr{P}(R)$上由如下规则定义μ：

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}M(\min\{f_A,\ n\}).$$

不难证明(iii). 为了证明μ是加性的，可利用不等式

$$\min\{f_A+f_B,n\}\leqslant\min\{f_A,n\}+\min\{f_B,n\}$$
$$\leqslant\min\{f_A+f_B,2n\}.$$

要证明(iv)，可利用等式

$$f_{(A+t)}(x)=f_A(x+t).\ )$$

我们要选讲的 Lebesgue-Radon-Nikodým 定理的第三个应用，是用其研究又一个共轭空间. 在(12.36)中，我们曾经看到，如果X是一个局部紧Hausdorff空间，那么，凡$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的非负线性泛函I，都对于X上某个正则Borel测度ι，具有

$$I(f)=\int_X f d\iota$$

的形状. 这一事实对于同一化复Banach空间$\mathfrak{C}_0(X)$的共轭空间颇为有用.

(20.41) 定义 设X是一个局部紧Hausdorff空间. 并设μ是定义在X的Borel集所成的σ代数$\mathscr{B}(X)$上的一个复测度. 如果对于每个$E\in\mathscr{B}(X)$和每个$\varepsilon>0$，总存在一个紧集F和一个开集U，使得

$$F\subset E\subset U,$$

而且对于任意$A\in\mathscr{B}(X)$，只要

$$A\subset U\cap F',$$

就有

$$|\mu(A)|<\varepsilon,$$

则称μ是X**上的复正则Borel测度**.

命$\boldsymbol{M}(X)$表示X上复正则Borel测度全体所成的集.

(20.42) **注意** 如果$\mu\in\boldsymbol{M}(X)$，$\mu\geqslant 0$，则由于所有复测度都是有界的(19.13.v)，μ便是一个有限测度. 于是，定理(12.40)表明了，(20.41)和(12.39)所给出的μ的正则性的两个定义是等价的.

(20.43) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，μ, $\nu\in\boldsymbol{M}(X)$，$\alpha\in K$. 则对于所集态定义的运算，有

(i) $\alpha\mu\in\boldsymbol{M}(X)$,

(ii) $\mu+\nu\in\boldsymbol{M}(X)$.

这样，按照由$\|\mu\|=|\mu|(X)$所规定的范数，$\boldsymbol{M}(X)$便成为**一个复赋范线性空间**.

证 留作习题.

(20.44) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，μ是定义在$\mathscr{B}(X)$上的一个复测度，$\sum_{j=1}^{4}\alpha_j\mu_j$是(19.15.c)所说的$\mu$的Jordan分解. 则以下三句话彼此等价：

(i) $\mu\in\boldsymbol{M}(X)$;

(ii) $|\mu|\in\boldsymbol{M}(X)$;

(iii) $\mu_j\in\boldsymbol{M}(X)$, $j=1,2,3,4$.

证 我们反复利用定理(19.13). 由不等式

$$|\mu|(U\cap F')\leqslant 4\cdot\sup\{|\mu(A)|:A\in\mathscr{B}(X),\ A\subset U\cap F'\}$$

便得出(i)蕴涵(ii)这一事实. 不等式

$$\mu_j(U\cap F')\leqslant|\mu|(U\cap F')\ (j=1,2,3,4)$$

表明(ii)蕴涵(iii). 而由不等式

$$|\mu(A)|\leqslant\sum_{j=1}^{4}\mu_j(A)$$

推知(iii)又蕴涵(i). □

(20.45) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，

$\mu\in \boldsymbol{M}(X)$，并在$\mathfrak{C}_0(X)$上由以下规则定义L_μ：

(i) $$L_\mu(f)=\int_X f d\mu.$$

则L_μ是Banach空间$\mathfrak{C}_0(X)$上一个有界线性泛函，而且

(ii) $$\|L_\mu\|=\|\mu\|.$$

证 每个$f\in\mathfrak{C}_0$都是有界连续函数，从而由于$|\mu|$是有限测度(19.13.v)，f便属于$\mathfrak{L}_0(X,\mathscr{B}(X),|\mu|)$. 这样$L_\mu$便是$\mathfrak{C}_0$上一个线性泛函. 同时，(19.38.iv)还表明，如果$f\in\mathfrak{C}_0$，那么

$$|L_\mu(f)|\leqslant\int_X|f|\,d|\mu|\leqslant\|f\|_u\|\mu\|.$$

因此$L_\mu\in\mathfrak{C}_0^*$，并且

$$\|L_\mu\|\leqslant\|\mu\|. \tag{1}$$

为了证明(1)的反向不等式，利用(19.38)可得到X上一个复值Borel可测函数f_0，它满足：对于任意$x\in X$，$|f_0(x)|=1$，而且对于任意$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{B}(X),|\mu|)$，

$$\int_X f d\mu=\int_X ff_0 d|\mu|. \tag{2}$$

任给$\varepsilon>0$. 根据(13.21)，必存在一个函数$g\in\mathfrak{C}_{00}$，适合：$\|g\|_u\leqslant\|\bar{f}_0\|_u=1$，而且

$$\int_X|\bar{f}_0-g|\,d|\mu|<\varepsilon. \tag{3}$$

于是(2)和(3)便蕴涵

$$\|\mu\|=|\mu|(X)=\int_X\bar{f}_0f_0d|\mu|=\int_X\bar{f}_0d\mu$$

$$<\left|\int_X gd\mu\right|+\varepsilon=|L_\mu(g)|+\varepsilon. \tag{4}$$

既然ε是任意的，而且$\|g\|_u\leqslant1$，(4)便蕴涵

$$\|\mu\|\leqslant\|L_\mu\|. \tag{5}$$

结合(1),(5)便完成了证明. □

我们接下来要证明,凡$\mathfrak{C}_0(X)^*$的元素,都对于某个$\mu\in\boldsymbol{M}(X)$,具有L_μ的形状. 须先建立一个引理.

(20.46) 引理 设X是一个局部紧Hausdorff空间, $L\in\mathfrak{C}_0(X)^*$. 并在$\mathfrak{C}_0^+$上由以下规则定义I: 对于任意$f\in\mathfrak{C}_0^+$,

(i) $I(f)=\sup\{|L(g)|:g\in\mathfrak{C}_0,\ |g|\leqslant f\}$.

则I可以开拓成为$\mathfrak{C}_0^*$中一个非负线性泛函, 使得

$$\|I\|=\|L\|.$$

证 显然, 当$f\in\mathfrak{C}_0^+$时,

$$I(f)\leqslant\sup\{\|L\|\cdot\|g\|_u:g\in\mathfrak{C}_0,\ |g|\leqslant f\}$$
$$=\|L\|\cdot\|f\|_u<\infty. \qquad (1)$$

这样, I在$\mathfrak{C}_0^+$上为实值的. 同时也很清楚,对于$f\in\mathfrak{C}_0^+$, $\alpha\geqslant0$, 成立

$$I(\alpha f)=\alpha I(f). \qquad (2)$$

我们来证明I在$\mathfrak{C}_0^+$上是加性的. 设f_1, f_2属于$\mathfrak{C}_0^+$, 给定$\varepsilon>0$, 取g_1, $g_2\in\mathfrak{C}_0$, 使

$$|g_j|\leqslant f_j,\quad |L(g_j)|>I(f_j)-\frac{\varepsilon}{2}\quad (j=1,\ 2).$$

现在记$L(g_j)=\beta_j|L(g_j)|$, 其中$\beta_j\in K$, $|\beta_j|=1$ ($j=1,2$), 又命$\beta=\beta_2\bar{\beta}_1$. 那么$|\beta|=1$, 并得到

$$\begin{aligned}I(f_1)+I(f_2)&<|L(g_1)|+|L(g_2)|+\varepsilon\\&=\bar{\beta}_1L(g_1)+\bar{\beta}_2L(g_2)+\varepsilon\\&=|\beta L(g_1)+L(g_2)|+\varepsilon=|L(\beta g_1+g_2)|+\varepsilon\\&\leqslant I(f_1+f_2)+\varepsilon\end{aligned}$$

(注意, $|\beta g_1+g_2|\leqslant|g_1|+|g_2|\leqslant f_1+f_2$). 于是

$$I(f_1)+I(f_2)\leqslant I(f_1+f_2). \qquad (3)$$

为了证实反向不等式成立, 取$g\in\mathfrak{C}_0$, 使

$$|g|\leqslant f_1+f_2,\quad |L(g)|\geqslant I(f_1+f_2)-\varepsilon.$$

命

$$h_1=\min\{f_1, |g|\}, \quad h_2=|g|-h_1.$$

显而易见，h_1，$h_2\in\mathfrak{C}_0^+$，$h_1\leqslant f_1$，$h_2\leqslant f_2$，$h_1+h_2=|g|$. 命

$$g_j=h_j\operatorname{sgn}g \quad (j=1, 2).$$

便有：$g_j\in\mathfrak{C}_0$；$|g_j|=h_j\leqslant f_j$；$g_1+g_2=g$. 因而

$$I(f_1+f_2)-\varepsilon\leqslant|L(g)|=|L(g_1+g_2)|\leqslant|L(g_1)|+|L(g_2)|$$
$$\leqslant I(f_1)+I(f_2);$$

结合(3)，这就证实了

$$I(f_1+f_2)=I(f_1)+I(f_2). \tag{4}$$

我们现在分两步把 I 开拓到 $\mathfrak{C}_0$上面. 第一步，当$f\in\mathfrak{C}_0^r$时，记

$$f=f^+-f^-,$$

这里和往常一样，$f^+=\max\{f,0\}$，$f^-=-\min\{f,0\}$，并规定

$$I(f)=I(f^+)-I(f^-).$$

注意到如果g_1，g_2是$\mathfrak{C}_0^+$中适合$f=g_1-g_2$的任意两个函数，那么$f^++g_2=g_1+f^-$，从而由(4)推知$I(f)=I(g_1)-I(g_2)$. 通过简单计算便知道 I 在$\mathfrak{C}_0^r$上为实线性的. 第二步，对于$f\in\mathfrak{C}_0$，规定

$$I(f)=I(\operatorname{Re}f)+iI(\operatorname{Im}f).$$

再作一次显而易见的计算便知道，I在$\mathfrak{C}_0$上为复线性的.

现在已很明白〔利用(i)〕，I乃是$\mathfrak{C}_0$上一个非负线性泛函. 正如(9.4)那样，对于任意$f\in\mathfrak{C}_0$，可以得到

$$|I(f)|\leqslant I(|f|).$$

由这一事实以及(1)，便推出

$$\|I\|=\sup\{|I(f)|: f\in\mathfrak{C}_0, \ \|f\|_u\leqslant 1\}$$
$$\leqslant\sup\{I(|f|): f\in\mathfrak{C}_0, \ \|f\|_u\leqslant 1\}\leqslant\|L\|.$$

为了证实反向不等式成立，给定$\varepsilon>0$，然后取$g\in\mathfrak{C}_0$，使

$$\|g\|_u\leqslant 1, \quad |L(g)|>\|L\|-\varepsilon.$$

由(i)得到

$$\|L\|-\varepsilon<|L(g)|\leqslant I(|g|)\leqslant\|I\|.$$

所以$\|I\|=\|L\|$. □

(20.47) **定理** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，$L\in \mathfrak{C}_0(X)^*$. 则存在一个复测度$\mu\in \boldsymbol{M}(X)$，使对于任意$f\in \mathfrak{C}_0(X)$,

(i) $L(f)=\int_X f d\mu = L_\mu(f)$.

证 设$\bar{I}$是如(20.46)所说的由L所构造出来的.根据F.Riesz表示定理(12.36)，必存在一个如§9所说的X上的测度ι，使对于任意$f\in \mathfrak{C}_{00}(X)$，都有

$$\bar{I}(f)=\int_X f d\iota.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\iota(X)=\bar{I}(1)&=\sup\{\bar{I}(f): f\in \mathfrak{C}_{00}^+,\ f\leqslant 1\}\\ &\leqslant \sup\{|\bar{I}(f)|: f\in \mathfrak{C}_0,\ \|f\|_u\leqslant 1\}\\ &=\|\bar{I}\|=\|L\|.\end{aligned}$$

这样ι便是有限测度. 我们知道(13.21)，$\mathfrak{C}_{00}$是$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$的一个稠密线性子空间. 由(20.46.i)可知，关于$\mathfrak{L}_1$范数，L乃是这个稠密子空间上范数$\leqslant 1$的一个有界线性泛函: 其实，对于所有$f\in \mathfrak{C}_{00}$，都有

$$|L(f)|\leqslant \bar{I}(|f|)=\int_X |f|\,d\iota=\|f\|_1.$$

这样，根据(14.40)(或根据Hahn-Banach定理)，可以把L开拓成为$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$上的一个有界线性泛函$L'$，使得$\|L'\|\leqslant 1$. 现在应用(20.19)，可以得到一个函数$g\in \mathfrak{L}_\infty(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$，使得$\|g\|_\infty=\|L'\|\leqslant 1$，并且对于任意$f\in \mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$,

$$L'(f)=\int_X f\,\bar{g}\,d\iota.$$

然后在$\mathscr{M}_\iota$上由以下规则定义μ:

$$\mu(E)=\int_X g\,d\iota.$$

那么μ是$(X,\mathscr{M}_\iota)$上一个复测度，μ关于ι是绝对连续的，而$\bar{g}$则是如(19.36)所说的μ关于ι的唯一的 Lebesgue-Radon-Nikody'm 导数.（实际上$|\mu|$就是ι，但是在这儿我们并不需要这一事实.）现在由(19.36)知道，如果$f\in \mathfrak{C}_0(X)\subset \mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\iota,|\mu|)$，那么

$$\int_X f d\mu = \int_X f\,\bar{g}\,d\iota = L'(f) = L(f);$$

末尾等式是由下述事实得到的：L和L'在$\mathfrak{C}_0$上关于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M}_\iota,\iota)$范数都是连续的，而且在$\mathfrak{L}_1$稠密子空间$\mathfrak{C}_{00}$上是一致的. 尚需证明$\mu$是正则的. 设$E\in\mathscr{M}_\iota$，并给定$\varepsilon>0$. 因为$\iota$是正则的、有限的，所以存在一个紧集$F$和一个开集$U$，适合

$$F\subset E\subset U,\quad \iota(U\cap F')<\varepsilon.$$

这样一来，如果$A\in\mathscr{M}_\iota$，$A\subset U\cap F'$，那么

$$|\mu(A)| = \left|\int_A \bar{g}\,d\iota\right| \leqslant \iota(A) \leqslant \iota(U\cap F') < \varepsilon.$$

由此$\mu\in \boldsymbol{M}(X)$，这就完成了证明. □

(20.48) Riesz表示定理 设X是一个局部紧Hausdorff空间。则由

$$T(\mu)=L_\mu$$

所规定的映射T〔参看(20.45)〕是把$\boldsymbol{M}(X)$映满$\mathfrak{C}_0(X)^*$的一个保范线性映射. 这样，$\boldsymbol{M}(X)$便是一个Banach空间，而且，作为两个Banach空间，$\boldsymbol{M}(X)$和$\mathfrak{C}_0(X)^*$乃是同构的.

证 T是把$\boldsymbol{M}$映入$\mathfrak{C}_0^*$的保范映射这一事实，已为(20.45)所证明. 从(20.47)推知，T还是映满$\mathfrak{C}_0^*$的. T是线性的乃是平凡的事实. 既然T既是线性的又是保范的，T便是1-1的，并保持Cauchy序列不变. 这样，由于$\mathfrak{C}_0^*$是完备的，$\boldsymbol{M}$也必是完备的. □

(20.49) 习题 设X是一个局部紧Hausdorff空间，$\mu\in\boldsymbol{M}(X)$. 又设I是如(20.46)所说的由L_μ所构造的$\mathfrak{C}_0(X)$上的非负线性泛函. 试证：如果ι是象(12.36)那样相应于I的测度，那么$\iota=|\mu|$. 〔证明

对于任意$f\in \mathfrak{C}_0^+$，$\int_X f d|\mu| = \sup\{|\int_X g d\mu| : g\in \mathfrak{C}_0, |g|\leqslant f\}$.〕

(20.50) **习题** 设X是一个局部紧Hausdorff空间，并存在$\mu\in \boldsymbol{M}(X)$，使对于任意$x\in X$，$\mu(\{x\})=0$，而且$|\mu|(X)>0$. 试证：Banach空间$\mathfrak{C}_0(X)$不是自反的.〔在$\boldsymbol{M}(X)$上由$\Phi(\nu)=\sum_{x\in X}\nu(\{x\})$规定$\Phi$.〕

(20.51) **习题** (a) 设X是一个局部紧Hausdorff空间，假定τ是定义在$\mathscr{B}(X)$上的一个(非负)有限加性测度，并且τ是正则的；就是说，τ满足定义(12.39)的(i)，(ii)，(iii)三个条件. 试证τ还是可数加性的.〔利用(12.36)可得到X上一个正则Borel测度ι，使对于任意$f\in \mathfrak{C}_{00}$，$\int_X f d\tau=\int_X f d\iota$. 然后证实对于每个Borel集$E$，$\tau(E)=\iota(E)$.〕

(b) 试证：定义在$\mathscr{B}(X)$上的有界、复值、有限加性测度τ，只要它在(20.41)意义下是正则的，那么它必是可数加性的，就是说，$\tau\in \boldsymbol{M}(X)$.

在(c)，(d)两小题中，设ι是X上一个σ有限正则Borel测度. 试证以下两个断言.

(c) 如果ν是定义在$\mathscr{B}(X)$上的一个复测度，并且$\nu\ll\iota$，那么$\nu\in \boldsymbol{M}(X)$.

(d) 如果$\nu\in \boldsymbol{M}(X)$，而$\nu=\nu_1+\nu_2$是ν关于ι的Lebesgue分解：那么$\nu_j\in \boldsymbol{M}(X)(j=1,2)$.

(20.52) **习题** **关于$\mathfrak{C}_{00}(X)$和$\mathfrak{C}_0(X)$的结构的进一步讨论.** (a) 设X是一个非空局部紧Hausdorff空间，M是$\mathfrak{C}_0(X)$上一个**积性线性泛函**. 所谓$\mathfrak{C}_0(X)$上的积性线性泛函，指的是M满足(9.1.i)和(9.1.ii)，$M\neq 0$，以及对于任意f，$g\in \mathfrak{C}_0(X)$，都成立

$$M(fg)=M(f)M(g).$$

试证必存在一点$a\in X$，使对于任意$f\in \mathfrak{C}_0(X)$，都有

$$M(f)=E_a(f)=f(a).$$

〔提示. 先证M是连续的，这样证比较简便. 事实上，对于任意

$f \in \mathfrak{C}_0$，有

$$|M(f)| \leqslant \| f \|_u.$$

为了证实这一点，假定$M(f)=\alpha$，而$|\alpha| > \| f \|_u$．命

$$g = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} f^k.$$

这个级数一致收敛，因而$g \in \mathfrak{C}_0$．验证$\alpha^{-1}f+g-\alpha^{-1}fg = 0$．然后就会得出

$$0=M(0)=\alpha^{-1}M(f)+M(g)-\alpha^{-1}M(f)M(g)$$
$$=1+M(g)-M(g)=1.$$

现在知道M是有界的，应用(20.47)可写出

$$M(f)=\int_X f d\mu=\int_X f\,\overline{g}\,d\iota,$$

其中$\mu \in \boldsymbol{M}(X)$，$\iota \in \boldsymbol{M}^+(X)$，$g \in \mathfrak{L}_\infty(X, \mathscr{B}(X), \iota)$，$\| g \|_\infty \leqslant 1$．如果$A$，$B \in \mathscr{B}(X)$，$\iota(A)$和$\iota(B)$都是正的，那么

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

这可以从ι的正则性和恒等式$M(f_1f_2)=M(f_1)M(f_2)$直接推出．现在容易看出ι仅取一个正值，这是因为

$$\iota(A)=\iota(A\cap B')+\iota(A\cap B),\quad \iota(B)=\iota(A'\cap B)+\iota(A\cap B).$$

$\{F \subset X: F$是紧的，$\iota(F)>0\}$是非空族，并具有有限交性，由此它必有非空总交，比如说F_0．不难看出$\iota(F_0)>0$，F_0没有真非空子集，就是说，对于某个$a \in X$，$F_0=\{a\}$．由此立即得出结论：

$$M(f)=f(a).〕$$

(b) 试证：凡$\mathfrak{C}_{00}(X)$上的积性线性泛函M，都对于某个$a \in X$，具有E_a的形状．

〔提示．取$f_0 \in \mathfrak{C}_{00}$，使$M(f_0)=1$．命

$$U=\{x \in X: f_0(x) \neq 0\}.$$

再命

$$\mathfrak{J}=\{f \in \mathfrak{C}_{00}(X): f(U') \subset \{0\}\}.$$

显然在某种意义上，则可以把$\mathfrak{F}$和$\mathfrak{C}_0(U)$看作是等同的（注意U是局部紧的）．在$\mathfrak{F}$上泛函M是积性的、非零的，由此(a)小题就表明，对于任意$f\in\mathfrak{F}$，$M(f)=f(a)$，其中a是U中一点．给定了$g\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，函数gf_0属于$\mathfrak{F}$，$M(gf_0)=M(g)$．由于$f_0(a)=1$，便完成了证明．〕

(c) 把(a)小题作如下推广．设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个有限测度空间，并且$\mu(X)>0$．试证：对于任意$f\in\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{A},\mu)$等式

$$\int fg d\mu=\int f d\mu\int g d\mu$$

成立的充要条件是，μ仅取0和1两个值．〔对照(20.37.c)．〕

(d) (a)小题可以作如下解释．所谓代数A中一个**左理想**，是指一个线性子空间I，它对于左乘以A的任意元素的运算是封闭的，即

$$x\in I\text{及}y\in A\quad\text{蕴涵}\quad yx\in I.$$

完全类似地定义**右理想**．如果一个集I既是左理想，又是右理想，则称之为一个**双边理想**．在交换代数中，右理想与左理想之间的差别消失，自然，这时就使用"理想"这一述语．

设I是代数A中一个理想，如果只有整个代数A是真包含I的理想，则称I是**极大理想**．

在交换Banach代数$\mathfrak{C}_0(X)$中，每个集

$$\{f\in\mathfrak{C}_0(X):f(a)=0\}$$

都是闭极大理想．而且，凡$\mathfrak{C}_0(X)$中的极大理想（不预先假定是闭的）都具有这种形状．

〔除最后一个断言外，其余断言易于证明．对最后一个断言作如下提示．如果$\mathfrak{J}$是$\mathfrak{C}_0(X)$中一个理想，并存在一点$a\in X$，使对于任意$f\in\mathfrak{J}$，$f(a)=0$．那么仅当对于某个$b\in X$，

$$\mathfrak{J}=\{f\in\mathfrak{C}_0(X):f(b)=0\}$$

时，$\mathfrak{J}$才能是最大的．如果$\mathfrak{J}$是这样的理想，即对于任意$a\in X$，$f(a)\neq 0$对于某个$f\in\mathfrak{J}$成立，那么，由简单的紧性论证以及当$f\in\mathfrak{J}$时，$\bar{f}f\in\mathfrak{J}$这一事实，就知道$\mathfrak{J}\supset\mathfrak{C}_{00}(X)$．考虑代数

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{C}_0(X)/\mathfrak{J}.$$

它是K上一个线性空间，又是根本没有真理想的一个代数．由此推知，$\mathfrak{S}$是一个域，或者作为所有乘积都等于0的线性空间，$\mathfrak{S}$就是K。命τ表示把$\mathfrak{C}_0(X)$映满$\mathfrak{S}$的标准映射：对于任意$f\in\mathfrak{C}_0(X)$，

$$\tau(f)=f+\mathfrak{J}.$$

假如$\mathfrak{S}$是一个域，设h是$\mathfrak{C}_0(X)$中一个函数，使得$\tau(h)$成为$\mathfrak{S}$的乘法单位元．既然$\mathfrak{J}$包含$\mathfrak{C}_{00}(X)$，便存在一个元素$\varphi\in\mathfrak{J}$，使得

$$\|h-\varphi\|_u<1.$$

命

$$\psi=-\sum_{k=1}^{\infty}(h-\varphi)^k.$$

那么正如(a)小题那样，可以证明

$$h=\varphi-\psi\varphi+\psi h-\psi.$$

显然$\varphi-\psi\varphi$属于$\mathfrak{J}$，$\psi h-\psi$也属于$\mathfrak{J}$，这是因为

$$\tau(\psi h-\psi)=\tau(\psi)\tau(h)-\tau(h)=\tau(h)-\tau(h)=0.$$

所以h属于$\mathfrak{J}$，从而$\tau(h)=0$，矛盾．假如$\mathfrak{S}$不是一个域，那么$\mathfrak{S}$中所有乘积都等于0，特别说来，如果$f\in\mathfrak{C}_0^+$，那么$f=f^{\frac{1}{2}}\cdot f^{\frac{1}{2}}$便属于$\mathfrak{J}$．由此可直接得出$\mathfrak{J}=\mathfrak{C}_0$．〕

(f) (e)小题可以作以下开拓．设$\mathfrak{J}$是$\mathfrak{C}_0(X)$中任意一个闭真理想．那么，存在一个X的非空闭子集F，使得

$$\mathfrak{J}=\{f\in\mathfrak{C}_0(X):f(F)=\{0\}\}.$$

〔提示．可利用(6.80)．〕

(20.53) 讨论 我们要选讲的Lebesgue-Radon-Nikodým定理的最后一个应用，是论述在一个确定的集上的σ代数序列以及其上的测度．

我们首先来推广(19.43)中所定义的Lebesgue-Radon-Nikodým导数．设X是一个集，$\mathscr{A}$是X的子集所成的一个σ代数，μ是$\mathscr{A}$上一个σ有限测度，η是$\mathscr{A}$上一个σ有限广义测度，命

$$\eta=\eta_a+\eta_s$$

是η关于μ的（唯一的）Lebesgue分解〔参看(19.42)〕. 又设f是X上一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数. 如果以下四个条件成立，就说f是**η关于μ的导数**.

(i) 对于任意$A\in\mathscr{A}$，$\eta_a(A)=\int_A fd\mu$；

存在两个集B，$P\in\mathscr{A}$，适合

(ii) $\mu(B)=0$，$|\eta_s|(B')=0$；

(iii) (P, P')是关于η_s的一个Hahn分解；

(iv) 在$B\cap P$上，$f=\infty$，而在$B\cap P'$上，$f=-\infty$.

显而易见，当$\eta\ll\mu$（$\eta_s=0$）时，上述定义是与(19.43)一致的. 这时无非是取$B=P=\varnothing$.

为了确知这样的导数是存在的，设B是$\mathscr{A}$中使(ii)成立($\eta_s\perp\mu$)的任意一个集，(P, P')是关于η_s的任意一个Hahn分解(19.6)，f_0是η_a关于μ的任意一个Lebesgue-Radon-Nikodým导数〔把(19.24)应用于η_a^+和η_a^-，得出f_0^+和f_0^-〕. 现在规定f为

$$f(x)=\begin{cases}f_0(x), & x\in B'\\ \infty, & x\in B\cap P,\\ -\infty, & x\in B\cap P'.\end{cases}$$

由于$f=f_0$ μ-a.e.，自然f就是一个导数.

以下引理刻划了导数的特性，殊为有用. 它的优点在于没有提到Lebesgue分解或Hahn分解.

(20.54) **引理** 设g是X上一个广义实值、$\mathscr{A}$可测函数. 对于每个实数α，命

$$G_\alpha=\{x\in X: g(x)\geqslant\alpha\},$$
$$L_\alpha=\{x\in X: g(x)\leqslant\alpha\},$$

当且仅当以下两个条件成立时，函数g是η关于μ的导数：

(i) 对于任意实数α和任意$A\in\mathscr{A}$，都有

$$\eta(G_\alpha\cap A)\geqslant\alpha\mu(G_\alpha\cap A);$$

(ii) 对于任意实数α和任意$A\in\mathscr{A}$，都有

$$\eta(L_\alpha\cap A)\leqslant\alpha\mu(L_\alpha\cap A).$$

证 假定g是η关于μ的导数，B和P如(20.53)所设（当然要把f换成g）．那么，对于所有$A\in\mathscr{A}$及所有$\alpha\in R$，都有

$$\eta(G_\alpha\cap A)=\eta_a(G_\alpha\cap A)+\eta_s(G_\alpha\cap A)$$

$$=\int_{G_\alpha\cap A}gd\mu+\eta_s(G_\alpha\cap A\cap B)$$

$$\geqslant\alpha\mu(G_\alpha\cap A)+\eta_s(G_\alpha\cap A\cap B). \qquad (1)$$

既然在G_α上$g\geqslant\alpha>-\infty$，由(20.53.iv)便知道$G_\alpha\cap A\cap B\subset P$，从而$\eta_s(G_\alpha\cap A\cap B)\geqslant 0$(19.4)．这一事实以及(1)便蕴涵(i)．可以类似地证明(ii)，这一论证留给读者．

反过来，假定对于函数g，(i)和(ii)都成立．设f是如(20.53)所定义的η关于μ的任意一个导数，B和P也如(20.53)所设．首先证实$g=f$ μ-a.e.如果不然，那么一想就明白，或者有

(a) 存在两个实数α,β和一个集$F\in\mathscr{A}$，具有性质：$0<\mu(F)<\infty$，$|\eta_s|(F)=0$，并对于任意$x\in F$，$f(x)\leqslant\alpha<\beta\leqslant g(x)$；或者有

(b) 存在两个实数α,β和一个集$F\in\mathscr{A}$，具有性质：$0<\mu(F)<\infty$，$|\eta_s|(F)=0$，并对于任意$x\in F$，$g(x)\leqslant\alpha<\beta\leqslant f(x)$.

倘若(a)成立，根据(i)便得到

$$\eta(F)=\eta(G_\beta\cap F)\geqslant\beta\mu(G_\beta\cap F)=\beta\mu(F). \qquad (2)$$

还得到

$$\eta(F)=\eta_a(F)=\int_F fd\mu\leqslant\alpha\mu(F). \qquad (3)$$

由(2)和(3)便引出明显的矛盾，从而(a)肯定不成立．同样，(b)也不成立．于是$g=f$ μ-a.e.，由此(20.53.i)对于g也成立．

现在作下列规定：

$L=\{x\in X:g(x)=-\infty\}$；$G=\{x\in X:g(x)=\infty\}$；

$B_0=B\cap(L\cup G)$；$P_0=B\cap G$.

我们要证实(20.53.ii)—(20.53.iv)对于B_0，P_0和g都成立．既然

$B_0\subset B$，$\mu(B_0)=0$ 便是显然的，而(20.53.iv)成立也是很明显的. 这样，只要证实 $|\eta_s|(B_0')=0$，(P_0,P_0') 是关于 η_s 的一个Hahn分解这两件事就行了.

既然$\mu(B)=0$，$\eta_a\ll\mu$，便有 $|\eta_a|(B)=0$. 于是由条件(ii)知道，对于所有$A\in\mathscr{A}$及所有$\alpha\in R$，都有

$$\eta_s(L_\alpha\cap A\cap B)=\eta(L_\alpha\cap A\cap B)\leqslant\alpha\mu(L_\alpha\cap A\cap B)=0. \quad (4)$$

显而易见

$$L_1\subset L_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}L_n=G';$$

所以，由(19.3.ii)及(4)可推知，对于所有$A\in\mathscr{A}$，

$$\eta_s(G'\cap A\cap B)=\lim_{n\to\infty}\eta_s(L_n\cap A\cap B)\leqslant 0.$$

我们得出结论：$G'\cap B$关于η_s是非正集. 同样，利用(i)以及$G_{-1}\subset G_{-2}\subset\cdots$ 和 $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{-n}=L'$ 这两个事实，可以证明$L'\cap B$关于η_s是非负集. 这样一来，$L'\cap G'\cap B$关于η_s便既是非正集又是非负集，从而只能有

$$|\eta_s|(L'\cap G'\cap B)=0.$$

因为$B_0'=B'\cup[(L'\cap G')\cap B]$，$|\eta_s|(B')=0$；所以

$$|\eta_s|(B_0')=0.$$

尚需证明(P_0,P_0')是关于η_s的一个Hahn分解. 很清楚

$$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n,\quad L=\bigcap_{n=1}^{\infty}L_{-n}.$$

这样，我们便可以象上面那样论证，证实对于所有$A\in\mathscr{A}$，

$$\eta_s(G\cap A\cap B)\geqslant 0,\quad \eta_s(L\cap A\cap B)\leqslant 0$$

[这时利用(19.3.iii)以及η_s是σ有限的事实]；细节留给读者. 因此，$G\cap B$关于η_s是非负集，而$L\cap B$关于η_s是非正集. 由于P_0等于$B\cap G$，P_0关于η_s便是非负集. 因为

$$P_0'=(B\cap L'\cap G')\cup(L\cap B)\cup B',$$

而 $|\eta_s|(B')=0$，$|\eta_s|(B\cap L'\cap G')=0$，所以我们知道 P_0' 关于 η_s 是非正集．这就完成了我们的论证，即当(i)和(ii)成立时，g 必是 η 关于 μ 的导数．□

(20.55) 进一步的讨论 在(20.55)—(20.60)中始终采用以下记号并作下列假设．设 X 是一个集，$\mathscr{M}$ 是 X 的一些子集所成的 σ 代数．又设 μ 是 $\mathscr{M}$ 上一个测度，η 是 $\mathscr{M}$ 上一个广义测度．再设 $(\mathscr{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一些子集所成的 σ 代数序列，并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n\subset\mathscr{M}$．假定 μ 和 $|\eta|$ 在各个 σ 代数 $\mathscr{M}_n$ 上都是 σ 有限的．

对于每个 $n\in N$，考虑两个测度空间 $(X,\mathscr{M}_n,\mu)$，$(X,\mathscr{M}_n,\eta)$；就是说，我们把 μ 和 η 的定义域限制在 $\mathscr{M}_n$ 上．在 $\mathscr{M}_n$ 上把 μ 写成 μ_n，而 η 写成 η_n．设 f_n 是 η_n 关于 μ_n 的导数．

我们要探讨的是，在有关 $(\mathscr{M}_n)$ 的两个假设下，函数序列 (f_n) 的点态极限问题．要建立的第一个定理如下．

(20.56) 定理 假定

(i) $\mathscr{M}_1\subset\mathscr{M}_2\subset\mathscr{M}_3\subset\cdots$，

并把含有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$ 的最小 σ 代数记作 $\mathscr{M}_\omega$．设 μ_ω 和 η_ω 分别是限制在 $\mathscr{M}_\omega$ 上的 μ 和 η．则函数

(ii) $\underline{f}=\varliminf_{n\to\infty}f_n$ 和 $\overline{f}=\varlimsup_{n\to\infty}f_n$

都是 η_ω 关于 μ_ω 的导数．于是，正如(20.53)所阐明的，就有：

(a) 对于 μ 几乎所有 $x\in X$，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在；

(b) 对于任意 $A\in\mathscr{M}_\omega$，

$$\int_A(\lim_{n\to\infty}f_n)d\mu=\eta_a(A);$$

(c) η_ω 的 μ_ω 奇异部分限制在集 $\{x\in X:\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\pm\infty\}$ 上．

证 设 α 是一个实数．在本证明中，记

$L_\alpha=\{x\in X:\underline{f}(x)\leqslant\alpha\}$，$G_\alpha=\{x\in X:\overline{f}(x)\geqslant\alpha\}$．

鉴于(20.54)，只要证明对于任意$A\in\mathscr{M}_\omega$，成立

$$\eta(L_\alpha\cap A)\leqslant\alpha\mu(L_\alpha\cap A),\tag{1}$$

及

$$\eta(G_\alpha\cap A)\geqslant\alpha\mu(G_\alpha\cap A)\tag{2}$$

就可以了.〔为了由(1)，(2)得出(20.54.i)，(20.54.ii)，可利用明显的包含关系

$$\{x\in X:\overline{f}(x)\geqslant\alpha\}\supset\{x\in X:\underline{f}(x)\geqslant\alpha\},$$

$$\{x\in X:\underline{f}(x)\leqslant\alpha\}\supset\{x\in X:\overline{f}(x)\leqslant\alpha\},$$

并把(1)，(2)中的A换成其与较小集之交.〕

设$(\alpha_n)_{n=1}^\infty$是一个严格递减的实数列，并有极限α. 对于$n\in N$，命

$$H_n=\{x\in X:\inf\{f_{n+1}(x),\ f_{n+2}(x),\ \cdots\}<\alpha_n\},$$
$$H_{n,1}=\{x\in X:f_{n+1}(x)<\alpha_n\},$$
$$H_{n,p}=\{x\in X:\min\{f_{n+1}(x),\ \cdots,\ f_{n+p-1}(x)\}\geqslant\alpha_n,\ f_{n+p}(x)<\alpha_n\},\quad(p\geqslant2).$$

很明显，$H_{n,p}\in\mathscr{M}_{n+p}$，$\{H_{n,p}\}_{p=1}^\infty$是两两不相交族，$H_n=\bigcup_{p=1}^\infty H_{n,p}$，$L_\alpha=\bigcap_{n=1}^\infty H_n$. 设$A$是代数$\bigcup_{n=1}^\infty\mathscr{M}_n$中任意一个集，因此对于某个$n_0$，$A\in\bigcap_{n=n_0}^\infty\mathscr{M}_n$. 当$n\geqslant n_0$，$p\geqslant1$时，集$H_{n,p}\cap A$属于$\mathscr{M}_{n+p}$. 综合所有这些事实以及(20.54)，得出

$$\eta(H_n\cap A)=\sum_{p=1}^\infty\eta(H_{n,p}\cap A)=\sum_{p=1}^\infty\eta_{n+p}(H_{n,p}\cap A)$$
$$\leqslant\sum_{p=1}^\infty\alpha_n\mu_{n+p}(H_{n,p}\cap A)=\alpha_n\mu(H_n\cap A),\tag{3}$$

(3)式对于所有$n\geqslant n_0$成立. 如果$|\eta|(A)<\infty$，$\mu(A)<\infty$，那么(3)中当$n\to p$时取极限，便得到

$$\eta(L_\alpha \cap A)=\lim_{n\to\infty}\eta(H_n \cap A)\leqslant \lim_{n\to\infty}\alpha_n\mu(H_n \cap A)=\alpha\mu(L_\alpha \cap A). \quad (4)$$

由于 $|\eta|$ 和μ在$\mathscr{M}_1$上是σ有限的，所以(4)式对于任意$A\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$成立.

设$\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathscr{M}_1$中集所成的两两不相交族，满足：$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$，并且在每个$F_k$上$\mu$和 $|\eta|$ 是有限的. 又设ν_k是在$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上由下式定义的集函数：

$$\nu_k(A)=\alpha\mu(F_k\cap L_\alpha\cap A)-\eta(F_k\cap L_\alpha\cap A).$$

常规计算及(4)式表明，ν_k在(10.3)意义下是代数$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上一个可数加性、非负、*有限值*测度. 设$\nu$是集函数$\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k$，而且仅在$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上有定义. 不难看出，$\nu$是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上一个非负、可数加性、$\sigma$有限测度. 根据(10.39.c)，$\nu$可以在$\sigma$代数$\mathscr{M}_\omega$上有唯一的一个(可数加性！)开拓. 这一切便蕴涵着(4)式不仅对于$A\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$，而且对于任意$A\in\mathscr{M}_\omega$，都是成立的. 这样便证明了(1)式.

(2)的证明很类似于(1)的证明，我们把它留给读者. □

以下特殊结果经常用到.

(20.57) **推论** 假定对于任意$n\in N$，$\eta_n\ll\mu_n$，并且对于代数$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{M}_k$中的任意$E$，成立等式

(i) $$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f_\omega d\mu.$$

则η_ω关于μ_ω是绝对连续的.

证 对于每个固定的$k\in N$及任意$E\in\mathscr{M}_k$，有

$$\eta(E)=\eta_k(E)=(\eta_k)_a(E)=\int_E f_k d\mu_k=\int_E f_k d\mu. \quad (1)$$

当$n>k$时，E也属于$\mathscr{M}_n$，从而(1)式可以推广成

$$\eta(E)=\eta_n(E)=(\eta_n)_a(E)=\int_E f_n d\mu. \quad (2)$$

在(2)中当$n\to\infty$时取极限，并应用(i)，由此得到

$$\eta(E)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f_\omega d\mu. \quad (3)$$

由于f_ω是η_ω关于μ_ω的导数，便有

$$(\eta_\omega)_a(E)=\int_E f_\omega d\mu,$$

再由(3)式，便推出对于任意$E\in\mathscr{M}_k$，成立

$$\eta(E)=\eta_\omega(E)=(\eta_\omega)_a(E). \quad (4)$$

既然k是任意的，这就证实了η_ω和$(\eta_\omega)_a$在$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{M}_k$上是一致的. 根据(10.39.c)，在整个$\sigma$代数$\mathscr{M}_\omega$上$\eta_\omega$等于$(\eta_\omega)_a$. □

(20.58) **评注** 条件(20.57.i)无疑正好就是条件

$$\int_E(\lim_{n\to\infty} f_n)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

如果所有函数$|f_n|$都由$\mathfrak{L}_1^+(X,\mathscr{M},\mu)$中某个确定的函数所界定，那么Lebesgue控制收敛定理(12.24)便保证了(20.57.i)成立. 如果$\lim_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|_1=0$，$\mu(X)<\infty$，那么(13.39)也就蕴涵着(20.57.i)成立. (13.39)收录了保证(20.57.i)成立的其他条件.

以下是另一个极限定理，它类似于(20.56)，涉及降σ代数序列而不是升σ代数序列.

(20.59) **定理** 假定

(i) $\mathscr{M}_1\supset\mathscr{M}_2\supset\cdots\supset\mathscr{M}_n\supset\cdots$,

并把σ代数 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$记作$\mathscr{M}_0$. 设$\mu_0$和$\eta_0$分别是限制在σ代数$\mathscr{M}_0$上的$\mu$和$\eta$. 假设$\mu_0$和$|\eta_0|$都是σ有限的. $\underline{f}$和$\overline{f}$的定义和(20.56.ii)一样. 则$\underline{f}$和$\overline{f}$都是η_0关于μ_0的导数.

证 我们首先指出，$\underline{f}$和$\overline{f}$都是$\mathscr{M}_0$可测的. 为了看出这一点，记

$$h_n=\lim_{k\to\infty}[\min\{f_n,\ f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+k}\}].$$

很清楚，h_n是$\mathscr{M}_n$可测的，而且$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\underline{f}$〔参较(6.83)〕. 根据(i)，函数$h_m, h_{m+1},\cdots$都是$\mathscr{M}_m$可测的，并由于$\underline{f}=\lim\limits_{n\to\infty}h_{n+m}$，可以推知$\underline{f}$对于任意$m$是$\mathscr{M}_m$可测的，也就是说，$\underline{f}$是$\mathscr{M}_0$可测的. $\overline{f}$的证明完全类似.

我们沿用(20.56)证明中的记号L_α，G_α. 自然，L_α，G_α都属于$\mathscr{M}_0$. 正如(20.56)的证明，只要证对于任意$A\in\mathscr{M}_0$，(20.56.1)和(20.56.2)都成立就可以了. 对于每个实数α，命

$$M_\alpha=\{x\in X:\inf\{f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\}<\alpha\},$$
$$H_\alpha=\{x\in X:\sup\{f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\}>\alpha\}.$$

集M_α和H_α都属于$\mathscr{M}_1$，但未必属于$\mathscr{M}_0$. 假定对于任意$A\in\mathscr{M}_0$，不等式

$$\eta(M_\alpha\cap A)\leqslant\alpha\mu(M_\alpha\cap A),\tag{1}$$
$$\eta(H_\alpha\cap A)\geqslant\alpha\mu(H_\alpha\cap A)\tag{2}$$

都成立. 任给$\varepsilon>0$，包含关系$L_\alpha\subset M_{\alpha+\varepsilon}$，$G_\alpha\subset H_{\alpha-\varepsilon}$是显而易见的，从而由(1)式知道

$$\begin{aligned}\eta(L_\alpha\cap A)&=\eta(M_{\alpha+\varepsilon}\cap L_\alpha\cap A)\leqslant(\alpha+\varepsilon)\mu(M_{\alpha+\varepsilon}\cap L_\alpha\cap A)\\&=(\alpha+\varepsilon)\mu(L_\alpha\cap A).\end{aligned}\tag{3}$$

由于$|\eta|$和μ在$\mathscr{M}_1$上都是σ有限的，通过简单论证并由(3)式便推出

$$\eta(L_\alpha\cap A)\leqslant\alpha\mu(L_\alpha\cap A).$$

这就是说，当(1)成立时，(20.56.1)必成立. 同样，当(2)成立时，得到

$$\eta(G_\alpha\cap A)\geqslant(\alpha-\varepsilon)\mu(G_\alpha\cap A),$$

由此便推出(20.56.2). 因之，为了证明本定理，只要证实(1)和(2)成立就够了.

为了证明(1)，对于每个$n\in N$，记

$$J_n=\{x\in X:\min\{f_1(x),\ \cdots,\ f_n(x)\}<\alpha\},$$

$$J_{n,p}=\{x\in X:f_p(x)<\alpha,\ f_{p+1}(x)\geqslant\alpha,\ \cdots,\ f_n(x)\geqslant\alpha\}$$
$$(1\leqslant p<n),$$

$$J_{n,n}=\{x\in X:f_n(x)<\alpha\}.$$

那么，$J_{n,p}$属于$\mathscr{M}_p$，$\{J_{n,p}\}_{p=1}^n$是两两不相交集族，$\bigcup_{p=1}^n J_{n,p}=J_n$.

由f_p的定义以及(20.54)，得出

$$\begin{aligned}\eta(J_n\cap A)&=\sum_{p=1}^n\eta(J_{n,p}\cap A)\\&=\sum_{p=1}^n\eta(\{x\in X:f_p(x)\leqslant\alpha\}\cap J_{n,p}\cap A)\\&\leqslant\sum_{p=1}^n\alpha\mu(\{x\in X:f_p(x)\leqslant\alpha\}\cap J_{n,p}\cap A)\\&=\alpha\mu(J_n\cap A).\end{aligned}\tag{4}$$

显然，$J_1\subset J_2\subset\cdots$，$\bigcup_{n=1}^\infty J_n=M_\alpha$. 公式(4)及可数加性蕴涵

$$\eta(M_\alpha\cap A)\leqslant\alpha\mu(M_\alpha\cap A),$$

即证实了(1). 同样可以证明(2)；我们把它留给读者. □

(20.60) 评注 极限定理(20.56)和(20.59)乃是概率学家所谓的鞅定理的两个变型说法. 这儿的论述选自 S. Andersen 和

Jessen的文章①．感兴趣的读者也可参阅J.L.Doob的论文②．我们之所以收入了这些极限定理，主要是为了把它们应用到测度空间的无穷乘积上去．（参看§22）．由这些定理可直接推出若干出人意表的有趣结果，不过，我们现在仅以习题形式（附详细提示）指出其中少数几个结果．

(20.61) **习题：对于一个网的微分** 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个σ有限测度空间．设有A的一个子族序列$(\mathscr{N}_n)_{n=1}^{\infty}$，具有下列性质：

(i) 每个$\mathscr{N}_n$中的集都是两两不相交的，并且$\bigcup \mathscr{N}_n = X$.

(ii) 如果$E \in \mathscr{N}_n$，末么$0 < \mu(E) < \infty$.

(iii) 对于每个$E \in \mathscr{N}_n$，$E = \bigcup \{F : F \in \mathscr{N}_{n+1}, F \subset E\}$.

这样的一个序列$(\mathscr{N}_n)_{n=1}^{\infty}$叫做一个网．设$\mathscr{M}_n$是由$\mathscr{N}_n$生成的$\sigma$代数，也就是$\mathscr{N}_n$中集的并全体所成的族．

(a)设η是$\mathscr{A}$上一个σ有限广义测度．对于每个$n \in N$，命

$$f_n = \sum_{E \in \mathscr{N}_n} \frac{\eta(E)}{\mu(E)} \xi_E.$$

试证：对于μ几乎所有$x \in X$，$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$存在，实际上，$\lim_{n \to \infty} f_n$就是对于含有一切$\mathscr{N}_n$的最小$\sigma$代数的$\eta$关于$\mu$的导数．〔由(ii)可以看出，每个$\mathscr{N}_n$是可数的．同时，当$E \in \mathscr{M}_n$，$\mu(E) = 0$时，$E = \varnothing$．因此显然成立关系式$|\eta_n| \ll \mu_n$，而函数$f_n$分明就是$\eta_n$关于$\mu_n$的Lebesgue-Radon-Nikodým导数．然后应用(20.56)以及(20.53)中导数的定义．〕

(b) 设φ是R上一个Lebesgue可测函数，并且对于任意$a > 0$，都有

$$\int_{-a}^{a} |\varphi| \, d\lambda < \infty.$$

①Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 25(1948), Nr.5.

②J. L. Doob, Stochastic Processes, J. Wiley and Sons. New York, 1953, 第7章.

对于每个$x\in R$，设$J(n, x)$为含有x的区间

$$[k\cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n}[\quad (x\in N, k\in Z).$$

试证：对于λ几乎所有$x\in R$，

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \int_{J(n, x)} \varphi d\lambda = \varphi(x).$$

〔提示 应用(a)小题，这时$X=R$，$\mathscr{A}=\mathscr{M}_\lambda$，$\mathscr{N}_n=\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[\}_{k=-\infty}^{\infty}$，$\eta(A)=\int_A \varphi d\lambda$.〕试将此结果同(18.3)相对照.

(c) 设η是$\mathscr{B}(R)$上一个σ有限广义测度或复测度，并且$|\eta|$和λ是互相奇异的. 试证：对于λ几乎所有$x\in R$，

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \eta(J(n, x))=0.$$

当η是广义测度时，试证：在适合$|\eta|(B')=0$的集B上，

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \eta(J(n, x))=\infty \text{或} -\infty$$

〔应用(b)小题，(20.56)及(20.53.iv).〕试将本题同(19.60)中所描述的α的特性相对照.

(20.62) 习题：密度 记号同(20.61). 设E是$\mathscr{A}$中任意一个集. 又设η是$\mathscr{A}$上的测度，它满足：对于任意$A\in\mathscr{A}$，有

$$\mu(A)=\mu(E\cap A).$$

显然，$\eta_n \ll \mu_n$；命w_n是η_n关于μ_n的 Lebesgue-Radon-Nikodým 导数（这里$n\in\{1,2,\cdots,\omega\}$）. 函数$w_n$叫做$E$**关于$\mathscr{M}_n$的密度**.

(a) 试证：对于μ几乎所有$x\in X$，$\lim_{n\to\infty} w_n(x)=w_\omega(x)$.〔本题是(20.56)的直接应用.〕

(b) 假定每个w_n除了是$\mathscr{M}_n$可测的以外，还μ几乎处处是一个常值实函数. 并假定存在一个集$D\in\mathscr{M}_\omega$，适合$\mu(D\Delta E)=0$. 那么$\mu(E)=0$或$\mu(E')=0$.〔显然，μ几乎处处$\lim_{n\to\infty} w_n$是一个常数. 简单的论证表明，w_ω μ几乎处处等于ξ_D. 这样ξ_D便μ-a.e.是一个常数.〕

(c) 试考虑空间$X=[0,1[$，并对于每个$n\in N$，命

$$\mathscr{N}_n=\{[k2^{-n},\ (k+1)2^{-n}[\quad :k\in\{0,1,\cdots,2^n-1\}\}.$$

设$\mathscr{M}_n$是由$\mathscr{N}_n$生成的集代数（显然有限），又设$\mathscr{M}=\mathscr{M}_\lambda([0,1[)$. 命$P$是$[0,1[$中的Cantor型集，它是由每一步去掉中间的四分之一后所得到的(6.62). 试确定$\lambda(P)$. 设μ就是λ，并设$\eta(A)=\lambda(A\cap P)$，试计算如上所定义的w_n，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}w_n$.

(20.63) **习题：(20.59)的应用** 假定在(20.59)中$\mu(X)=1$，μ_0在σ代数$\mathscr{M}_0$上仅取0和1两个值.

(a) 试证：μ几乎处处$\lim\limits_{n\to\infty}f_n$是常数.〔提示. 考虑Lebesgue分解

$$\eta_0=\eta_{0a}+\eta_{0s}.$$

设$B_0\in\mathscr{M}_0$是适合条件

$$\mu_0(B_0)=0,\quad |\eta_{0s}|(B_0')=0$$

的一个集. 又设g是η_{0a}关于μ_0的Lebesgue-Radon-Nikodým导数. 那么，对于任意$E\in\mathscr{M}_0$，都有

$$\eta_{0a}(E)=\int_E g d\mu_0=\int_{E\cap B_0'} g d\mu_0.$$

既然μ_0仅取0和1两个值，由(12.60)便知道，存在数α，满足

$$\mu_0(\{x\in X: g(x)=\alpha\})=1,$$

从而在B_0'上μ_0几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n=\alpha,$$

由此在X上也就μ_0几乎处处成立这一极限等式.〕

(b) 试证：(a)小题中的α等于

$$\int_X f_1(x)d\mu_1(x)=\eta_{1a}(X),$$

其中η_{1a}是η_1的μ_1绝对连续部分.

(20.64) **习题** 命$X=[0,1[$. 对于每个$n\in N$，命

$\mathscr{M}_n=\{A\subset X$：存在一个$\mathscr{M}_\lambda$可测集$B\subset[0,2^{-n}[$，使

$$A=\bigcup_{k=0}^{2^n-1}(B+k2^{-n})\}.$$

注意到：$\mathscr{M}_n$是一个σ代数，$\mathscr{M}_1\supset\mathscr{M}_2\supset\cdots\supset\mathscr{M}_n\supset\cdots$. 试证：当$A\in\mathscr{M}_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$时，$\lambda(A)=0$或$\lambda(A)=1$. 〔提示. 把(20.62.b)应用于集$A$，并利用(20.62.c)中所说的递增集代数. 显而易见，每个w_n是常数，从而

$$\lambda(A)=0\text{或}\lambda([0,1[\cap A')=0.\ ]$$

(20.65) 习题（Jessen） 设f是$\mathfrak{L}_1([0,1[,\mathscr{M}_\lambda,\lambda)$中任意一个函数，并对于任意$k\in Z$及任意$x\in[0,1[$，按照定义

$$f(x+k)=f(x),$$

把f开拓到R上去. 试证：对于λ几乎所有$x\in R$，成立

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty}2^{-n}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1}f(x+k2^{-n})\right]=\int_0^1 f(t)dt.$$

〔提示. $\mathscr{M}_n$，$\mathscr{M}_0$如(20.64)所设. 又设f_n是(i)式左端的函数. 在定义域[0,1[上，f_n显然是$\mathscr{M}_n$可测的，而且是测度η_n的Lebesgue-Radon-Nikodým导数，这里

$$\eta(A)=\int_A fd\lambda(A\in\mathscr{M}_1).$$

根据(20.59)，f_n λ几乎处处收敛到η_0关于λ_0的Lebesgue-Radon-Nikodým导数f_0. 由于

$$\eta_0([0,1[)=\int_0^1 f_0 d\lambda_0=\int_0^1 fd\lambda,$$

并由于(20.64)及(20.63)都成立，所以在[0,1[上λ-a.e.成立

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_0^1 fd\lambda;$$

而根据周期性，上式在R上λ-a.e.成立. 〕

(20.66) 习题：一个鞅定理 X，$\mathscr{M}$，$\mathscr{M}_n$，$\mathscr{M}_\omega$及μ如(20,56)

所设，并设$\mu(X)<\infty$. 假定$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是X上一个函数序列，其中每个函数都在$[0,\infty[$中取值，并满足下列条件：

(i) 对于任意$n\in N$，f_n是$\mathscr{M}_n$可测的；

(ii) 对于任意$A\in\mathscr{M}_n$和任意$n\in N$，$\int_A f_n d\mu=\int_A f_{n+1}d\mu$；

(iii) 对于任意$n\in N$，$\int_X f_n d\mu=1$.

(a) 试证：在$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上存在一个有限加性测度$\eta$，满足

(iv) 对于任意$A\in\mathscr{M}_n$和任意$n\in N$，$\eta(A)=\int_A f_n d\mu$.

(b) 试举例说明η在$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上未必是可数加性的.

(c) 试证：在X上$\lim_{n\to\infty}f_n$ μ几乎处处存在并有限.〔提示．可考虑$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n$上满足以下条件的有限加性测度$\omega$全体所成的集$\Omega$：

(1) ω取0和1两个值，而不取其他值；

(2) 对于μ零集，ω等于零.

利用邻域

$$\Delta_A=\{\omega\in\Omega:\omega(A)=1\}\left(A\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_n\right),$$

把Ω作成一个拓扑空间．那么Ω是一个紧Hausdorff空间，μ和η可以转移到Ω上去．适当应用(20.56)，并返回到X.〕

第六章　乘积空间上的积分

§ 21　两个测度空间的乘积

(21.1)　评注　假定$(X,\mathscr{M},\mu)$和$(Y,\mathscr{N},\nu)$是两个测度空间. 我们想要定义乘积测度空间

$$(X\times Y),\ \mathscr{M}\times\mathscr{N},\ \mu\times\nu),$$

其中$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$是$X\times Y$的子集所成的某个适当的$\sigma$代数，而$\mu\times\nu$是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上一个测度，它满足条件：只要$A\in\mathscr{M}$，$B\in\mathscr{N}$，就有

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

也就是说，我们想要推广通常的几何上的矩形面积概念.

我们还希望对于$X\times Y$上的函数f所成的一个相当大的函数类，等式

$$\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu=\int_X\int_Y fd\nu d\mu=\int_Y\int_X fd\mu d\nu \qquad (1)$$

将是成立的. 比如说，我们需要把经典公式

$$\int_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)dS=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

推广到更为一般的情况. 正如我们在初等分析中所熟知的，上式对于任意函数$f\in\mathfrak{C}([a,b]\times[c,d])$都是真确的.

假如X和Y都是局部紧Hausdorff空间，而μ和ν是§9那样分别由$\mathfrak{C}_{00}(X)$和$\mathfrak{C}_{00}(Y)$上的非负线性泛函I和J所构造的测度，那么这

一程序可以如下进行：先构造$\mathfrak{C}_{00}(X\times Y)$上一个非负线性泛函$I\times J$，然后命$\mu\times\nu$是$X\times Y$上由$I\times J$导出的外测度，这和§9是一样的．这一构造，其梗概粗陈如下．对于$f\in\mathfrak{C}_{00}(X\times Y)$和$y\in Y$，函数$f^{[y]}$：$x\to f(x,y)$属于$\mathfrak{C}_{00}(X)$．这样，在$Y$上便由

$$y\to I(f^{[y]})$$

规定了一个函数．为了指明是关于x"积分"的，这个函数就记作$I_x(f)$．完全类似地可以得到X上一个函数$J_y(f)$．其次，取两个开集$U\subset X$，$V\subset Y$，它们满足条件：U^-，V^-都是紧的，$U\times U\supset\{(x,y)\in X\times Y:f(x,y)\neq 0\}^-$．利用（9.5）可以找到两个正常数$\alpha$，$\beta$，它们具有性质：对于适合$\varphi(U')\subset\{0\}$的任意$\varphi\in\mathfrak{C}_{00}(X)$，有

$$|I(\varphi)|\leqslant\alpha\|\varphi\|_u, \tag{2}$$

而对于适合$\psi(V')\subset\{0\}$的任意$\psi\in\mathfrak{C}_{00}(Y)$，有

$$|J(\psi)|\leqslant\beta\|\psi\|_u. \tag{3}$$

任给$\varepsilon>0$，利用Stone-Weierstrass定理（7.30），可以求出$X\times Y$上具有以下形状的一个函数g：

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

（其中所有φ和ψ都满足前述条件），并满足：

$$\|f-g\|_u<\varepsilon.$$

因为对于任意$y\in Y$，$f^{[y]}-g^{[y]}$属于$\mathfrak{C}_{00}(X)$，并在U'上$f^{[y]}-g^{[y]}$等于零，所以由（2）式便推出：对于任意$y\in Y$，

$$\begin{aligned}\left|I_x(f)(y)-\sum_{j=1}^{n}I(\varphi_j)\psi_j(y)\right|&=|I(f^{[y]})-I(g^{[y]})|\\&\leqslant\alpha\cdot\sup\{|f(x,y)-g(x,y)|:x\in X\}\\&\leqslant\alpha\|f-g\|_u<\alpha\varepsilon.\end{aligned} \tag{4}$$

这样，$I_x(f)$便是$\mathfrak{C}_{00}(Y)$中一个函数序列的一致极限，其中所有函数在V'上都等于零；由此$I_x(f)\in\mathfrak{C}_{00}(Y)$和$I_x(f)$在$V'$上也等于零．

把这一事实与（4）结合起来，由（3）便得出

$$|J(I_x(f)) - \sum_{j=1}^{m} I(\varphi_j)J(\psi_j)|$$

$$= |J(I_x(f) - \sum_{j=1}^{m} I(\varphi_j)\psi_j)| \leqslant \beta\alpha\varepsilon.$$

类似地可以得到

$$|I(J_y(f)) - \sum_{j=1}^{m} I(\varphi_j)J(\psi_j)| \leqslant \beta\alpha\varepsilon.$$

我们得出结论

$$J(I_x(f)) = I(J_y(f)),$$

并把这一公共值记作$I\times J(f)$. 这就规定了$\mathfrak{C}_{00}(X\times Y)$上一个非负线性泛函$I\times J$. 命$\mu\times\nu$表示$X\times Y$上象§9那样由$I\times J$所构造的外测度，利用（12.35）不难证明，对于任意$f\in\mathfrak{C}_{00}(X\times Y)$，（1）式成立. 同时，对于任意$f\in\mathfrak{L}_1(X\times Y, \mathscr{M}_{\mu\times\nu}, \mu\times\nu)$，(1)式仍成立也是毫无疑问的. 关于这一问题的处理方法，其详尽论述，请读者参阅Hewitt和Ross的著作①.

虽然上述方法不仅给人以美学的感染力，而且还适用于更一般的场合，即这些测度空间不必假定是σ有限的，但是它只不过就局部紧Hausdorff空间上象§9那样所构造的测度，引出了乘积测度而已. 我们宁可就任意两个σ有限测度空间来完成这一构造. 因为经典分析中所遇到的大多数测度空间都属此类. 这一课题要出现若干专门术语和一些技术性细节. 这令人厌烦呢，还是让人迷恋——取决于一个人的见解.

以下从几个精确定义讲起.

(21.2) **定义** 设$(X, \mathscr{M})$和$(Y, \mathscr{N})$是任意两个可测空间. 对于$A\in\mathscr{M}$和$B\in\mathscr{N}$，集$A\times B\subset X\times Y$称为**可测矩形**. 用$\mathscr{M}\times$

---

①E.Hewitt *and* K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, Springer-Verlag, Heidelberg, 1963. pp.150-157.

$\mathscr{N}$表示包含所有可测矩形的$X\times Y$的子集所成的最小σ代数①，并称之为**乘积σ代数**.

设$E\subset X\times Y$，$x\in X$，命

$$E_x=\{y\in Y:(x,\ y)\in E\};$$

同样，设$y\in Y$，命

$$E^y=\{x\in X:(x,\ y)\in E\}.$$

这两个集分别称为**E的X截口**和**E的Y截口**.

对于$X\times Y$上一个函数f和固定的$x\in X$，设$f_{(x)}$是Y上由

$$f_{(x)}(y)=f(x,\ y)$$

所定义的函数；同样，对于每个$y\in Y$，在X上定义$f^{(y)}$为

$$f^{(y)}(x)=f(x,\ y).$$

这两个函数分别称为**f的X截口**和**f的Y截口**.

(21.3) **定理** 设$(X,\ \mathscr{M})$和$(Y,\ \mathscr{N})$是两个可测空间. 则可测矩形的两两不相交的有限并全体所成的族$\mathscr{A}$，是$X\times Y$的子集所成的一个代数.

证 首先指出，如果$A\times B$，$C\times D$是两个可测矩形，那么

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D),$$

读者不难证明这一事实. 这样，如果$E=\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times B_i)$，$F=\bigcup_{j=1}^{n}(C_j\times D_j)$（这两个集都是两两不相交的可测矩形之并）属于$\mathscr{A}$，那么

$$E\cap F=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\{(A_i\cap C_j)\times(B_i\cap D_j)\},$$

从而$E\cap F\in\mathscr{A}$. 这就是说，$\mathscr{A}$对于有限交运算是封闭的.

如果$A\times B$是可测矩形，容易验证

---

①请留意，$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$并非$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$的Cartesian乘积，沿用这个记号是由于习惯，想不致产生混淆.

$$(A\times B)'=(A'\times B)\cup(X\times B'),$$

它是两个不相交的可测矩形之并. 当 $E=\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times B_i)\in\mathscr{A}$ 时，有

$$E'=\bigcap_{i=1}^{m}(A_i\times B_i)',$$

它是$\mathscr{A}$中集的一个有限交，从而$E'\in\mathscr{A}$. □

(21.4) 定理 设 $(X,\mathscr{M})$ 和 $(Y,\mathscr{N})$ 是两个可测空间，$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$. 则

(i) 对于所有$x\in X$，$E_x\in\mathscr{N}$，

(ii) 对于所有$y\in Y$，$E^y\in\mathscr{M}$.

证 为了证明(i)，命

$$\mathscr{S}=\{E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}:\text{对于所有}x\in X,\ E_x\in\mathscr{N}\}.$$

对于任意可测矩形$A\times B$和任意$x\in X$，必有

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B, & x\in A,\\ \varnothing, & x\notin A.\end{cases}$$

这样，$\mathscr{S}$便包含所有可测矩形. 为了完成(i)的证明，只要证实$\mathscr{S}$是一个σ代数就可以了. 如果 $(E_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$，那么，不难看出，对于所有$x\in X$，

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x\in\mathscr{N};$$

由此，$\mathscr{S}$对于可数并运算是封闭的. 设$E\in\mathscr{S}$，那么对于所有 $x\in X$，

$$(E')_x=(E_x)'\in\mathscr{N},$$

从而$\mathscr{S}$对于求余运算也是封闭的. 这就证明了(i). (ii) 的证明完全类似. □

(21.5) 定理 设 $(X,\mathscr{M})$ 和 $(Y,\mathscr{N})$是两个可测空间，f 是$X\times Y$上一个广义实值或复值、$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测函数. 则

(i) 对于所有$x\in X$，$f_{[x]}$是$\mathscr{N}$可测的，

(ii) 对于所有$y\in Y$，$f^{[y]}$是$\mathscr{M}$可测的.

证 假定对于某个$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$，$f=\xi_E$. 由于$f_{[x]}(y)=1$；$(x,y)\in E$；$y\in E_x$；$\xi_{E_x}(y)=1$这四句话是彼此等价的，可见对于所有$x\in X$，

$$f_{[x]}=\xi_{E_x}.$$

这样，就$f=\xi_E$的情况，由(21.4.i)便得出(i). 现在很明显，当f是简单函数时，(i)仍成立. 由上所述，并利用(11.35)，(11.14)以及(11.18)，便知道一般情况下(i)也成立. 同理可证(ii). □

后文需要以下纯集论的事实.

(21.6) **定理** 设T是任意一个集，$\mathscr{A}$是T的子集所成的一个代数. 则由$\mathscr{A}$生成的σ代数$\mathscr{S}(\mathscr{A})$必是含有$\mathscr{A}$并满足以下两个条件的T的子集所成的最小族$\mathscr{F}$：

(i) 如果$E_n\in\mathscr{F}$，$E_n\subset E_{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$)，那么$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$.

(ii) 如果$F_n\in\mathscr{F}$，$F_n\supset F_{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$)，那么$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathscr{F}$.

于是，特别说来，当代数$\mathscr{A}$满足(i)和(ii)时，$\mathscr{A}$必是一个代数①.

证 首先注意到族$\mathscr{F}$是存在的. 这是因为$\mathscr{P}(T)$就是单调族，而含有$\mathscr{A}$的所有单调族之交仍是含有$\mathscr{A}$的单调族；这个交正是$\mathscr{F}$.

由于任意一个σ代数都是单调族，而$\mathscr{S}(\mathscr{A})\supset\mathscr{A}$，可见$\mathscr{S}(\mathscr{A})\supset\mathscr{F}\supset\mathscr{A}$. 因此为了完成证明，只要证$\mathscr{F}$是$\sigma$代数就可以了. 对于单调序列$(H_n)_{n=1}^{\infty}$，我们把集$\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$或$\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n$〔依$(H_n)$是递增序列还是递减序列而定〕记作$\lim H_n$. 当$E\in\mathscr{F}$时，记

①满足(i)和(ii)的族称为**单调族**.

$$\mathscr{F}_E=\{F\in\mathscr{F}: F\cap E'\in\mathscr{F},\ E\cap F'\in\mathscr{F},\ E\cup F\in\mathscr{F}\}.$$

注意，$F\in\mathscr{F}_E$的充要条件是$E\in\mathscr{F}_F$. 此外，显而易见，如果$(F_n)_{n=1}^\infty$是$\mathscr{F}_E$中一个单调序列，那么

$$(\lim F_n)\cap E'=\lim(F_n\cap E')\in\mathscr{F},$$

$$E\cap(\lim F_n)'=E\cap(\lim F_n')=\lim(E\cap F_n')\in\mathscr{F},$$

$$E\cup(\lim F_n)=\lim(E\cup F_n)\in\mathscr{F},$$

这是因为$\mathscr{F}$是单调族的缘故. 所以对于任意$E\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}_E$必是单调族.

当E，$F\in\mathscr{A}$时，由于$\mathscr{A}$是代数，E便属于$\mathscr{F}_F$，而F则属于$\mathscr{F}_E$. 由此可知，对于一切$E\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}_E$. 既然$\mathscr{F}$是含有$\mathscr{A}$的最小单调族，那么对于一切$E\in\mathscr{A}$，$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_E$. 于是对于任何$F\in\mathscr{F}$及任何$E\in\mathscr{A}$，$F\in\mathscr{F}_E$；由此$E\in\mathscr{F}_F$. 这就表明对于一切$F\in\mathscr{F}$，$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}_F$. 由于每个$\mathscr{F}_F$是单调族，可见对于一切$F\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_F$. 由$\mathscr{F}_F$的定义便知道$\mathscr{F}$是代数.

为了证明$\mathscr{F}$还是σ代数，命$(F_n)_{n=1}^\infty\subset\mathscr{F}$. 对于每个$n\in N$，记

$$G_n=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n.$$

那么$G_1\subset G_2\subset\cdots$，而既然$\mathscr{F}$是代数，便有$(G_n)_{n=1}^\infty\subset\mathscr{F}$. 这样一来

$$\bigcup_{n=1}^\infty F_n=\bigcup_{n=1}^\infty G_n=\lim G_n\in\mathscr{F}.\qquad\square$$

(21.7) 推论 设$(X,\mathscr{M})$，$(Y,\mathscr{N})$是两个可测空间. 则$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$是含有可测矩形的一切不相交的有限并的$X\times Y$的子集所成的最小单调族.①

证 由(21.3)和(21.6)立即得证. $\square$

---

①有限个两两不相交的可测矩形的并，有时称之为**初等集**. 这样，本推论的结论就可简单地说成：$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$是含有一切初等集的$X\times Y$的子集所成的最小单调族. ——译者注

(21.8) **定理** 设$(X, \mathscr{M}, \mu)$，$(Y, \mathscr{N}, \nu)$是两个σ有限测度空间，$E \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$. 则成立下列三个断言：

(i) X上的函数$x \to \nu(E_x)$是$\mathscr{M}$可测的；

(ii) Y上的函数$y \to \mu(E^y)$是$\mathscr{N}$可测的；

(iii) $\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$.

证 设对于$E \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$，(i)，(ii)及(iii)都成立，这样的集$E$全体记作$\mathscr{F}$. 我们要证$\mathscr{F}$是含有可测矩形的一切不相交的有限并的单调族. 如果证明了这一点，那么(21.7)就说明$\mathscr{F} = \mathscr{M} \times \mathscr{N}$.

假定$E = A \times B$是一个可测矩形. 因为$E_x = B$或$E_x = \varnothing$（依$x \in A$或$x \in A'$而定），$E^y = A$或$E^y = \varnothing$（依$y \in B$或$y \in B'$而定），所以有

$$\nu(E_x) = \nu(B)\xi_A(x),$$
$$\mu(E^y) = \mu(A)\xi_B(y);$$

因此对于上述E，(i)和(ii)成立. 还可写出

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_X \nu(B)\xi_A d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A)$$
$$= \int_Y \mu(A)\xi_B d\nu = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

于是对于上述E，(iii)也成立，从而$E \in \mathscr{F}$. 这样$\mathscr{F}$便含有一切可测矩形.

设$\{E_1, \cdots, E_p\}$是$\mathscr{F}$的一个两两不相交的有限子族. 因为对于任意$x \in X$和任意$y \in Y$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{p} (E_n)_x, \quad \left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right)^y = \bigcup_{n=1}^{p} (E_n)^y,$$

所以很明显，$\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right) \in \mathscr{F}$. 这样，$\mathscr{F}$便含有可测矩形的不相交

的有限并全体.

现在设$(E_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{F}$中的递增序列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\lim E_n$. 对于任意$x\in X$，正如（10.13）所说，我们得到

$$\nu(E_x)=\lim_{n\to\infty}\nu((E_n)_x),$$

从而由（11.14）推知，(i)关于E是成立的. 同样，(ii)关于E也成立. 应用B.Levi定理（12.22），便得到

$$\int_X\nu(E_x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_X\nu((E_n)_x)d\mu(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_Y\mu((E_n)^y)d\nu(y)$$

$$=\int_Y\mu(E^y)d\nu(y).$$

因此E属于$\mathscr{F}$，从而$\mathscr{F}$对于递增序列的并运算是封闭的.

尚需证明$\mathscr{F}$对于递减序列的交运算也是封闭的. 为此，必须利用定理中的σ有限性假设才行. 这是因为我们要援引(10.15)和（12.24），而这两个定理都是含有有限性假设的. 设$(F_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{F}$中一个递减序列,它满足条件:对于适合$\mu(A)<\infty$及$\nu(B)<\infty$的某个可测矩形$A\times B$，$F_1\subset A\times B$. 记$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$. 对于每个$x\in X$，有$(F_1)_x\subset B$，从而有$\nu((F_1)_x)<\infty$. 由（10.15）知道，对于任意$x\in X$，

$$\nu(F_x)=\lim_{n\to\infty}\nu((F_n)_x).$$

这样，函数$x\to\nu(F_x)$便是一个$\mathscr{M}$可测函数序列的点态极限，因而它也是$\mathscr{M}$可测的（11.14）；所以(i)关于F是成立的. 同样，(ii)关于F是成立的. 由于

$$\int_X\nu((F_1)_x)d\mu(x)\leqslant\int_X\nu(B)\xi_A d\mu<\infty,$$

$$\int_Y \mu((F_1)^y)\,d\nu(y) \leqslant \int_Y \mu(A)\xi_B\,d\nu < \infty,$$

Lebesgue控制收敛定理（12.24）蕴涵着

$$\int_X \nu(F_x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X \nu((F_n)_x)\,d\mu(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_Y \mu((F_n)^y)\,d\nu(y)$$

$$= \int_Y \mu(F^y)\,d\nu(y),$$

由此(iii)关于F也是成立的.

利用σ有限性假设，取两个递增序列$(A_k)_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}$和$(B_k)_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{N}$，它们满足条件：对于一切$k$，$\mu(A_k)<\infty$，$\nu(B_k)<\infty$，而且$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$. 命

$$\mathscr{E}=\{E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}:\text{对于一切}k\in N,\ E\cap(A_k\times B_k)\in\mathscr{F}\}.$$

既然可测矩形的一切不相交的有限并所成的族$\mathscr{A}$是代数（21.3），而且$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$，因此必有$\mathscr{A}\subset\mathscr{E}$. 如果$(E_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{E}$中一个递增序列，那么

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cap(A_k\times B_k)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n\cap(A_k\times B_k))\in\mathscr{F},$$

这是因为$\mathscr{F}$对于递增序列的并运算是封闭的缘故. 于是$\mathscr{E}$对于递增序列的极限运算便是封闭的. 如果$(E_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{E}$中一个递减序列，那么正如前段所证，

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cap(A_k\times B_k)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n\cap(A_k\times B_k))\in\mathscr{F}.$$

于是$\mathscr{E}$对于递减序列的交运算也是封闭的. 由（21.7）看出$\mathscr{E}=\mathscr{M}\times\mathscr{N}$.现在设$(F_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{F}$中任意一个递减序列，并设$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$.

由于$F\in\mathscr{E}$，那么对于任意$k\in N$，便有$F\cap(A_k\times B_k)\in\mathscr{F}$.
根据$\mathscr{F}$对于递增序列的并运算是封闭的这一事实，可知

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}(F\cap(A_k\times B_k))\in\mathscr{F}.$$

这就完成了$\mathscr{F}$是单调族的证明. □

我们现在定义$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上一个集函数，结果表明它正是所要求的乘积测度.

(21.9) 定义 设$(X, \mathscr{M}, \mu)$，$(Y, \mathscr{N}, \nu)$是两个σ有限测度空间. 对于$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$，规定

$$\mu\times\nu(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu(x).$$

根据(21.8.iii)，还成立

$$\mu\times\nu(E)=\int_Y\mu(E^y)d\nu(y).$$

(21.10) 定理 记号同(21.9). 则集函数$\mu\times\nu$是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上一个(可数加性)$\sigma$有限测度.①

证 设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$中一些集所成的两两不相交的可数族. 那么由(12.21)推知

$$\mu\times\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\int_X\nu\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right]_x\right)d\mu(x)$$

$$\overset{\varepsilon}{=}\int_X\sum_{n=1}^{\infty}\nu([E_n]_x)d\mu(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\nu([E_n]_x)d\mu(x)$$

---

①通常称定理(21.10)中的集函数$\mu\times\nu$为μ和ν的**乘积测度**，并称$(X\times Y, \mathscr{M}\times\mathscr{N}, \mu\times\nu)$为测度空间$(X, \mathscr{M}, \mu)$和$(Y, \mathscr{N}, \nu)$的**乘积测度空间**. ——译者注

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\times\nu(E_n).$$

这样 $\mu\times\nu$ 便是可数加性的. 显然$\mu\times\nu\geqslant 0$, $\mu\times\nu(\varnothing)=0$; 所以 $\mu\times\nu$ 是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上一个测度. 为了证明$\mu\times\nu$ 还是 σ 有限的, 设 $(A_k)_{k=1}^{\infty}$和 $(B_k)_{k=1}^{\infty}$是如(21.8)证明中所说的两个序列, 那么

$$X\times Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\times B_k),$$

而且对于任意$k\in N$, 都成立

$$\mu\times\nu(A_k\times B_k)=\mu(A_k)\cdot\nu(B_k)<\infty. \quad \square$$

(21.11) 注意 (21.8)证明中所做的简单计算表明, 对于一切可测矩形$A\times B$, 都成立

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

(请记住$0\cdot\infty=0$.)假如ω是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上满足以下条件的任意测度: 对于一切可测矩形$A\times B$, 都成立

$$\omega(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B),$$

那么对于可测矩形的不相交的有限并全体所成的代数$\mathscr{A}$中的一切E, 便都成立

$$\mu\times\nu(E)=\omega(E).$$

既然$\mu\times\nu$是σ有限的, 并且$\mathscr{S}(\mathscr{A})=\mathscr{M}\times\mathscr{N}$, 那么由Hopf开拓定理的唯一性结论(10.39.c)推知, 对于一切$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$, 都成立

$$\mu\times\nu(E)=\omega(E).$$

因此乘积测度$\mu\times\nu$由两个条件唯一确定, 这两个条件是: $\mu\times\nu$是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$上的测度, 并成立

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)①.$$

---

①正由于此, 乘积测度也称为**独立乘积测度**. 熟悉概率论的读者不难明白"独立"一词的来源. ——译者注

我们现在可以证明关于乘积空间上积分的Fubini定理的两个变型.

(21.12) 定理(Fubini) 设$(X,\mathscr{M},\mu)$,$(Y,\mathscr{N},\nu)$是两个σ有限测度空间,$(X\times Y,\mathscr{M}\times\mathscr{N},\mu\times\nu)$是如上所构造的乘积测度空间. 如果$f$是$X\times Y$上一个非负、广义实值、$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测函数,则:

(i) 对于每个$y\in Y$,函数$x\to f(x,y)$是$\mathscr{M}$可测的;

(ii) 对于每个$x\in X$,函数$y\to f(x,y)$是$\mathscr{N}$可测的;

(iii) 函数$y\to\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$是$\mathscr{N}$可测的;

(iv) 函数$x\to\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$是$\mathscr{M}$可测的;

(v) 成立等式

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\times\nu(x,y)=\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$=\int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)^{①}.$$

证 结论(i)和(ii)正是(21.5.i)和(21.5.ii):只是为了完整起见,才又一次写出了这两个结论. 我们来证明(iii)—(v). 首先假定对于某个$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$,$f=\xi_E$. 显而易见,对于每个$y\in Y$,

$$\int_X\xi_E(x,y)\,d\mu(x)=\int_X\xi_{E^y}(x)\,d\mu(x)=\mu(E^y),$$

又对于每个$x\in X$,

$$\int_Y\xi_E(x,y)\,d\nu(y)=\int_Y\xi_{E_x}(y)\,d\nu(y)=\nu(E_x).$$

这样,就ξ_E来说,由(21.8)以及$\mu\times\nu$的定义(21.9)便直接推出(iii),(iv)和(v). 就$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测的简单函数$f$来说,由所论及的

①在累次积分中,我们把符号$\int\cdots d$看作括号. 例如
$\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_Y[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)]\,d\nu(y)$.

积分的线性，断言(iii)—(v)自然是成立的.

最后，设f是$X\times Y$上任意一个非负、广义实值、$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测函数.命$(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是$X\times Y$上的非负、实值、$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测简单函数所成的递增序列，并具有性质：对于一切$(x, y)\in X\times Y$，$\sigma_n(x, y)\to f(x, y)$（11.35）. 对于每个$y\in Y$，（12.22）表明

$$\int_X f(x, y)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_X \sigma_n(x, y)d\mu(x);$$

所以(iii)中的函数乃是$\mathscr{N}$可测函数序列的点态极限，从而由(11.14)便得出(iii). 同样，(iv)也成立. 为了证明(v)，再用一次（12.22），就得到

$$\int_{X\times Y} f(x, y)d\mu\times\nu(x,y)=\lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\sigma_n(x,y)d\mu\times\nu(x,y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_Y\int_X \sigma_n(x,y)\,d\mu(x)d\nu(y)$$

$$=\int_Y\left[\lim_{n\to\infty}\int_X\sigma_n(x,y)d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

$$=\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

同样的计算可证明等式

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\times\nu(x,y)=\int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x). \qquad \square$$

Fubini定理的以下变型特别有用.

(21.13) Fubini定理 设$(X, \mathscr{M}, \mu)$，$(Y, \mathscr{N}, \nu)$是两个σ有限测度空间，$(X\times Y, \mathscr{M}\times\mathscr{N}, \mu\times\nu)$是如上所构造的乘积测度空间. 又设$f$是$X\times Y$上一个复值$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测函数，并假定以下三个积分中至少有一个是有限的①：

①如果其中一个积分是有限的，那么根据（21.12.v），三个积分便都是有限的（而且相等）.

$$\int_{X\times Y}|f(x, y)|\, d\mu\times\nu(x, y),$$

$$\int_Y\int_X |f(x, y)|\, d\mu(x)d\nu(y),$$

$$\int_X\int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y)d\mu(x).$$

则：

(i) 对于ν几乎所有$y\in Y$，函数$x\to f(x,y)$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M},\mu)$；

(ii) 对于μ几乎所有$x\in X$，函数$y\to f(x,y)$属于$\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{N},\nu)$；

(iii) 函数$y\to\int_X f(x,y)d\mu(x)$属于$\mathfrak{L}_1(Y,\mathscr{N},\nu)$①；

(iv) 函数$x\to\int_Y f(x, y)d\nu(y)$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M},\mu)$；

(v) 成立等式

$$\int_{X\times Y} f(x, y)d\mu\times\nu(x, y)=\int_Y\int_X f(x, y)d\mu(x)d\nu(y)$$

$$=\int_X\int_Y f(x, y)d\nu(y)d\mu(x),$$

证 题设和(21.12)表明

$$\int_{X\times Y}|f|\, d\mu\times\nu=\int_Y\int_X |f|\, d\mu d\nu=\int_X\int_Y |f|\, d\nu d\mu<\infty. \qquad (1)$$

因此$f\in\mathfrak{L}_1(X\times Y,\mathscr{M}\times\mathscr{N},\mu\times\nu)$. 记

$$f=f_1-f_2+i(f_3-f_4),$$

其中$f_j\in\mathfrak{L}_1^+(X\times Y,\mathscr{M}\times\mathscr{N},\mu\times\nu)$，$f_j\leqslant|f|$ ($j=1, 2, 3, 4$). (i)和(ii)中所说的函数根据(21.5)都是可测的. 由(1)式，对于ν几乎所有y成立

①自然，这个函数仅对于能使$x\to f(x,y)$属于$\mathfrak{L}_1(X,\mathscr{M},\mu)$的那些$y\in Y$才有定义. 类似的注释适用于断言(iv).

$$\int_X |f_j(x, y)|\, d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x, y)|\, d\mu(x) < \infty,$$

从而对于ν几乎所有y，$f_{j}^{[y]} \in \mathfrak{L}_1(X, \mathscr{M}, \mu)$（$j=1, 2, 3, 4$）。这样(i)便成立．同理可证断言(ii)．由于(i)，（iii）中的函数对于ν几乎所有$y \in Y$有定义，它的$\mathscr{N}$可测性则可通过对每个f_j应用（21.12.iii），并取线性组合而得出．这样一来，对于ν几乎所有y成立

$$\left|\int_X f(x, y)\, d\mu(x)\right| \leqslant \int_X |f(x, y)|\, d\mu(x),$$

从而应用（1）式便推出(iii)．(iv)的证明完全类似．最后，对每个f_j应用（12.12.v），并取线性组合，便得到(v)．最后这一步是合理的推证，因为所论及的这些积分在各个$\mathfrak{L}_1$空间上都是线性的，而且(i)—(iv)成立．□

(21.14) **评注** (a) 即使$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$都“很大”时，乘积σ代数$\mathscr{M} \times \mathscr{N}$也可能“相当小”．事实上，如果$X$是Hausdorff空间，并且$\overline{\overline{X}} > \mathfrak{c}$，那么$\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$并不含有$X \times X$的所有闭子集〔参见（21.20.c)〕．

(b) 即使（X, $\mathscr{M}$, μ）和（Y, $\mathscr{N}$, ν）都是完全测度空间（11.20），（$X \times Y$, $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$, $\mu \times \nu$）也极少是完全的〔参见（21.21）〕．

如(11.21)那样，命（$X \times Y$, $\overline{\mathscr{M} \times \mathscr{N}}$, $\overline{\mu \times \nu}$）表示测度空间（$X \times Y$, $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$, $\mu \times \nu$）的完全化．借助于下述引理，就可以把Fubini定理开拓到这个完全乘积空间上去．

(21.15) **引理** 设（X, $\mathscr{M}$, μ），（Y, $\mathscr{N}$, ν）是两个完全的、σ有限测度空间．又设$E \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$适合条件：$\mu \times \nu(E) = 0$，并假定$F \subset E$．则

(i) $\mu(F^y) = 0$ ν-a.e.,

(ii) $\nu(F_x) = 0$ μ-a.e.

证 我们只证(ii). 根据(21.12)得到

$$0=\mu\times\nu(E)=\int_X\int_Y \xi_E d\nu d\mu=\int_X \nu(E_x)d\mu(x).$$

由于对于所有$x\in X$, $\nu(E_x)\geqslant 0$, 可见$\nu(E_x)=0$ μ-a.e. 显然对于所有x, $F_x\subset E_x$, 从而对于μ几乎所有x, $F_x\in\mathscr{N}$, $\nu(F_x)=0$. □

(21.16) **定理**(Fubini) 设$(X, \mathscr{M}, \mu)$, $(Y, \mathscr{N}, \nu)$是两个完全的、σ有限测度空间, f是$X\times Y$上一个非负、广义实值、$\overline{\mathscr{M}\times\mathscr{N}}$可测函数. 则

(i) 对于ν几乎所有$y\in Y$, 函数$x\to f(x, y)$是$\mathscr{M}$可测的;

(ii) 对于μ几乎所有$x\in X$, 函数$y\to f(x, y)$是$\mathscr{N}$可测的;

(iii) 函数$y\to\int_X f(x, y)d\mu(x)$是$\mathscr{N}$可测的;

(iv) 函数$x\to\int_Y f(x, y)d\nu(y)$是$\mathscr{M}$可测的;

(v) 成立等式

$$\int_{X\times Y} f(x, y)d\overline{\mu\times\nu}(x, y)=\int_Y\int_X f(x, y)d\mu(x)d\nu(y)$$

$$=\int_X\int_Y f(x, y)d\nu(y)d\mu(x).$$

证 设$H\in\overline{\mathscr{M}\times\mathscr{N}}$. 按照(11.21), H具有$G\cup F$的形状,这里$G\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$,对于适合$\mu\times\nu(E)=0$的某个$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$, $F\subset E$. 对于每个$x\in X$, 有$H_x=G_x\cup F_x$, 从而由(21.15)和(21.4.i)可知, 对于μ几乎所有$x\in X$, $H_x\in\mathscr{N}$. 这样, 就$f=\xi_H$的情况, 便证明了(i)〔类似可证(ii)〕.

前段还表明, 对于μ几乎所有$x\in X$, $\nu(H_x)=\nu(G_x)$. 因为

$$\int_Y \xi_H(x, y)d\nu(y)=\nu(H_x),$$

所以（21.8.i）说明，函数

$$x \to \int_Y \xi_H(x, y)d\nu(y)$$

μ-a.e.等于$\mathscr{M}$可测函数$x \to \nu(G_x)$. 这样，就$f = \xi_H$的情况，便证明了(iv)〔类似可证(iii)〕.

为了就$f = \xi_H$的情况证明(v)，我们注意到

$$\int_{X\times Y} \xi_H d\,\overline{\mu\times\nu} = \overline{\mu\times\nu}(H) = \mu\times\nu(G)$$

$$= \int_Y\int_X \xi_G d\mu d\nu = \int_Y\int_X \xi_H d\mu d\nu.$$

类似可证(v)中第二个等式. 其余证明如（21.12）那样. □

(21.17) **注意** Fubini定理（21.13）对于$\overline{\mathscr{M}\times\mathscr{N}}$可测函数也是成立的. 这一事实可以由(21.16)推出——这和由（21.12）推出（21.13）的情况完全一样. 似乎不必重复这些细节了.

积分论中很多论证取决于所研究的单个测度或多个测度的正则性. 如§9所构造的测度ι固然自动是正则的〔参较（9.24）和(10.30)〕，但就这类测度的乘积来说，其正则性就远非显而易见的了. 以下定理中，我们再证明一些事实：即一个乘积测度的完全化，如果其因子都是正则的（而且σ有限），那么它也是正则的. 其证明颇为冗长，实在说也很乏味，不过方法并不难.

(21.18) **定理** 设X和Y都是局部紧Hausdorff空间，$(X, \mathscr{M}_\mu, \mu)$和$(Y, \mathscr{M}_\nu, \nu)$都是如§§9—10那样的$\sigma$有限测度空间. 则按照下述意义，$\mu\times\nu$的完全化$\overline{\mu\times\nu}$在$\overline{\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu}$上是正则的：如果$E \in \overline{\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu}$，那么

(i) $\overline{\mu\times\nu}(E) = \inf\{\mu\times\nu(U): E\subset U, U\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu, U$是开集$\}$，

(ii) $\overline{\mu\times\nu}(E) = \sup\{\mu\times\nu(F): E\supset F, F\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu, F$是紧集$\}$.

证 设$\mathscr{R}$是能使(i)和(ii)成立的集$E\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$全体所成的

集族。要证$\mathscr{R}=\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$.

假定$(E_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}$，并记$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 如果对于某个$n_0$，$\mu\times\nu(E_{n_0})=\infty$，那么(i)对于$E$是平凡的，而就(ii)来说，$E_{n_0}$含有具有任意大（有限！）测度的紧子集；所以$E$在$\mathscr{R}$中. 因此假定对于一切$n\in N$，都有$\mu\times\nu(E_n)<\infty$. 对于任意$\varepsilon>0$和每个$n\in N$，取一个紧集$F_n\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$和一个开集$U_n\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$，使

$$F_n\subset E_n\subset U_n,\quad \mu\times\nu(U_n\cap F_n')<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

命

$$U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n,\quad F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

便有：$F\subset E\subset U$；$U,F\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$；以及

$$\mu\times\nu(U\cap F')\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\times\nu(U_n\cap F')$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\times\nu(U_n\cap F_n')<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

由此可见

$$\mu\times\nu(U)=\mu\times\nu(E)+\mu\times\nu(U\cap E')\leqslant\mu\times\nu(E)+\varepsilon, \tag{1}$$

$$\mu\times\nu(E)=\mu\times\nu(F)+\mu\times\nu(E\cap F')\leqslant\mu\times\nu(F)+\varepsilon. \tag{2}$$

既然U是开集，由(1)式推知(i)对于E成立. 应用(2)式和(10.13)得到

$$\mu\times\nu(E)\leqslant\lim_{p\to\infty}\mu\times\nu(F_1\cup\cdots\cup F_p)+\varepsilon,$$

并由于对于一切p，$F_1\cup\cdots\cup F_p$是紧集，(ii)对于E也就成立. 所以$\mathscr{R}$对于可数并运算是封闭的.

其次，设$A\times B$是可测矩形. 利用σ有限性题设，取两个升序列$(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}_\mu$，$(B_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}_\nu$，使$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，

而对于一切$n\in N$，$\mu(A_n)<\infty$，$\nu(B_n)<\infty$. 那么

$$A\times B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[(A\cap A_n)\times(B\cap B_n)\right],$$

从而假如我们能证明$\mathscr{R}$包含每个具有有限测度边①的可测矩形，由前段便推出$A\times B\in\mathscr{R}$. 因此假定$\mu(A)<\infty$，$\nu(B)<\infty$. 利用μ和ν的正则性，取两个升紧集序列$(C_n)_{n=1}^{\infty}$和$(D_n)_{n=1}^{\infty}$以及两个降开集序列$(U_n)_{n=1}^{\infty}$和$(V_n)_{n=1}^{\infty}$，使得

$$C_n\subset A\subset U_n\subset X;$$
$$D_n\subset B\subset V_n\subset Y;$$

$$\mu(U_n)-\mu(C_n)<\frac{1}{n};$$

$$\nu(V_n)-\nu(D_n)<\frac{1}{n}.$$

那么对于每个$n\in N$，$U_n\times V_n$是开集，$C_n\times D_n$是紧集，而且$C_n\times D_n\subset A\times B\subset U_n\times V_n$. 此外还得到

$$\begin{aligned}\mu\times\nu(A\times B)&=\mu(A)\cdot\nu(B)\\&=\lim_{n\to\infty}[\mu(U_n)\cdot\nu(V_n)]=\lim_{n\to\infty}\mu\times\nu(U_n\times V_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\times\nu(A\times B)&=\mu(A)\cdot\nu(B)\\&=\lim_{n\to\infty}[\mu(C_n)\cdot\nu(D_n)]=\lim_{n\to\infty}\mu\times\nu(C_n\times D_n).\end{aligned}$$

于是$A\times B\in\mathscr{R}$，从而$\mathscr{R}$便含有一切可测矩形.

为了完成$\mathscr{R}=\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$的证明，只须证实$\mathscr{R}$对于求余运算也是封闭的. $(A_n\times B_n)_{n=1}^{\infty}$如上所设. 规定

$$\mathscr{R}_n=\{E\in\mathscr{R}:E\subset A_n\times B_n\}.$$

自然，$\mathscr{R}_n$对于可数并运算是封闭的. 设E属于$\mathscr{R}_n$，任给$\varepsilon>0$. 既

①这里借用“边”这一直观语言，来启示可测矩形这一概念的来源. 如果$A\times B$为可测矩形，通常称A和B为它的“边”. 自然，A和B都不一定是R内的区间. ——译者注

然$E\in\mathscr{R}$，便存在一个紧集F和一个开集U(都属于$\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$)，适合

$$F\subset E\subset U,\quad \mu\times\nu(U\cap F')<\varepsilon.$$

由于$A_n\times B_n\in\mathscr{R}$，便存在一个紧集$J$和一个开集$W$（都属于$\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$），适合

$$J\subset A_n\times B_n\subset W,\quad \mu\times\nu(W\cap J')<\varepsilon.$$

于是$W\times F'$是开集，$J\cap U'$是紧集. 此外显然有

$$J\times U'\subset(A_n\times B_n)\cap E'\subset W\cap F',$$

$$\begin{aligned}\mu\times\nu(W\cap F')-\mu\times\nu(J\cap U')&=\mu\times\nu((W\cap F')\cap(J\cap U')')\\&\leqslant\mu\times\nu(W\cap F'\cap J')+\mu\times\nu(W\cap F'\cap U)\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了$(A_n\times B_n)\cap E'$在$\mathscr{R}_n$中. 我们得出结论：$\mathscr{R}_n$乃是$A_n\times B_n$的一些子集所成的σ代数.

现在命

$$\mathscr{E}=\{E\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu:\text{对于任意}n\in N,\ E\cap(A_n\times B_n)\in\mathscr{R}_n\}.$$

由上述结果不难看出，$\mathscr{E}$是含有一切可测矩形的$X\times Y$的一些子集所成的σ代数. 这样

$$\mathscr{E}=\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu.$$

于是对于任意$E\in\mathscr{R}$，便有$E'\in\mathscr{E}$；由此对于一切n，$E'\cap(A_n\times B_n)$便属于$\mathscr{R}$，从而

$$E'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{E'\cap(A_n\times B_n)\}\in\mathscr{R}.$$

因此$\mathscr{R}$对于求余运算也是封闭的. 总之，我们已证明了$\mathscr{R}=\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$.

最后，设H是$\overline{\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu}$中任意一个集. 那么$H=G\cup F$，其中$G\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$，对于适合$\mu\times\nu(E)=0$的某个$E\in\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$，$F\subset E$. 当$\mu\times\nu(G)=\infty$时，(i)和(ii)对于$H$自然都成立；因此假定$\mu\times\nu(G)<\infty$. 给定$\varepsilon>0$，取两个开集$U$，$V$和一个紧集$C$（都属于$\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$），适合

$$C\subset G\subset U,\quad E\subset V,\quad \mu\times\nu(U\cap C')<\varepsilon,\quad \mu\times\nu(V)<\varepsilon.$$

则得到

$$C\subset H\subset U\cup V,$$

$$\mu\times\nu(U\cup V)-\mu\times\nu(C)\leqslant\mu\times\nu(V)+\mu\times\nu(U\cap C')<2\varepsilon.$$

由此可见

$$\mu\times\nu(U\cup V)<\overline{\mu\times\nu}(H)+2\varepsilon,$$

$$\overline{\mu\times\nu}(H)<\mu\times\nu(C)+2\varepsilon,$$

从而(i)和(ii)对于H也都是成立的. □

从以下两个习题（21.19），（21.20）中，读者可以了解到σ代数$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$究竟有多大：其实它们是相当小的.

(21.19) **习题** 设X，Y都是拓扑空间，每一个都具有拓扑的一个可数基. 试证$\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)=\mathscr{B}(X\times Y)$. 〔利用(6.41)和（10.42）.〕

(21.20) **习题** (a) 设T是一个集，$\mathscr{E}$是T的一个子集族. 试证：由$\mathscr{E}$生成的T的子集所成的σ代数$\mathscr{S}(\mathscr{E})$，恰好是由适合以下条件的集$F\subset T$组成的：对于某个可数族$\mathscr{C}\subset\mathscr{E}$，$F\in\mathscr{S}(\mathscr{C})$.

(b) 试利用(a)证明：如果X，Y都是拓扑空间，$F\in\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$，那么必存在形如$U\times V$的集所成的一个可数族$\mathscr{C}$（其中$U$是$X$中的开集，$V$是$Y$中的开集），使得$F\in\mathscr{S}(\mathscr{C})$.

(c) 试利用(a)证明：如果X是一个集，$D=\{(x,x):x\in X\}$是$X\times X$中的对角集，那么$D\in\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$的充要条件是$\overline{\overline{X}}\leqslant\mathfrak{c}$. 〔当$\overline{\overline{X}}\leqslant\mathfrak{c}$时，假定$X\subset R$,并利用(21.19).如果$D\in\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$，则取一个可数族$\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$，使$D\in\mathscr{S}(\{A\times B:A,B\in\mathscr{C}\})$，然后证明把$X$映入$\mathscr{P}(\mathscr{C})$的映射$x\to\{C\in\mathscr{C}:x\in C\}$是1－1的.〕

(d) 试求一个局部紧Hausdorff空间X,满足$\overline{\overline{X}}\leqslant\mathfrak{c}$，而且$\mathscr{B}(X\times X)\neq\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)$.

乘积测度一般说来并不是完全的，下面的习题阐明了这一点.

(21.21) **习题** (a) 设$(X,\mathscr{M},\mu)$，$(Y,\mathscr{N},\nu)$都是完全的①、σ有限测度空间. 假定存在一个集$A\subset X$，$A\notin\mathscr{M}$，并假定

① "完全的"三字是译者加的. ——译者注

存在一个非空集$B\in\mathcal{N}$，$\nu(B)=0$．试证（$X\times Y$，$\mathcal{M}\times\mathcal{N}$，$\mu\times\nu$）是不完全的.

(b) 试证（R^2，$\mathcal{M}_\lambda\times\mathcal{M}_\lambda$，$\lambda\times\lambda$）是不完全测度空间.

(21.22) **习题** 试就$R\times R$上由下列公式定义的各个函数，计算 $\int_0^1\int_0^1 f(x, y)dx\,dy$，$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)dydx$，$\int_0^1\int_0^1 |f(x, y)|\,dxdy$，$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\,dydx$：

(a) $f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$；

(b) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}, & 0<y<\left|x-\dfrac{1}{2}\right|,\\ 0, & \text{其它}；\end{cases}$

(c) $f(x, y)=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$；

(d) $f(x, y)=\dfrac{1}{(1-xy)^p}$，$p>0$.

将计算结果同（21.13）作比较.

(21.23) 习题 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$是一个σ有限测度空间. 并设f是定义在X上的一个非负、广义实值、$\mathcal{M}$可测函数. 规定

$$V^*f=\{(x, t)\in X\times R: 0\leqslant t\leqslant f(x)\},$$

$$V^*f=\{(x, t)\in X\times R: 0\leqslant t< f(x)\}.$$

试证：V^*f和V_*f属于σ代数$\mathcal{M}\times\mathcal{B}(R)$，并且

(i) $\mu\times\lambda(V^*f)=\mu\times\lambda(V_*f)=\int_X fd\mu$.

〔等式(i)说明：f的积分等于"曲线$y=f(x)$下的面积"．〕

(21.24) **习题** 设μ是〔0，1〕上的计数测度，$D=\{(x, x)$：$x\in[0,1]\}$. 记$X=Y=[0,1]$. 试证：

$$\int_Y\int_X \xi_D d\mu d\lambda\neq\int_X\int_Y \xi_D d\lambda d\mu.$$

这并不同（21.12）矛盾. 为什么？

(21.25) **习题** 设$(X, \mathscr{M}_\mu, \mu)$和$(Y, \mathscr{M}_\nu, \nu)$是如(21.18)所说的两个测度空间. 试证：

(a) 凡$X\times Y$的紧G_δ子集都属于$\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$.

(b) 凡$\mathscr{C}_{00}(X\times Y)$中的函数都是$\mathscr{M}_\mu\times\mathscr{M}_\nu$可测的.

(21.26) **习题** (a) 命$I=[0,1]$.假定$E\subset I\times I$适合条件：对于任意$x,y\in I$, $\lambda(E_x)=\lambda(I\cap(E^y)')=0$. 试证$E$不是$\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda$可测的.

(b) 试证(a)小题中所说的集E是存在的.〔设Δ是适合$\overline{\overline{P_\Delta}}=\mathfrak{c}$的最小序数〔参见(4.47)和(4.48)〕. 又设$\alpha\to x_\alpha$是把P_Δ映满I的任意一个1-1映射. 规定

$$E=\{(x_\alpha, x_\beta):\beta<\alpha<\Delta\}.$$

则对于任意x, $y\in I$,

$$\overline{\overline{E_x}}<\mathfrak{c}, \quad \overline{\overline{I\cap(E^y)'}}<\mathfrak{c}.$$

假如承认连续统假设(4.50)是正确的，那么所有这些集便都是可数的. 总之，由(10.30)，(6.66)及(6.65)可知，如果这些集都可测，则它们都具有零测度.〕

(21.27) **习题** 试证：存在$I\times I$(其中$I=[0,1]$)的一个子集S，它具有性质：对于任意$x,y\in I$, $\overline{\overline{S_x}}\leqslant 1$, $\overline{\overline{S^y}}\leqslant 1$, 但$S\notin\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$.〔在以下证明概要中，请读者补上许多缺掉的细节. 设$\mathscr{F}$是适合$\lambda\times\lambda(F)>0$的紧集$F\subset I\times I$全体所成的族. Δ如(21.26)所设，并设$\alpha\to F_\alpha$是把P_Δ映满$\mathscr{F}$的1-1映射. 取$(x_0, y_0)\in F_0$. 如果$\beta<\Delta$，并且选好了$S_\beta=\{(x_\alpha, y_\alpha):\alpha<\beta\}$，使得$S_\beta$的垂直截口或水平截口都不含有一个以上的点，则命$B_\beta=\{x\in I:\lambda((F_\beta)_x)>0\}$. 由于$\lambda(B_\beta)>0$，便存在$x_\beta\in B_\beta\cap\{x_\alpha:\alpha<\beta\}'$. 现由于$\lambda((F_\beta)_{x_\beta})>0$，便存在$y_\beta\in(F_\beta)_{x_\beta}\cap\{y_\alpha:\alpha<\beta\}'$.命$S=\{(x_\alpha, y_\alpha):\alpha<\Delta\}$. 显然对于任意$\alpha$, $S\cap F_\alpha\neq\varnothing$，从而由于具有正测度的任意可测集都含有某个$F_\alpha$，因此$S$就不可能是可测的.〕

(21.28) **习题** 请读者回忆，我们在(20.37)对超滤子及其

相应的有限加性测度所作的讨论．设$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$是R的一些子集所成的两个超滤子，满足：$\mathscr{U}\supset\{[a,\infty[:a\in R\}$，$\mathscr{V}\supset\{]-\infty,b]:b\in R.\}$对于任意$E\subset R$，规定：

$$\mu(E)=\begin{cases}1, & E\in\mathscr{U},\\ 0, & E\notin\mathscr{U};\end{cases}$$

$$\nu(E)=\begin{cases}1, & E\in\mathscr{V},\\ 0, & E\notin\mathscr{V}.\end{cases}$$

那么μ和ν在$\mathscr{P}(R)$上都是有限加性的．设f是R上适合条件$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta$的任意一个有界实值函数，其中$\alpha$，$\beta$是任意给定的实数．试证：

(a) 对于每个$y\in R$，$\int_R f(x+y)d\mu(x)=\alpha$；

(b) 对于每个$x\in R$，$\int_R f(x+y)d\nu(y)=\beta$；

(c) $\int_R\int_R f(x+y)d\mu(x)d\nu(y)=\alpha$；

(d) $\int_R\int_R f(x+y)d\nu(y)d\mu(x)=\beta$．

这样一来，在缺少可数加性条件的情况下，对于一些很简单的函数而言，Fubini定理也完全可能不成立．

以下定理描述了，在形成乘积测度时，绝对连续性及奇异性的特点．

(21.29) **定理** 设$(X,\mathscr{M})$和$(Y,\mathscr{N})$是两个可测空间．又设μ和$\mu^{\dagger}$是$(X,\mathscr{M})$上两个σ有限测度，ν和$\nu^{\dagger}$是$(Y,\mathscr{N})$上两个σ有限测度。如果$\mu^{\dagger}\ll\mu$，$\nu^{\dagger}\ll\nu$，则有

$$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}\ll\mu\times\nu,$$

而且对于任意$(x,y)\in X\times Y$，都成立

(i) $\dfrac{d(\mu\times\nu^{\dagger})}{d(\mu\times\nu)}(x,y)=\dfrac{d\mu^{\dagger}}{d\mu}(x)\cdot\dfrac{d\nu^{\dagger}}{d\nu}(y)$．

如果$\mu\perp\mu^\dagger$或$\nu^\dagger\perp\nu$，则有

$$\mu^\dagger\times\nu^\dagger\perp\mu\times\nu.$$

把$\mu^\dagger$关于μ的Lebesgue分解等等记以下标a和s，就有

(ii) $(\mu^\dagger\times\nu^\dagger)_a=\mu_a^\dagger\times\nu_a^\dagger$,

(iii) $(\mu^\dagger\times\nu^\dagger)_s=(\mu_a^\dagger\times\nu_s^\dagger)+(\mu_s^\dagger\times\nu_a^\dagger)+(\mu_s^\dagger\times\nu_s^\dagger)$.

证 假定$\mu^\dagger\ll\mu$，$\nu^\dagger\ll\nu$，并设$E\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$适合$\mu\times\nu(E)=0$．根据(21.9)得到

$$0=\mu\times\nu(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu(x). \tag{1}$$

由(12.6)，集$A=\{x\in X:\nu(E_x)>0\}$具有μ测度0．根据题设,则有$\mu^\dagger(A)=0$，而当$x\in A'$时，$\nu^\dagger(E_x)=0$．因而

$$\begin{aligned}\mu^\dagger\times\nu^\dagger(E)&=\int_X\nu^\dagger(E_x)d\mu^\dagger(x)=\int_A\nu^\dagger(E_x)d\mu^\dagger(x)\\&\quad+\int_{A'}\nu^\dagger(E_x)d\mu^\dagger(x)\\&=0+\int_{A'}0\,d\mu^\dagger(x)=0.\end{aligned}$$

这就证实了$\mu^\dagger\times\nu^\dagger\ll\mu\times\nu$．我们来证(i)，（为了简便起见）$\frac{d\mu^\dagger}{d\mu}$记作$f_0$，$\frac{d\nu^\dagger}{d\nu}$记作$g_0$．把(21.13)应用于任意$f\in\mathfrak{L}_1(X\times Y,\mathscr{M}\times\mathscr{N},\mu^\dagger\times\nu^\dagger)$．并注意到(19.24)，便得出

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}fd\mu^\dagger\times\nu^\dagger&=\int_X\int_Y f(x,y)d\nu^\dagger(y)d\mu^\dagger(x)\\&=\int_X\int_Y f(x,y)g_0(y)d\nu(y)d\mu^\dagger(x)\\&=\int_X\int_Y f(x,y)g_0(y)d\nu(y)f_0(x)d\mu(x)\\&=\int_X\int_Y f(x,y)f_0(x)g_0(y)d\nu(y)d\mu(x). \quad (1)\end{aligned}$$

$X\times Y$上的函数$(x, y)\to f(x, y)f_0(x)g_0(y)$显然是$\mathscr{M}\times\mathscr{N}$可测的，从而可以把(21.13)应用于(1)式最后一个积分，得到

$$\int_X\int_Y f(x, y)f_0(x)g_0(y)d\nu(y)d\mu(x)$$

$$=\int_{X\times Y} f(x, y)f_0(x)g_0(y)d\mu\times\nu(x, y). \qquad (2)$$

然后结合(1)及(2)，并设$f=\xi_A$，这里$A\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$，$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}(A)<\infty$. 由此推出

$$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}(A)=\int_{X\times Y}\xi_A(x,y)f_0(x)g_0(y)d\mu\times\nu(x,y). \qquad (3)$$

因为$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}$是$\sigma$有限的，所以(3)式对于一切$A\in\mathscr{M}\times\mathscr{N}$都是成立的，而由(19.24)中唯一性规定，便证明了(i).

现在假定$\mu^{\dagger}\perp\mu$. 设B是$\mathscr{M}$中适合$\mu(B)=0$，$\mu^{\dagger}(B')=0$的一个集，那么正如(21.11)所指出的，便有

$$\mu\times\nu(B\times Y)=\mu(B)\nu(Y)=0,$$

$$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}((B\times Y)')=\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}(B'\times Y)=\mu^{\dagger}(B')\nu^{\dagger}(Y)=0$$

这就蕴涵$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}\perp\mu\times\nu$. 对于任何$\mu$，$\mu^{\dagger}$，$\nu$及$\nu^{\dagger}$，都有

$$\mu^{\dagger}\times\nu^{\dagger}=(\mu_a{}^{\dagger}+\mu_s{}^{\dagger})\times(\nu_a{}^{\dagger}+\nu_s{}^{\dagger})$$

$$=(\mu_a{}^{\dagger}\times\nu_a{}^{\dagger})+(\mu_a{}^{\dagger}\times\nu_s{}^{\dagger})+(\mu_s{}^{\dagger}\times\nu_a{}^{\dagger})+(\mu_s{}^{\dagger}\times\nu_s{}^{\dagger}),$$

由此不难得出(ii)和(iii). □

Fubini定理和Lebesgue控制收敛定理是分析学的奠基石. Fourier变换理论，以及很多别的理论问题无不最终依赖于这两个定理. 本节其余部分，我们致力于阐述这两个定理的若干应用. 以下第一个结果是一条简单的引理，证明空间$X\times Y$上函数的$\mu\times\nu$可测性时，要用到这一引理.

(21.30) **引理** 设φ是定义在R^2上的一个实值Borel可测函数，并满足条件：如果$M\subset R$，$\lambda(M)=0$，那么$\varphi^{-1}(M)\in\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$，$\overline{\lambda\times\lambda}(\varphi^{-1}(M))=0$. 则对于$R$上$\lambda$-a.e.有定义的任意复值

Lebesgue可测函数f，$f\circ\varphi$是$\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$可测的.

证 先假设$f=\xi_A$，这里$A\in\mathscr{M}_\lambda$. 根据（10.34），我们有$A=B\cup M$，其中$B\in\mathscr{B}(R)$，$\lambda(M)=0$. 则不妨记$\xi_A\circ\varphi=\xi_{A_1}$，其中

$$A_1=\varphi^{-1}(A)=\varphi^{-1}(B)\cup\varphi^{-1}(M).$$

由于

$$\varphi^{-1}(B)\in\mathscr{B}(R^2)\subset\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda},$$

$$\varphi^{-1}(M)\in\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda},$$

就$f=\xi_A$的情况便证明了引理. 因为

$$(f+g)\circ\varphi=f\circ\varphi+g\circ\varphi,$$

所以当f是简单函数时，引理也成立.

最后设f是定义在$R\cap F'$上的一个复值、Lebesgue可测函数，其中$F\subset R$，$\lambda(F)=0$. 利用（11.35），可以得到R上的一个复值，Lebesgue可测、简单函数序列（s_n），满足：对于任意$x\in R\cap F'$，$s_n(x)\to f(x)$. 那么对于任意$n\in N$，$s_n\circ\varphi$是$\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$可测的，并且除了在$\varphi^{-1}(F)$上之外，都有

$$s_n\circ\varphi\to f\circ\varphi.$$

由于

$$\overline{\lambda\times\lambda}(\varphi^{-1}(F))=0,$$

可见$f\circ\varphi$是$\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$可测的(11.24). □

(21.31) **定理** 设f和g属于$\mathfrak{L}_1(R)$. 则对于几乎所有$x\in R$，函数$y\to f(x-y)g(y)$属于$\mathfrak{L}_1(R)$. 就所有这样的x，规定

(i) $$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy.$$

则$f*g(x)\in\mathfrak{L}_1(R)$，而且$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_1$.（函数$f*g$叫做$f$和$g$的卷积.）

证 暂且假定函数$(x,y)\to f(x-y)g(y)$在R^2上是$\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$

可测的. 应用(21.12)写出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\cdot\|f\|_1dy=\|f\|_1\cdot\|g\|_1$$

$$<\infty.$$

这样便满足了Fubini定理(21.13)的假设，从而对于几乎所有 $x\in R$，$y\to f(x-y)g(y)$ 属于 $\mathfrak{L}_1(R)$，$f*g\in\mathfrak{L}_1(R)$，而且

$$\|f*g\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\right|dx$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dxdy$$

$$=\|f\|_1\cdot\|g\|_1<\infty.$$

现在来证明函数 $(x, y)\to f(x-y)g(y)$ 确乎是 $\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$ 可测的. 函数 $(x, y)\to g(y)$ 是 $\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$ 可测的，原因是对于任意 $B\in\mathscr{B}(K)$，都有

$$\{(x, y)\in R^2: g(y)\in B\}=R\times\{g^{-1}(B)\}\in\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}.$$

这样，只须证明函数 $(x, y)\to f(x-y)$ 是 $\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$ 可测的. 对于 $(x, y)\in R^2$，命

$$\varphi(x, y)=x-y.$$

由于 φ 是连续的，因而 φ 是Borel可测的，从而我们一旦证实只要 $\lambda(M)=0$，就有 $\overline{\lambda\times\lambda}\,(\varphi^{-1}(M))=0$，那么由(21.30)便得出所期望的结果.

设 M 是 R 的这样的一个子集. 那么

$$\overset{\bullet}{\varphi}^{-1}(M)=\{(x,\ y)\in R^2:(x-y)\in M\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n,$$

其中$P_n=\{(x,\ y)\in R^2:(x-y)\in M,\ |y|\leqslant n\}$，我们通过验明对于任意$n\in N$，都有$P_n\in\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$，$\overline{\lambda\times\lambda}(P_n)=0$，来完成证明.固定$n\in N$，并选取$R$的一个递减开子集序列$(U_k)_{k=1}^{\infty}$，使得

$$M\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k,\quad \lambda(U_k)\to 0.$$

命

$$B_k=\{(x,\ y)\in R^2:(x-y)\in U_k,\ |y|\leqslant n\}.$$

我们马上看出$(B_k)\subset\mathscr{B}(R^2)$，$P_n\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$.利用(10.15),(21.12)及(12.44)，可写出

$$\begin{aligned}
\lambda\times\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)&=\lim_{k\to\infty}\lambda\times\lambda(B_k)\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_{B_k}(x,\ y)dxdy\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{-n}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_{U_k}(x-y)dxdy\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{-n}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_{U_k}(x)dxdy\\
&=\lim_{k\to\infty}2n\lambda(U_k)=0.
\end{aligned}$$

既然$P_n\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$，我们便证明了$\overline{\lambda\times\lambda}(P_n)=0$. □

有可能作某些函数偶的卷积，而其中的函数并非都属于$\mathfrak{L}_1(R)$.在以下两个定理以及习题(21.56)中阐明这一事实.

(21.32) **定理** 假定$1<p<\infty$，$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，而$g\in\mathfrak{L}_p(R)$.则对于几乎一切$x\in R$，函数$y\to f(x-y)g(y)$和$y\to f(y)g(x-y)$都属于$\mathfrak{L}_1(R)$.对所有这样的x，记

$$f*g(x)=\int_R f(x-y)g(y)dy,$$

$$g*f(x)=\int_R g(x-y)f(y)dy.$$

则$f*g=g*f$ a.e.，$f*g\in\mathfrak{L}_p(R)$，而且

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_p.$$

证 照例，命$p'=\dfrac{p}{p-1}$，并设$h\in\mathfrak{L}_{p'}(R)$，如同(21.31)一样，我们知道函数$(x,y)\to f(x-y)$，$(x,y)\to g(x-y)$都是$\overline{\mathscr{M}_\lambda\times\mathscr{M}_\lambda}$可测的．应用(12.44)，(21.12)以及Hölder不等式(13.4)，得到

$$\begin{aligned}&\int_R\int_R|f(x-y)g(y)h(x)|\,dydx\\&=\int_R|h(x)|\int_R|f(x-y)g(y)|\,dydx\\&=\int_R|h(x)|\int_R|f(t)g(x-t)|\,dtdx\\&=\int_R|f(t)|\int_R|g(x-t)h(x)|\,dxdt\\&\leqslant\int_R|f(t)|\cdot\|g_{-t}\|_p\cdot\|h\|_{p'}dt\\&=\int_R|f(t)|\cdot\|g\|_p\cdot\|h\|_{p'}dt\\&=\|f\|_1\cdot\|g\|_p\cdot\|h\|_{p'}<\infty.\qquad(1)\end{aligned}$$

（如同(8.14)和(12.44)一样，g_{-t}表示由$-t$产生的g的平移．）由于h可以恒不为零，例如取$h(x)=\exp(-x^2)$，所以(1)式蕴涵对于几乎所有$x\in R$，积分$\int_R|f(x-y)g(y)|\,dy$和$\int_R|f(t)g(x-t)|\,dt$都是有限的．这就证明了命题的第一个断言．

由(1)及(21.13)还得出，映射

$$h \to \int_R h(x) f * g(x) dx$$

是 $\mathfrak{L}_{p'}(R)$ 上一个有界线性泛函，并具有不超过 $\|f\|_1 \cdot \|g\|_p$ 的范数. 定理(15.12)表明，存在一个函数 $\varphi \in \mathfrak{L}_p(R)$，使对于任意 $h \in \mathfrak{L}_{p'}(R)$，

$$\int_R h(x)\varphi(x)dx = \int_R h(x) f * g(x) dx, \tag{2}$$

而且

$$\|\varphi\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

由(2)式，并作一般性论证，便得出结论：$\varphi = f * g$ a.e.，还得出 $f * g \in \mathfrak{L}_p(R)$，而且 $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$，最后我们有

$$f*g(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy = \int_R f(t)g(x-t)dt = g*f(x)$$

对于几乎所有 x 成立，也就是说对于使得这些被积函数属于 $\mathfrak{L}_1(R)$ 的所有 x 成立. □

(21.33) **定理** 设 $1 \leqslant p < \infty$，$f \in \mathfrak{L}_p(R)$，$g \in \mathfrak{L}_{p'}(R)$（这里当 $p>1$ 时，$p' = \dfrac{p}{p-1}$，而 $1' = \infty$）. 在 R 上规定 $f * g$ 为

$$f*g(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy.$$

则 $f * g$ 在 R 上一致连续，而且

$$\|f*g\|_u \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

如果 $p>1$，则 $f * g \in \mathfrak{C}_0(R)$.

证 当 $p>1$ 时利用(13.4)，而当 $p=1$ 时则利用(20.16)，便知道对于所有 $x \in R$，$f * g(x)$ 是存在的，而且

$$\|f*g\|_u \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

其次设有任意的 $\varepsilon>0$. 根据(13.24)，总存在 $\delta>0$，使当 $x, z \in R$，$|x-z| < \delta$ 时，

$$\|f_x-f_z\|_p\|g\|_{p'}<\varepsilon.$$

那么当$|x-z|<\delta$时，便有

$$|f*g(x)-f*g(z)|\leqslant\int_R|f(x-y)-f(z-y)|\cdot|g(y)|dy$$
$$\leqslant\|f_x-f_z\|_p\cdot\|g\|_{p'}<\varepsilon.$$

这样，$f*g$在R上便是一致连续的.

现假定$p>1$，给定$\varepsilon>0$，选取一个紧区间$F=[-a, a]\subset R$，适合

$$\int_{F'}|f|^p d\lambda<\varepsilon^p,\quad \int_{F'}|g|^{p'}d\lambda<\varepsilon^{p'}.$$

(由(12.22)或(12.24)立即推知F是存在的.) 那么，当$x\in R$，$|x|>2a$时，便有$[x-a, x+a]\subset F'$，由此

$$|f*g(x)|\leqslant\left|\int_F f(x-y)g(y)dy\right|+\left|\int_{F'}f(x-y)g(y)dy\right|$$
$$\leqslant\left(\int_F|f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}+\|f\|_p$$
$$\cdot\left(\int_{F'}|g(y)|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant\left(\int_{x-a}^{x+a}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|g\|_{p'}+\|f\|_p\cdot\varepsilon$$
$$\leqslant\left(\int_{F'}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|g\|_{p'}+\|f\|_p\cdot\varepsilon$$
$$\leqslant(\|f\|_p+\|g\|_{p'})\varepsilon.$$

于是$f*g$在无穷大处等于零，因而$f*g\in\mathfrak{C}_0(R)$. □

(21.34) 定理 按照作为乘法的卷积，$\mathfrak{L}_1(R)$成为复交换Banach代数.

证 我们留给读者来做必要的计算，以证明：对于任意

$f, g, h \in \mathfrak{L}_1(R)$和任意$\alpha \in K$，都成立

$$f*(g*h)=(f*g)*h,$$

$$f*(g+h)=(f*g)+(f*h),$$

$$\alpha(f*g)=(\alpha f)*g=f*(\alpha g);$$

在(21.32)中已知，卷积是交换的，而在(21.31)中又已知

$$\| f*g \|_1 \leqslant \| f \|_1 \cdot \| g \|_1 .$$

既然$\mathfrak{L}_1(R)$是复Banach空间(13.11)，那么定义(7.7)中的要求都已达到了。 □

代数$\mathfrak{L}_1(R)$通常叫做R**的群代数**.

(21.35) **定理** 代数$\mathfrak{L}_1(R)$没有乘法单位元.

证 倘若$\mathfrak{L}_1(R)$有一个乘法单位元u，就是说，$u \in \mathfrak{L}_1(R)$，而对于一切$f \in \mathfrak{L}_1(R)$，

$$u*f=f \quad \text{a.e.}$$

根据(12.34)，便存在实数$\delta>0$，使得

$$\int_{-2\delta}^{2\delta} |u(t)|\,dt<1.$$

命$f=\xi_{[-\delta,\delta]}$，那么$f \in \mathfrak{L}_1(R)$，从而对于几乎所有$x \in R$，得到

$$f(x)=u*f(x)=\int_R u(x-y)f(y)dy$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta} u(x-y)dy=\int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)dt.$$

既然$\lambda([-\delta,\delta])>0$，那么必有$x \in [-\delta,\delta]$，使得

$$1=f(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)dt.$$

由于$[x-\delta,x+\delta]\subset[-2\delta,2\delta]$，根据$\delta$的选取便推出

$$1=\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)dt\right| \leqslant \int_{x-\delta}^{x+\delta} |u(t)|\,dt \leqslant \int_{-2\delta}^{2\delta} |u(t)|\,dt<1.$$

这个矛盾证明了定理. □

虽然$\mathfrak{L}_1(R)$没有单位元，但是它确乎有一些“近似单位元”，正是后者在不少论题中很有用处，以下给出精确定义.

(21.36) **定义** 设有一个序列$(u_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{L}_1(R)$，如果它满足下列三个条件，则称之为**近似单位元**〔或**正核**(positive kernel)〕：

(i) 对于一切n，$u_n\geqslant 0$；

(ii) 对于一切n，$\|u_n\|_1=1$；

(iii) 对于0的每个邻域V，都成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{V'}u_n(t)dt=0.$$

显然，近似单位元是存在的；例如，取$u_n=\frac{n}{2}\xi_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}$.

以下定理说明我们所采用的这一术语是有道理的.

(21.37) **定理** 设(u_n)是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个近似单位元. 如果$1\leqslant p<\infty$，则对于任意$f\in\mathfrak{L}_p(R)$，都成立

$$\lim_{n\to\infty}\|f*u_n-f\|_p=0.$$

证 设$f\in\mathfrak{L}_p(R)$，并给定$\varepsilon>0$. 利用(13.24)，在R中可以找到0的一个邻域V，使得只要$y\in V$，就有

$$2\|f_{-y}-f\|_p<\varepsilon.$$

其次利用(21.36.iii)，选取$n_0\in N$，使当$n\geqslant n_0$时，

$$4\|f\|_p\int_{V'}u_n(y)dy<\varepsilon.$$

现在固定一个任意的$n\geqslant n_0$. 那么(21.31)或(21.32)表明$(f*u_n-f)\in\mathfrak{L}_p(R)$，从而对于任何$h\in\mathfrak{L}_{p'}(R)$（记住$1'=\infty$），Fubini定理(21.13)和Hölder不等式(13.4)则表明

$$\left|\int_R(f*u_n(x)-f(x))h(x)dx\right|$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|\int_R\int_R(f(x-y)u_n(y)-f(x)u_n(y))dyh(x)dx\right| \\
&\leqslant\int_R|u_n(y)|\int_R|f(x-y)-f(x)|\ |h(x)|\,dxdy \\
&\leqslant\int_R|u_n(y)|\ \|f_{-y}-f\|_p\|h\|_{p'}dy \\
&\leqslant\int_V u_n(y)\frac{\varepsilon}{2}\|h\|_{p'}dy+\int_{V'}u_n(y)2\|f\|_p\cdot\|h\|_{p'}dy \\
&<\varepsilon\|h\|_{p'}.
\end{aligned}
$$

这样，$\mathfrak{L}_{p'}(R)$上的有界线性泛函$h\rightarrow\int_R(f*u_n-f)hd\lambda$便有不超过$\varepsilon$的范数，因而由(15.1)得出：当$p>1$时，

$$\|f*u_n-f\|_p\leqslant\varepsilon.$$

至于$p=1$的情况，在上述计算中无非是取$h=1$. □

(21.38) 评注 (a) 我们现在研究R上各种函数类的Fourier变换. 这种变换在分析应用中是极其重要的，在描述Banach代数$\mathfrak{L}_1(R)$的结构时也大有用处. Fourier级数理论与Fourier变换理论之间，既有其很类似之处，也有某些重要区别，以下论述中遇到此类地方时，我们将指出这种相似和差异.

(b) 我们复习一下函数$f\in\mathfrak{L}_1(R)$的Fourier变换$\hat{f}$的定义(16.36)：对于任意$y\in R$,

$$\text{(i)}\quad \hat{f}(y)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-ixy)dx.$$

为了方便起见，(i)中写上了因子$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$. 读者会注意到Fourier系数$\hat{f}(n)$定义(16.33)中所用到的正规化：即所有积分都除以2π. 这样做就使$\{\exp(inx)\}_{n\in Z}$变成$[-\pi,\pi]$上的正规正交集，还顺便得到了(16.37)，(18.28)及(18.29)中一些有用的结果. 倘若我们用$\int_{-\pi}^{\pi}\cdots d\lambda$来代替$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots d\lambda$，那么陈述所有这些定理时就要稍

微复杂些了.就Fourier变换而言，也有类似情况，用因子$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$"正规化"所论及的积分是很有道理的，在适当时机我们要指出这样做的理由.

(c) 其实，所有积分$\int_R \cdots d\lambda$都用$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \cdots d\lambda$代替，是很方便的. 在(21.38)—(21.66)各段中，我们就约定都这样代替，并约定：当$1\leqslant p<\infty$时，

$$\|f\|_p=\left[(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R |f|^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}}.$$

按这一新解释，则得到

$$f*g(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x-y)g(y)dy;$$

而分别由(21.31)及(21.32)知道，以下两个不等式

$$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1,$$

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$$

显然仍成立.

我们的第一个定理是很简单的.

(21.39) Riemann-Lebesgue引理 如果f属于$\mathfrak{L}_1(R)$，则$\hat{f}$属于$\mathfrak{C}_0(R)$①

证 对于非零$y\in R$，我们有

$$\hat{f}(y)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-ixy)dx$$

$$=(-1)\exp(-\pi i)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-ixy)dx$$

$$=(-1)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp\left(-i\left(x+\frac{\pi}{y}\right)y\right)dx$$

①把这一事实同(16.35)相对照.

$$=(-1)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f\left(x-\frac{\pi}{y}\right)\exp(-ixy)dx.$$

于是

$$2|\hat{f}(y)|=\left|(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-ixy)dx\right.$$

$$\left.-(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f\left(x-\frac{\pi}{y}\right)\exp(-ixy)dx\right|$$

$$\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{y}\right)\right|\cdot|\exp(-ixy)|\,dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{y}\right)\right|dx.$$

考虑到(13.24)，这就表明当$|y|$充分大时，$|\hat{f}(y)|$可任意小.

尚需证明$\hat{f}$是连续的. 给定$\varepsilon>0$，取一个紧区间$I=[-a,a]$ $(a>0)$，使

$$4\int_{-I}|f(x)|\,dx<\varepsilon, \tag{1}$$

然后取$\delta>0$，使

$$2a\delta\int_{-a}^{a}|f(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{2}$$

既然对于任意$u\in R$，都成立$|\sin(u)|\leqslant|u|$，那么由(1)和(2)推知：当y，$t\in R$，$|t|<\delta$时，

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\hat{f}(y+t)-\hat{f}(y)|$$

$$=\left|\int_R f(x)\exp(-iyx)(\exp(-itx)-1)dx\right|$$

$$\leqslant\int_R|f(x)|\cdot|\exp(-itx)-1|\,dx$$

$$= \int_R |f(x)| \cdot 2\left|\sin\left(\frac{tx}{2}\right)\right| dx$$

$$\leqslant 2\int_{I'} |f(x)|\,dx + \int_{-a}^{a} |f(x)| \cdot |tx|\,dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + a\delta \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx$$

$$< \varepsilon .$$

这样，$\hat{f}$在R上便是（一致）连续的. □

(21.40) **评注** 显而易见，Fourier 变换 $f \to \hat{f}$——它把 $\mathfrak{L}_1(R)$映入$\mathfrak{C}_0(R)$——是线性的. 它也是有界的，这是因为

$$\| \hat{f} \|_u = \sup_{y\in R}\left|(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-iyx)\,dx\right|$$

$$\leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R |f(x)|\,dx = \| f \|_1.$$

下一个定理则表明，这一变换还是保乘积的（$\mathfrak{L}_1$中的卷积变成$\mathfrak{C}_0$中的点态乘法）. Fourier变换又是1-1的(21.47)，而且其值域在$\mathfrak{C}_0$中一致稠密(21.62.b). 看来没有简单的方法来本质上描述$\mathfrak{C}_0$中这样的函数，即对于某个$f\in\mathfrak{L}_1$，它具有$\hat{f}$的形状.

(21.41) **定理** 设f，g都是$\mathfrak{L}_1(R)$中的函数，则

(i) $\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$.

证 对于任意$y\in R$，我们有

$$\widehat{f*g}(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f*g(x)\exp(-iyx)\,dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x-t)g(t)\,dt\exp(-iyx)\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R g(t)\int_R f(x-t)\exp(-iyx)dxdt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R g(t)\int_R f(u)\exp(-i(t+u)y)dudt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R g(t)\exp(-iyt)\int_R f(u)\exp(-iyu)dudt$$

$$=\hat{f}(y)\cdot\hat{g}(y);$$

我们充分利用了Fubini定理和(12.44). □

接下来我们研究从一个函数的Fourier 变换怎样来重新构造这个函数. 关于Fourier级数的类似问题在前面(18.29)和(18.47) 已经讨论过了，以下引理清楚地表明，这一问题与用一个近似单位元卷乘一个函数，以此来逼近这个函数的问题，二者之间是密切相关的.

(21.42) **引理** 设f，k都是$\mathfrak{L}_1(R)$中的函数，记$u=\hat{k}$，并假定对于任意$t\in R$，$u(t)=\tilde{u}(-t)$. 则对于任意$x\in R$，

$$\text{(i)}\quad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \hat{f}(y)k(y)\exp(ixy)dy=f*u(x)$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x-s)u(s)ds.$$

证 设$x\in R$，由于函数$(s,t)\to f(s)k(t)$属于$\mathfrak{L}_1(R\times R)$，在下列计算中便可应用Fubini定理：

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \hat{f}(y)k(y)\exp(ixy)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\int_R f(t)\exp(-iyt)dt\,k(y)\exp(ixy)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R f(t)\int_R k(y)\exp(-i(t-x)y)dydt$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R f(t)\hat{k}(t-x)dt$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R f(t)u(x-t)dt$$

$$= u*f(x) = f*u(x). \quad \square$$

(21.43) **点态可和性定理** 设$(k_n)_{n=1}^{\infty}$是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个函数序列，记$u_n=\hat{k}_n$. 假定对于每个$n\in N$，有$u_n\in\mathfrak{L}_1(R)$，$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R u_n(t)dt=1$，以及对于任意$t\in R$，$u_n(-t)=u_n(t)$. 此外，还假定存在一个函数$u$，它具有以下三个性质：

(i) $u\in\mathfrak{L}_1^+(]0,\infty[)$；

(ii) u在$]0,\infty[$上是非增的和绝对连续的；

(iii) 对于任意$t\geqslant 0$及任意$n\in N$，$|u_n(t)|\leqslant nu(nt)$. 则当f是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个函数，而x是f的Lebesgue点时，就有

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \hat{f}(y)k_n(y)\exp(ixy)dy=f(x)$.

特别，当f在x连续时，(iv)成立.

证 设x是f的一个固定的Lebesgue点. 考虑到引理(21.42)，只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}f*u_n(x)=f(x)$就行了. 我们有

$$f*u_n(x)-f(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x-t)u_n(t)dt$$

$$-(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)u_n(t)dt$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}[f(x-t)-f(x)]u_n(t)dt$$

$$+(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{0}[f(x-t)-f(x)]u_n(t)dt$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]u_n(t)dt. \tag{1}$$

如同(18.29)一样，记$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. 既然对于任意$t\geqslant 0$及任意$n\in N$, $|u_n(t)|\leqslant nu(nt)$, 由(1)式便得出

$$|f*u_n(x)-f(x)|\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty|\varphi(t)|\,nu(nt)\,dt. \tag{2}$$

这样，只须证实(2)式右边当$n\to\infty$时有极限零. 为此，设给定$\varepsilon>0$，并记

$$c=6\varepsilon+6u(0)+3\int_0^\infty u(y)\,dy+6\|f\|_1+6|f(x)|+1.$$

当$h>0$时，命

$$\Phi(h)=\int_0^h|\varphi(t)|\,dt.$$

既然x是f的Lebesgue点(18.6)，便存在数$\alpha\in]0,1]$，使

$$\frac{1}{h}\Phi(h)<\frac{\varepsilon}{c},\quad h\in]0,\alpha]. \tag{3}$$

既然u非增，并属于$\mathfrak{L}_1^+([0,\infty[)$，那么由控制收敛性(12.24)就知道存在一个整数n_0，使当$n>n_0$时，便有

$$\int_{n\alpha}^\infty u(y)\,dy<\frac{\varepsilon}{c}, \tag{4}$$

而且

$$nu(n\alpha)=\frac{2}{\alpha}\frac{n\alpha}{2}u(n\alpha)\leqslant\frac{2}{\alpha}\int_{\frac{n\alpha}{2}}^{n\alpha}u(y)\,dy$$

$$\leqslant\frac{2}{\alpha}\int_{\frac{n\alpha}{2}}^\infty u(y)\,dy<\frac{\varepsilon}{c}. \tag{5}$$

现设n是大于$n_1=\max\left\{\frac{1}{\alpha},\ n_0\right\}$的任意整数，则有

$$\int_0^\infty|\varphi(t)|\,nu(nt)\,dt=\int_0^{1/n}|\varphi(t)|\,nu(nt)\,dt$$

$$+\int_{1/n}^{a}|\varphi(t)|\,nu(nt)dt+\int_{a}^{\infty}|\varphi(t)|\,nu(nt)dt$$

$$=I_1+I_2+I_3. \qquad (6)$$

把(3)式应用于I_1，得出

$$I_1\leqslant\int_0^{1/n}|\varphi(t)|\,nu(0)dt=n\Phi\left(\frac{1}{n}\right)u(0)<u(0)\frac{\varepsilon}{c}<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (7)$$

为了研究I_2，我们进行分部积分(18.19)，利用(3)和(5)，并再进行分部积分．则得到下列估计式：

$$I_2=\int_{1/n}^{a}|\varphi(t)|\,nu(nt)dt$$

$$=\Phi(a)nu(na)-\Phi\left(\frac{1}{n}\right)nu(1)$$

$$-\int_{1/n}^{a}\Phi(t)n^2u'(nt)d$$

$$\leqslant\frac{1}{a}\Phi(a)nu(na)+n\Phi\left(\frac{1}{n}\right)u(0)$$

$$-\int_{1/n}^{a}\Phi(t)n^2u'(nt)dt$$

$$<\frac{\varepsilon^2}{c^2}+\frac{\varepsilon}{c}u(0)-\int_{1/n}^{a}t\,\frac{\varepsilon}{c}n^2u'(nt)dt①$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{c^2}+\frac{\varepsilon}{c}u(0)-\frac{\varepsilon}{c}\left[nau(na)-u(1)\right]+\frac{\varepsilon n}{c}\int_{1/n}^{a}u(nt)dt$$

$$<\frac{\varepsilon^2}{c}+\frac{\varepsilon}{c}u(0)+\frac{\varepsilon^2}{c}+\frac{\varepsilon}{c}u(0)+\frac{\varepsilon}{c}\int_1^{na}u(y)dy$$

①请记住$u'(nt)\leqslant 0$

$$<\frac{\varepsilon}{c}\left(2\varepsilon+2u(0)+\int_0^{\infty}u(y)dy\right)<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

以下利用显而易见的估计以及(4)式，可写出

$$I_3=\int_a^{\infty}|\varphi(t)|\,nu(nt)dt$$

$$\leqslant\int_a^{\infty}(|f(x+t)|+|f(x-t)|)nu(nt)dt$$

$$+2|f(x)|\,n\int_a^{\infty}u(nt)dt$$

$$\leqslant nu(na)\cdot 2\|f\|_1+2|f(x)|\int_{na}^{\infty}u(y)dy$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{c}(2\|f\|_1+2|f(x)|)<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

这样一来，结合(2)，(6)，(7)，(8)及(9)，我们便得出结论：当$n>n_1$时，就有

$$|f*u_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

由于凡f的连续点都是f的Lebesgue点，定理的最后一个断言也是成立的. □

(21.44) **注意** 读者想必已注意到(21.43)和(18.29)两个证明之间的类似性〔(18.47)则不同〕. 不难把(18.29)拓广到核$(u_n)_{n=1}^{\infty}$所成的核类——它具有周期2π，并满足对(21.43)中的$(u_n)_{n=1}^{\infty}$所加的那些假设条件. 在(21.43)和(18.29)的论证中，其本质差异仅仅在于前者需用Fubini定理交换积分次序，而后者只含有和数与积分.（当然，等式$\sum\int=\int\sum$是Fubini定理的特例.）

有不少序列$(k_n)_{n=1}^{\infty}$满足(21.43)的条件. 我们下面举出这种序列的三个古典例子. 在各例中读者都应验证(21.43)的假设条件都是成立的.

(21.45) 例 (a) 命$k_n(y)=\exp(-\frac{|y|}{n})$. 对于每个$a>0$, 有

$$\int_R \exp(-a|y|)\exp(-ity)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\exp((a-it)y)dy+\int_{0}^{\infty}\exp((-a-it)y)dy$$

$$=\lim_{A\to\infty}\Big[\frac{1}{a-it}-\frac{1}{a-it}\exp(-(a-it)A)$$

$$+\frac{1}{a+it}-\frac{1}{a+it}\exp(-(a+it)A)\Big]$$

$$=\frac{2a}{a^2+t^2}. \text{①}$$

因此

$$u_n(t)=\hat{k}_n(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n}{1+n^2t^2}.$$

对于(21.43)中的函数u, 显然可取

$$u(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+t^2}.$$

这个序列$(u_n)_{n=1}^{\infty}$称为Abel核.

(b) 命$k_n(y)=(1-\frac{|y|}{n})\xi_{[-n,n]}(y)$. 对于任意$a>0$, 由分部积分法得出

$$\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|y|}{a}\right)\exp(-ity)dy=2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{y}{a}\right)\cos(ty)dy$$

$$=2\int_{0}^{a}\frac{\sin(ty)}{at}dy$$

①这是少数几个可以通过观察计算出来的Fourier变换之一。

$$=\frac{2(1-\cos(\alpha t))}{\alpha t^2}$$

$$=\alpha\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha t)}{\frac{1}{2}\alpha t}\right]^2.$$

因此

$$u_n(t)=\hat{k}_n(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}n\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}nt)}{\frac{1}{2}nt}\right]^2.$$

这时可取$u(t)=\frac{4}{1+t^2}$. 这个序列$(u_n)_{n=1}^{\infty}$称为**Fejér核**. 还可参看下文(21.55).

(c) 命$k_n(y)=\exp(-\frac{y^2}{2n^2})$. 后面(21.60)要证明:

$$u_n(t)=\hat{k}_n(t)=n\exp\left(-\frac{n^2t^2}{2}\right).$$

这里取$u=u_1$. 这个序列叫做**Gauss核**.

(21.46) **注意** (a) 定理(21.43)和诸实例(21.45)说明了,定义$\hat{f}$的积分中要加上因子$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$的道理. 加上这个因子之后,我们用来积分Fourier变换的那个积分,也正是用它来积分原始函数. 这是很方便的,而且有助于后面某些推证(21.53).

(b) (21.45)中所列举的三个核,显然都可以理解为取决于任意正实数α,而不依赖于正整数n. 当$\alpha\to\infty$时,等式(21.43iv)对于这三个核都是成立的.

(21.47) **推论(唯一性定理)** 如果f,g都属于$\mathfrak{L}_1(R)$,并且$\hat{f}=\hat{g}$,则$f=g$ a.e. 于是$f\to\hat{f}$是1-1的.

证 命$h=f-g$. 那么$\hat{h}=0$,从而由(21.43)和(21.45a)推知

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\int_R 0\cdot k_n(y)\exp(ixy)dy=0$$

对于h的所有Lebesgue点都成立,即对于几乎所有$x\in R$都成立(18.5). □

(21.48) **评注** 下一个定理说明，有时用很初等的方法就可以从函数$f\in\mathfrak{L}_1(R)$的Fourier 变换$\hat{f}$重新获得函数f. 关于Fourier变换，与Fourier级数的部分和s_nf相类似的表达式显然是

$$\text{(i)}\qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)\exp(ixy)dy,$$

而且这一表达式当$A\to\infty$时的极限，如果存在，就等于与Fourier级数的和数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\exp(inx)$相类似的量. 众所周知，这两个极限都未必存在，但是，假如$\hat{f}$属于$\mathfrak{L}_1(R)$，当$A\to\infty$时(i)的极限很明显是存在的，值得注意的是这个极限值a.e.等于$f(x)$，我们下面就要证明这一点.

(21.49) **Fourier反演定理** 设f是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个函数. 如果$\hat{f}$也在$\mathfrak{L}_1(R)$中，则对于f的每个Lebesgue点x，都成立

$$\text{(i)}\qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{R}\hat{f}(y)\exp(ixy)dy=f(x).$$

因此f几乎处处等于$\mathfrak{C}_0(R)\cap\mathfrak{L}_1(R)$中一个函数. 如果$f$连续，则(i)式处处成立.

证 假定$\hat{f}\in\mathfrak{L}_1(R)$，并设$x$是$f$的一个Lebesgue点. 按照(21.43)和(21.45.a)，便有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{R}\hat{f}(y)\exp\left(-\frac{|y|}{n}\right)\exp(ixy)dy. \tag{1}$$

此外，对于任意$n\in N$及任意$y\in R$，都成立

$$\left|\hat{f}(y)\exp\left(-\frac{|y|}{n}\right)\exp(ixy)\right|\leqslant|\hat{f}(y)|, \tag{2}$$

而且对于任意$y\in R$，有

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\frac{|y|}{n}\right)=1. \tag{3}$$

由于$|\hat{f}| \in \mathfrak{L}_1(R)$，从(1)，(2)，(3)以及Lebesgue控制收敛定理(12.30)便知道(i)成立.

定理(21.39)表明(i)式左边是$\mathfrak{C}_0(R)$中一个函数，从而可知第二个断言成立. 因为两个a.e.相等的连续函数乃是同一个函数，可见最后一个断言也成立. □

我们现在打算规定$\mathfrak{L}_2(R)$中所有函数的Fourier变换. 先要建立两个引理.

(21.50) **引理** 假定$f \in \mathfrak{L}_1(R) \cap \mathfrak{L}_\infty(R)$，并假定$\hat{f}$是实值的、非负的. 则$\hat{f}$属于$\mathfrak{L}_1(R)$，从而就$f$而言，(21.49)的结论都成立.

证 试考察Abel核

$$u_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{(1+n^2t^2)}.$$

对于任意$x \in R$和任意$n \in N$，有

$$\begin{aligned}|f*u_n(x)| &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_R f(x-t)u_n(t)dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left| \int_R f(x-t)\frac{n}{1+n^2t^2}dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left| \int_R f\left(x-\frac{s}{n}\right)\frac{1}{1+s^2}ds \right| \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_R \frac{ds}{1+s^2} = \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

在(21.42.i)中命$x=0$，并利用(21.45.a)，则对于任意$n \in N$，得出

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R \hat{f}(y)\exp\left(-\frac{|y|}{n}\right)dy = f*u_n(0) \leqslant \|f\|_\infty < \infty. \tag{1}$$

既然$\hat{f}$非负，便可以把B.Levi定理(12.22)应用于(1)式左边，得

到

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \hat{f}(y)dy \leqslant \|f\|_\infty < \infty.$$

因此$\hat{f}$属于$\mathfrak{L}_1(R)$. 由(21.49)知道其余结论正确. □

(21.51) **引理** 设$f\in\mathfrak{L}_1(R)$. 在R上规定$\tilde{f}$为

$$\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}.$$

则对于任意$y\in R$,

$$\hat{\tilde{f}}(y)=\overline{\hat{f}(y)}.$$

证 我们有

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(y)&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \tilde{f}(x)\exp(-iyx)dx\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \overline{f(-x)}\;\overline{\exp(iyx)}dx\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\overline{\int_R f(t)\exp(-iyt)dt}\\&=\overline{\hat{f}(y)}.\end{aligned}$$ □

就$f\in\mathfrak{L}_2(R)$而言定义$\hat{f}$的过程, 其第一步如下:

(21.52) **定理** 设$f\in\mathfrak{L}_1(R)\cap\mathfrak{L}_2(R)$. 则$\hat{f}\in\mathfrak{L}_2(R)$, 并且

(i) $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R |\hat{f}(y)|^2dy=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R |f(x)|^2dx.$ ①

---

①(i)中的$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$固然无关紧要, 但如果在(21.38.i)中不写上因子$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$, 等式就不成立了.

证 $\widetilde{f}$如(21.51)所设，命

$$g=f*\widetilde{f}.$$

由于f，$\widetilde{f}\in\mathfrak{L}_1(R)$，便有$g\in\mathfrak{L}_1(R)$(21.31)；从而(21.41)和(21.51)蕴涵

$$\hat{g}=\hat{f}\,\overline{\hat{f}}=|\hat{f}|^2\geqslant 0.$$

又由于f，$\widetilde{f}\in\mathfrak{L}_2(R)$，(21.33)则表明$g\in\mathfrak{C}_0(R)$。于是$g\in\mathfrak{L}_1(R)\cap\mathfrak{L}_\infty(R)$，从而(21.50)表明

$$|\hat{f}|^2=\hat{g}\in\mathfrak{L}_1(R),$$

而且反演公式(21.49.i)对于g来说处处成立，这是因为g连续的缘故. 因此对于所有$x\in R$，

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x+y)\overline{f(y)}dy=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x-y)\overline{f(-y)}dy$$

$$=f*\widetilde{f}(x)=g(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R\hat{g}(y)\exp(ixy)dy$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R|\hat{f}(y)|^2\exp(ixy)dy. \qquad (1)$$

在(1)式中命$x=0$. 便得到(i). □

(21.53) **Plancherel定理** 存在$\mathfrak{L}_2(R)$到$\mathfrak{L}_2(R)$内的唯一的一个有界线性变换T，满足：对于$\mathfrak{L}_1(R)\cap\mathfrak{L}_2(R)$中的任意$f$，

$$Tf=\hat{f}.^{①}$$

此外：

(i) 对于任意$f\in\mathfrak{L}_2(R)$，$\|Tf\|_2=\|f\|_2$；

(ii) 对于任意$f,g\in\mathfrak{L}_2(R)$，$\langle Tf,Tg\rangle=\langle f,g\rangle$；

---

①函数Tf叫做f的**Fourier变换**.有些作者称它为**Plancherel变换**，不过"Fourier变换"这个术语用得较为普遍. 因此我们保留这一名称.

(iii) T把$\mathfrak{L}_2(R)$映满$\mathfrak{L}_2(R)$.

证 在$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$上规定$T$为

$$Tf=\hat{f}.$$

由于$\mathfrak{C}_{00}\subset\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$，由(13.21)知道$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$在$\mathfrak{L}_2$中稠密. 对于$f\in\mathfrak{L}_2$，设$(f_n)$是$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$中适合$\|f-f_n\|_2\to 0$的任意序列. 那么$(f_n)$乃是$\mathfrak{L}_2$中的Cauchy序列，从而(21.52)蕴涵

$$\|Tf_n-Tf_m\|_2=\|\hat{f}_n-\hat{f}_m\|_2=\|f_n-f_m\|_2\to 0$$
$$(m,\ n\to\infty).$$

这样，(Tf_n)也是$\mathfrak{L}_2$中的Cauchy序列，而鉴于$\mathfrak{L}_2$是完备的(13.11)，便有唯一的一个函数$Tf\in\mathfrak{L}_2$，满足：

$$\|Tf-Tf_n\|_2\to 0\quad(n\to\infty).$$

不难看出Tf与所采用的特定序列(f_n)无关. 这样便定义了$\mathfrak{L}_2$到$\mathfrak{L}_2$内的T. 还不难看出T是线性的. (21.52)又蕴涵

$$\|Tf\|_2=\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_2=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_2=\|f\|_2,$$

其中(f_n)如上所设，因此(i)成立. 既然T是保范的，所以是有界的、1-1的. 由(i)和极化恒等式(16.5)就得出结论(ii)——它说明了由范数确定了内积. 唯一性语句是由下述事实推出的：即如果两个连续的（映入一个Hausdorff空间的）映射在其公共定义域的某个稠密子集上一致，它们就在所说的定义域上处处一致.

尚需证实T把$\mathfrak{L}_2$映满整个$\mathfrak{L}_2$. 既然T保范，而$\mathfrak{L}_2$又是完备的，T的值域便是$\mathfrak{L}_2$中的闭集. 因此只要证T的值域在$\mathfrak{L}_2$中稠密就可以了.

我们来计算算子T的伴随T^*(16.40). 对于$f,\varphi\in\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$，记

$$g(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R\varphi(y)\exp(ixy)dy.\text{①}\qquad(1)$$

于是得到

①这就是说，正如(21.49.i)所定义的，g是φ的反演Fourier变换.

$$\langle f, T^*\varphi\rangle=\langle Tf, \varphi\rangle=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \hat{f}(y)\overline{\varphi(y)}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\int_R f(x)\exp(-iyx)dx\overline{\varphi(y)}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R f(x)\overline{\int_R \varphi(y)\exp(ixy)dy}dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\overline{g(x)}dx=\langle f, g\rangle, \tag{2}$$

这里根据Fubini定理是可以交换次序的〔因为$f,\varphi\in\mathfrak{L}_1(R)$,所以被积函数属于$\mathfrak{L}_1(R^2)$〕. 既然$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$在$\mathfrak{L}_2$中稠密，而且对于任意$h\in\mathfrak{L}_2$，映射$f\to\langle f,h\rangle$在$\mathfrak{L}_2$上连续，那么(1)和(2)蕴涵：对于任意$\varphi\in\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$和任意$x\in R$,

$$[T^*\varphi](x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \varphi(y)\exp(ixy)dy=\hat{\varphi}(-x), \tag{3}$$

设φ,ψ属于$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$，并记

$$f=T^*\varphi,\quad g=T^*\psi.$$

那么(21.41)和(3)式蕴涵：对于任意$x\in R$,

$$\widehat{\varphi*\psi}(x)=\hat{\varphi}(x)\hat{\psi}(x)=f(-x)g(-x). \tag{4}$$

由于f,g属于$\mathfrak{L}_2$，(13.4)则表明fg属于$\mathfrak{L}_1$，$\widehat{\varphi*\psi}$也就属于$\mathfrak{L}_1$. 此外，$\varphi*\psi$还是连续的(21.33). 这样一来，便可应用(21.49)来反演$\widehat{\varphi*\psi}$：对于任意$y\in R$，得到

$$\varphi*\psi(y)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \widehat{\varphi*\psi}(x)\exp(iyx)dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(-x)g(-x)\exp(iyx)dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R (fg)(x)\exp(-iyx)dx$$

$$=\widehat{fg}(y). \tag{5}$$

同时，(4)和(21.39)还表明$fg\in \mathfrak{C}_0$，从而

$$fg\in \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{C}_0\subset \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2.$$

（不难验证上述包含关系，从略）因此由(5)式看出，对于任意φ，$\psi\in \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2$，$\varphi*\psi$属于$T$的值域.

现设(ψ_n)是一个近似单位元(21.36)，并且$(\psi_n)\subset \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2$，又设$\varphi\in \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2$. 前段说明对于任意$n\in N$，$\varphi*\psi_n\in \mathrm{rng}T$. 而(21.37)指出

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi*\psi_n\|_2=0;$$

由此，既然$\mathrm{rng}T$是$\mathfrak{L}_2$中的闭集，便有$\varphi\in \mathrm{rng}T$. 于是$\mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2\subset \mathrm{rng}T$，从而$\mathrm{rng}T$在$\mathfrak{L}_2$中稠密. □

(21.54) **评注** (a) 从(21.53)的证明中看出，如果$\varphi,\psi\in \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{L}_2$，则必存在一个函数$h\in \mathfrak{L}_1\cap \mathfrak{C}_0$，适合$\hat{h}=\varphi*\psi$. 其实，$h=fg$，这里$f=T^*\varphi$，$g=T^*\psi$.

(b) 就讨论问题的方式而言，定理(21.53)类似于Riesz-Fischer定理(16.39). 当然，证明这一定理要比证明(16.39)难得多了. 这是由这样一个事实造成的，即$\mathfrak{L}_1([-\pi,\pi])\supset \mathfrak{L}_2([-\pi,\pi])$，而$\mathfrak{L}_2(R)$却既不含有$\mathfrak{L}_1(R)$，也不含在$\mathfrak{L}_1(R)$中.

(21.55) **例** Plancherel定理可以用来求某些积分值，我们以积分Fejér核(21.45.b)为例来说明这一方法. 对于$\alpha>0$，显而易见

$$\|\xi_{[-\alpha,\alpha]}\|_2^2=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R\xi_{[-\alpha,\alpha]}(x)dx=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha.$$

根据(21.52.i)，又有

$$\|\hat{\xi}_{[-\alpha,\alpha]}\|_2^2=\|T\xi_{[-\alpha,\alpha]}\|_2^2=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha. \quad (1)$$

很明显

$$\hat{\xi}_{[-\alpha,\alpha]}(y)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\exp(-iyx)dx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\exp(-iy\alpha)-\exp(iy\alpha)}{-iy}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\alpha y)}{y}. \tag{2}$$

结合(1)和(2)，对于任意正实数α便得到

$$\int_R\left[\frac{\sin(\alpha y)}{y}\right]^2 dy=\pi\alpha. \tag{3}$$

就Fejér核来说，则对于任意n，都有

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R(2\pi)^{-\frac{1}{2}}n\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}nt)}{\frac{1}{2}nt}\right]^2 dt=1. \tag{4}$$

介绍Fubini定理的下一个应用之前，我们先布置若干习题，说明并推广卷积和Fourier变换这两个概念.

(21.56) **习题**（W.H.Young） 设p,q和r都是实数，并且$1>p$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=\frac{1}{r}>0$. 假定$f\in\mathfrak{L}_p(R)$，$g\in\mathfrak{L}_q(R)$. 试证：卷积$f*g$属于$\mathfrak{L}_r(R)$，而且

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q.$$

〔提示 设a,b和c都是实数，并且$a=r$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. 注意到$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，并对于乘积

$$\left(|f(x-y)|^{\frac{p}{a}}|g(y)|^{\frac{q}{a}}\right)\left(|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})}\right)\left(|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{a})}\right)$$

运用广义Hölder不等式(13.26).〕

(21.57) **习题** (a) 对于$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，$a\in R$，命

$$f_a(x)=f(x+a).$$

试证：对于任意$y\in R$，

$$\widehat{(f_a)}(y)=\hat{f}(y)\exp(iay).$$

(b) 试证：如果$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，$a\in R$，$g(x)=\exp(-iax)$，那么对于任意$y\in R$，

$$\widehat{fg}(y)=(\hat{f})_a(y).$$

(c) 设$f,g\in \mathfrak{L}_1(R)$，试证：

$$\int_R f(x)\hat{g}(x)\,dx=\int_R \hat{f}(x)g(x)dx.$$

(d) 设f属于$\mathfrak{L}_1(R)$. 试求要使$\hat{f}$成为实值的，f应满足的充要条件. 再求要使$\hat{f}$成为偶函数，f应满足的充要条件.

(21.58) **习题** (a) 试求两个函数$f,g\in \mathfrak{L}_1(R)$，它们都处处不等于零，但$f*g=0$. 〔提示. 利用(21.57.b)，(21.45.b)，(21.47)及(21.41). 〕

(b) 假定$f\in \mathfrak{L}_1(R)$，$f*f=f$ a.e.试证$f=0$ a.e.

(c) 假定$f\in \mathfrak{L}_1(R)$，$f*f=0$ a.e.试证$f=0$ a.e.

(21.59) **习题** (a) 设$f\in \mathfrak{L}_1(R)$，并对于任意$x\in R$，记

$$g(x)=-ixf(x),$$

又假定$g\in \mathfrak{L}_1(R)$. 试证$\hat{f}$在R的每一点都具有有限导数，而且$\hat{f}'=\hat{g}$. 〔提示. 证明$\left|\frac{\exp(ixh)-1}{h}\right|\leqslant|x|$，并利用(12.30).〕

(b) 假定$f\in \mathfrak{L}_1(R)$，f在R上绝对连续，$f'\in \mathfrak{L}_1(R)$. 试证对于任意$y\in R$，

$$\hat{f'}(y)=iy\hat{f}(y).$$

〔提示. 记

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx,$$

并应用(12.30)来证明

$$\lim_{b\to\infty}f(b)=\lim_{a\to-\infty}f(a)=0.$$

然后记

$$\hat{f'}(y)=\lim_{b\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-b}^{b}f'(x)\exp(-iyx)dx,$$

并进行分部积分. 〕

(21.60) **习题** 在R上规定f为$f(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})$. 试利用(21.59.a)证明$\hat{f}=f$. 〔提示. 记$\hat{f}=\varphi$. 根据(21.59.a)便有

$$\varphi'(y)=i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R(-x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\exp(-iyx)dx.$$

进行分部积分，则对于任意$y\in R$可得出$\varphi'(y)=-y\varphi(y)$. 对于任意$y\in R$，推证$\frac{d}{dy}[\varphi(y)\exp(\frac{y^2}{2})]=0$. 注意到

$$2\pi\varphi(0)^2=\left(\int_R\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)\left(\int_R\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right)$$

$$=\int_{R\times R}\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)d(x,y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)rdrd\theta=2\pi,$$

由此可知$\varphi(0)=1$. 〕

(21.61) **习题** (a) 设$\varphi\in\mathfrak{L}_1(R)$. 假定$\varphi$在$R$上是二次可微的. φ'和φ''都属于$\mathfrak{L}_1(R)$，φ和φ'在R上都绝对连续. 试证：存在一个函数$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，使得$\hat{f}=\varphi$. 〔利用(21.59.b)，证明对于任意$y\in R$，$\widehat{\varphi''}(y)=-y^2\hat{\varphi}(y)$. 由此得出$\hat{\varphi}\in\mathfrak{L}_1(R)$，然后利用反演定理(21.49). 〕

(b) 试证：当φ,φ'及φ''都属于$\mathfrak{L}_1(R)\cap\mathfrak{C}_0(R)$时，$\varphi$一定满足(a)的题设.

(21.62) **习题** (a) 设F是R的一个紧子集，U是R的一个开子集，并且$F\subset U$. 试证：存在一个函数$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，使对于任意$y\in F$，有$\hat{f}(y)=1$，而对于任意$y\in R\cap U'$，则有$\hat{f}(y)=0$. 〔利用(21.61)或(21.54.a). 〕

(b) 命

$$\mathfrak{A}(R)=\{\hat{f}:f\in\mathfrak{L}_1(R)\}.$$

试证$\mathfrak{A}(R)$在$\mathfrak{C}_0(R)$中关于由一致范数导出的拓扑是稠密的. 〔利

用(a)小题以及Stone-Weierstrass定理. 〕

(21.63) **习题** (a)设$a\geqslant 0$，试证：

$$\int_R\left[\frac{\sin(ay)}{y}\right]^4 dy=\frac{2a^3\pi}{3}.$$

〔命 $f(x)=(1-\frac{|x|}{a})\xi_{[-a,a]}$，计算$\hat{f}$，并应用Plancherel定理. 参看(21.55). 〕

(b) 试计算

$$\int_R\left[\frac{\sin(ay)}{y}\right]^3 dy.$$

〔利用(21.53.ii)，(a)及(21.55).〕

(c) 当$a\in R$，$n\in\{5,6,7,\cdots\}$时，试求以下积分值：

$$\int_R\left[\frac{\sin(ay)}{y}\right]^n dy.$$

(21.64) **习题** 本习题需要一些有关解析函数的基本知识.①

(a) 设f,g是$\mathfrak{L}_1(R)$中的两个函数，并且对于任意$x<0$，$f(x)=g(x)=0$. 假定$f*g=0$ a.e. 试证$f=0$ a.e. 或$g=0$ a.e. 〔提示. 考虑一个复数$z=s+it$，其中$t\leqslant 0$. Fourier变换$\hat{f}$可以推广到

$$\hat{f}(z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \exp(-izx)f(x)dx.$$

证明$\hat{f}$是$\{z:\mathrm{Im}z<0\}$中的解析函数，又是$\{z:\mathrm{Im}z\leqslant 0\}$中的连续函数. 证明

$$\widehat{f*g}(z)=\hat{f}(z)\hat{g}(z)\quad(\mathrm{Im}z\leqslant 0).$$

这样，解析函数$\hat{f}\hat{g}$在$\{z:\mathrm{Im}z<0\}$中便恒等于零，由此可推知在

①本教材别处并不需要预先具有解析函数知识，尽管大多数读者想必已具备这方面的基础. 本书其它地方反正都不用(21.64).

$\{z: \mathrm{Im} z<0\}$中，$\hat{f}=0$ 或 $\hat{g}=0$．假如 $\hat{f}=0$，那么对于任意$s\in R$，也有$\hat{f}(s)=0$．于是唯一性定理(21.47)表明$f=0$a.e.〕

(b) 试证Hermite函数(16.25)是$\mathfrak{L}_2(R)$中的完全正规正交集．〔提示．设f是$\mathfrak{L}_2(R)$的任意一个元素．对于一切$z\in K$，命

$$F(z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \exp\left(-izx-\frac{x^2}{2}\right)\overline{f(x)}dx.$$

证明对于一切$z\in K$，$F(z)$都有定义，而且F在整个z平面上解析．再证明F的n阶导数$F^{(n)}$由下式给出

$$F^{(n)}(z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(-i)^n\int_R x^n\exp\left(-izx-\frac{x^2}{2}\right)\overline{f(x)}dx.$$

如果f与所有Hermite函数正交，则对于任意$n\in\{0,1,2,\cdots\}$都有

$$F^{(n)}(0)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(-i)^n\int_R x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\overline{f(x)}dx=0,$$

从而F本身必恒等于零．对于实数z，则得到

$$\begin{aligned}0&=F(s+i0)\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \exp(-isx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\overline{f(x)}dx,\end{aligned}$$

由此根据(21.47)，$\exp-\left(\frac{x^2}{2}\right)f(x)=0$ a.e.因而$f=0$ a.e.〕

(21.65) 习题 关于$\mathfrak{L}_1(R)$的结构的进一步讨论．在本习题中，我们指出Banach代数$\mathfrak{L}_1(R)$的某些代数性质，它们类似于(20.52)中就$\mathfrak{C}_0(X)$所得到的那些性质．

(a) 设$\mathfrak{J}$是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个闭理想〔定义见(20.52)〕．试证：$f\in\mathfrak{J}$及$a\in R$蕴涵$f_a\in\mathfrak{J}$．〔提示．就$g,h\in\mathfrak{L}_1(R)$，$a\in R$，验证

$$(g_a)*h=g*(h_a)=(g*h)_a.$$

于是，当$(u^{(n)})$是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个近似单位元(21.36)时，关系式

$$u^{(n)}*(f_a)\to f_a,\quad (u_a^{(n)})*f\in\mathfrak{J}$$

便证实了$f_a\in\mathfrak{J}$.〕

(b) 设M是$\mathfrak{L}_1(R)$上一个积性线性泛函，就是说，M是$\mathfrak{L}_1(R)$上一个非零线性泛函，并且对于任意$f,g\in\mathfrak{L}_1(R)$，都成立

$$M(f*g)=M(f)M(g).$$

试证：对于任意$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，

$$|M(f)|\leqslant\|f\|_1.$$

〔重复(20.52)中就$\mathfrak{C}_0(R)$所概述的证明.〕

(c) M如(b)小题所设. 试证$\{f\in\mathfrak{L}_1(R):M(f)=0\}=\mathfrak{Z}_M$是$\mathfrak{L}_1(R)$中一个闭极大理想.

(d) M如(b)小题所设，又设x是任意一个实数，f属于$\mathfrak{L}_1(R)\cap\mathfrak{Z}_M'$. 试证：

(i) 数$\chi(x)=M(f_x)/M(f)$与f无关；

(ii) 函数$x\to\chi(x)$是R上的连续函数，并且对于任意$x,y\in R$，$\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y)$；

(iii) $|\chi|=1$.

〔提示. 当$f,g\in\mathfrak{L}_1(R)$，$x\in R$时，则有$(f_x)*g=f*(g_x)$，$M(f_x)M(g)=M(f)M(g_x)$. 由此

$$\frac{M(f_x)}{M(f)}=\frac{M(g_x)}{M(g)}.$$

然后考虑$x,y\in R$. 正如(c)和(a)两小题所指出的，如果$M(f)\neq0$，那么$M(f_x)\neq0$. 所以：

$$\chi(x+y)=\frac{M(f_{x+y})}{M(f)}=\frac{M(f_{x+y})}{M(f_x)}\quad\frac{M(f_x)}{M(f)}=\chi(y)\chi(x).$$

取$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，使得$M(f)=1$. 那么

$$|\chi(x+y)-\chi(x)|=|M(f_{x+y})-M(f_x)|\leqslant\|f_{x+y}-f_x\|_1$$
$$=\|f_y-f\|_1,$$

根据(13.24)便得到

$$\lim_{y\to 0}|\chi(x+y)-\chi(x)|=0.$$

因此χ是连续的. 此外还有

$$|\chi(x)|=|M(f_x)|\leqslant \|f_x\|_1=\|f\|_1,$$

所以χ又是有界的. 这就蕴涵 $|\chi|=1$. 〕

(e) M,χ如(b)和(d)两小题所设. 则对于任意$f\in \mathfrak{L}_1(R)$,都有

$$M(f)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \overline{\chi(x)}f(x)dx.$$

〔提示 根据(20.19), 存在$h\in \mathfrak{L}_\infty(R)$, 使对于所有$f\in \mathfrak{L}_1(R)$,

$$M(f)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R fhd\lambda.$$

取$g\in \mathfrak{L}_1(R)$, 使得$M(g)=1$. 则对于所有$y\in R$,

$$\overline{\chi(y)}=M(g_{-y})=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R g(x-y)h(x)dx.$$

对于任何$f\in \mathfrak{L}_1(R)$, 则有

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(y)\overline{\chi(y)}dy\\
&=(2\pi)^{-1}\int_R\int_R g(x-y)h(x)dxf(y)dy\\
&=(2\pi)^{-1}\int_R\int_R g(x-y)f(y)dyh(x)dx\\
&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R g*f(x)h(x)dx\\
&=M(g*f)\\
&=M(f).\ 〕
\end{aligned}$$

(f) 凡Banach代数$\mathfrak{L}_1(R)$上的积性线性泛函M, 对于某个固定的$y\in R$而言, 都具有如下形状

$$M(f)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R f(x)\exp(-iyx)dx.$$

这就是说，f 的Fourier变换 $\hat{f}$ 表述了所有积性线性泛函在 f 的值.〔利用(e)小题及(18.46.a).〕

(21.66) **注意** 在(20.52.f)中识别了 $\mathfrak{C}_0(X)$ 中的闭理想. 就 $\mathfrak{L}_1(R)$ 而言，闭理想就要复杂得多了. 迄今为止还不知道怎样来完善地表述它们. 这种理想所成的某个类显然是下述形式. 对于一个闭集 $F\subset R$，命

$$\mathfrak{J}_F=\{f\in\mathfrak{L}_1(R): 对于任意 y\in F,\ \hat{f}(y)=0\}.$$

大家知道，在 $\mathfrak{L}_1(R)$ 中确乎有一些闭理想并不具有这种形式，但目前几乎没有什么进一步的了解. 关于这方面的详细论述，请参看W.Rudin①.

我们现在转向Fubini定理的一个截然不同的应用——得出很一般情况下的分部积分公式.

(21.67) **定理(关于Lebesgue-Stieltjes积分的分部积分法)** 设 α 和 β 是 R 上任意两个实值非减函数，λ_α 和 λ_β 为其相应的Lebesgue-Stieltjes测度(9.19). 则当 $a,b\in R$，$a<b$ 时，就有

(i) $\lambda_\alpha([a,\ b[)=\alpha(b-)-\alpha(a-)$;

(ii) $\lambda_\alpha(\{b\})=\alpha(b+)-\alpha(b-)$;

(iii) $\lambda_\alpha([a,\ b])=\alpha(b+)-\alpha(a-)$;

(iv) $$\int_{[a,b]}\beta(x+)d\lambda_\alpha(x)+\int_{[a,b]}\alpha(x-)d\lambda_\beta(x)=\alpha(b+)\beta(b+)-\alpha(a-)\beta(a-);$$

(v) $$\int_{[a,b]}\frac{\beta(x+)+\beta(x-)}{2}d\lambda_\alpha(x)+\int_{[a,b]}\frac{\alpha(x+)+\alpha(x-)}{2}d\lambda_\beta(x)=\alpha(b+)\beta(b+)-\alpha(a-)\beta(a-).$$

---

①W.Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, New York, 1962, 第七章.

证 对于$x\in R$，规定

$$\alpha_0(x)=\alpha(x-)-\alpha(0-).$$

那么α_0是R上适合$\alpha_0(0)=0$的一个左连续非减函数；这就是说，α_0在(19.46)意义下是正规化的．很明显

$$\alpha_0=\alpha-\alpha(0-),$$

或许在α的（可数个）不连续点出现仅有的例外．这样，(8.17)蕴涵着在$\mathfrak{C}_{00}(R)$上两个Riemann-Stieltjes积分S_α与S_{α_0}是一致的；因此(9.19)表明

$$\lambda_\alpha=\lambda_{\alpha_0}.$$

由(19.47)可知

$$\lambda_\alpha([a,\ b[)=\lambda_{\alpha_0}([a,b[)=\alpha_0(b)①-\alpha_0(a)=\alpha(b-)-\alpha(a-);$$

所以(i)成立．根据(19.52)得到

$$\lambda_\alpha(\{(b)\}=\lambda_{\alpha_0}(\{b\})=\lim_{h\downarrow 0}\alpha_0(b+h)-\alpha_0(b)$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\alpha((b+h)-)-\alpha(b-)=\alpha(b+)-\alpha(b-);$$

所以(ii)成立．等式(i)和(ii)相加便得出(iii)．

为了证明(iv)，命

$$E=\{(x,\ y)\in[a,\ b]\times[a,\ b]:y\leqslant x\}.$$

由于E是紧的，便有$E\in\mathscr{B}(R^2)=\mathscr{B}(R)\times\mathscr{B}(R)$．应用(21.8.iii)得到

$$\int_{[a,b]}\lambda_\beta(E_x)d\lambda_\alpha(x)=\int_{[a,b]}\lambda_\alpha(E^y)d\lambda_\beta(y).\qquad(1)$$

由于对于任意$x,y\in[a,b]$，$E_x=[a,x]$，$E^y=[y,b]$，那么把等式(iii)应用于(1)式〔显然，等式(iii)不仅对于α，而且对于β也是成立的〕，便推出

$$\int_{[a,b]}\beta(x+)d\lambda_\alpha(x)-\beta(a-)(\alpha(b+)-\alpha(a-))$$

---

①原书误为$\alpha_0(b)$，—— 译者注

$$= \int_{[a,b]} [\beta(x+) - \beta(a-)] d\lambda_\alpha(x)$$

$$= \int_{[a,b]} [\alpha(b+) - \alpha(y-)] d\lambda_\beta(y)$$

$$= \alpha(b+)[\beta(b+) - \beta(a-)] - \int_{[a,b]} \alpha(y-) d\lambda_\beta(y). \tag{2}$$

现在(2)式中把y换成x，移项便得到(iv). 为了得出(v)，只要在(iv)中互换α和β，把这一新等式加到(iv)上，然后除以2就行了. □

(21.68) 评注 比(21.67)更为一般的定理可以按以下方式用公式表达：即允许α,β是R的每个有界区间上的任意两个有限变差函数，并考虑相应的广义或复Lebesgue-Stieltjes测度. 所要研究的只是通过引用Jordan分解定理(17.16)，把这一更为一般的情况化为(21.67)的情况. 我们把这件事留给读者去做. 假如α,β都是绝对连续函数，即$\lambda_\alpha \ll \lambda$，$\lambda_\beta \ll \lambda$，(21.67)就变成了(18.19).

(21.69) 定理（积分第一中值定理） 设μ是$[a,b]$上任意一个有限（非负、可数加性）Borel测度，$f \in \mathfrak{C}^r([a,b])$. 则存在一个实数$\xi$，适合$a<\xi<b$，而且

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = f(\xi)\mu([a,b]).$$

证 由$f([a,b])$是闭区间（也可能是单一的点）这一事实以及显而易见的不等式

$$\min\{f(x): x \in [a,b]\} \leqslant \frac{1}{\mu([a,b])} \int_{[a,b]} f(x) d\mu(x)$$

$$\leqslant \max\{f(x): x \in [a,b]\},$$

便直接得出本定理. □

(21.70) 定理（积分第二中值定理） 设α,β是$[a,b]$上两个实值非减函数. 假定β是连续的，并设λ_β是相应于β的Lebesgue-

Stieltjes测度(9.19). 则存在$\xi\in]a,b[$, 使得

(i) $$\int_{[a,b]}\alpha(x)d\lambda_\beta(x)=\alpha(a)[\beta(\xi)-\beta(a)]$$

$$+\alpha(b)[\beta(b)-\beta(\xi)].$$

证 当$x<a$时, 命

$$\alpha(x)=\alpha(a),\ \beta(x)=\beta(a),$$

而当$x>b$时, 则命

$$\alpha(x)=\alpha(b),\ \beta(x)=\beta(b).$$

设$\lambda_\alpha,\lambda_\beta$是相应于$\alpha,\beta$的Lebesgue-Stieltjes测度. 那么

$$\alpha(a-)=\alpha(a),\ \alpha(b+)=\alpha(b),$$

而对于所有$x\in R$,

$$\beta(x+)=\beta(x-)=\beta(x),$$

从而(21.67.v)变成

$$\int_{[a,b]}\beta(x)d\lambda_\alpha(x)+\int_{[a,b]}\frac{\alpha(x+)+\alpha(x-)}{2}d\lambda_\beta(x)$$

$$=\alpha(b)\beta(b)-\alpha(a)\beta(a).\qquad (1)$$

根据(21.69), 必存在$\xi\in]a,b[$, 使得

$$\int_{[a,b]}\beta(x)d\lambda_\alpha(x)=\beta(\xi)\lambda_\alpha([a,\ b])=\beta(\xi)[\alpha(b)-\alpha(a)].\qquad (2)$$

既然β是连续的, 则对于任意x, 便有$\lambda_\beta(\{x\})=0$(19.52). 由此

$$\int_{[a,b]}\frac{\alpha(x+)+\alpha(x-)}{2}d\lambda_\beta(x)=\int_{[a,b]}\alpha(x)d\lambda_\beta(x),\qquad (3)$$

这是因为两个被积函数仅在一个可数集上不同的缘故.

把(2)和(3)应用于(1), 则得到

$$\beta(\xi)[\alpha(b)-\alpha(a)]+\int_{[a,b]}\alpha(x)d\lambda_\beta(x)$$

$$=\alpha(b)\beta(b)-\alpha(a)\beta(a)\qquad (4)$$

显然由(4)式便立即推出(i)式. □

Fubini定理的下一个应用，其本身就是很有意义的，另外，我们打算介绍的另一个应用〔见后面(21.76)和(21.80)两个定理〕也需要它.

(21.71) **定理** 设$(X, \mathscr{M}, \mu)$是一个σ有限测度空间，f是X上一个非负、实值、$\mathscr{M}$可测函数，E是$\mathscr{M}$中任意一个集. 又设φ是一个实值非减函数，它有定义域$[0,\infty[$，并且在任意区间$[0,a]$ $(a>0)$上都是绝对连续的. 还假定$\varphi(0)=0$. 当$t\geqslant 0$时，命

$$G_t=\{x\in X: f(x)>t\}.$$

则

$$\text{(i)} \quad \int_E \varphi\circ f(x)d\mu(x)=\int_0^\infty \mu(E\cap G_t)\varphi'(t)du.$$

证 利用(18.16)可以看出

$$\int_E \varphi\circ f(x)d\mu(x)=\int_X \xi_E(x)(\varphi\circ f)(x)d\mu(x)$$

$$=\int_X \xi_E(x)\int_0^{f(x)}\varphi'(t)dtd\mu(x)$$

$$=\int_X \xi_E(x)\int_0^\infty \xi_{[0,f(x)[}(t)\varphi'(t)dtd\mu(x). \tag{1}$$

$X\times[0,\infty[$上的函数$(x,t)\to\xi_{[0,f(x)[}(t)$乃是集$\{(x,t): f(x)>t\}$的特征函数. 这个集正是如(21.23)所定义的$V_* f$.所以它是$\mathscr{M}\times\mathscr{M}_\lambda$可测的，从而$X\times[0,\infty[$上的函数

$$(x, t)\to\xi_E(x)\xi_{[0,f(x)[}(t)\varphi'(t)$$

便是非负的、$\mathscr{M}\times\mathscr{M}_\lambda$可测的，因此可以把(21.12)应用于(1)式最后一个积分. 由此得到

$$\int_X \xi_E(x)\int_0^\infty \xi_{[0,f(x)[}(t)\varphi'(t)dtd\mu(x)$$

$$= \int_X \int_0^\infty \xi_E(x)\xi_{[0,f(x)[}(t)\varphi'(t)dtd\mu(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_X \xi_E(x)\xi_{[0,f(x)[}(t)d\mu(x)\varphi'(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \int_X \xi_E(x)\xi_{G_t}(x)d\mu(x)\varphi'(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \mu(E\cap G_t)\varphi'(t)dt. \quad \square,$$

(21.72) **推论** $(X, \mathscr{M}, \mu)$，E，f和G_t如(21.71)所设，又设$p>0$. 则有

(i) $\int_E f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(E\cap G_t)dt.$

证 在(21.71.i)中命$\varphi(t)=t^p$. $\square$

(21.73) **注意** 当$p=1$时，等式(21.72.i)可用作$\int_E fd\mu$的定义，只要$[0,\infty[$上的Lebesgue积分为已知就行. J.Radon[①]就曾经采用过这一方法来定义Lebesgue-Stieltjes积分[②]. 还应当指出，当函数f在某个σ有限、$\mathscr{M}$可测集的外部等于零时，这时即使X不是σ有限的，(21.72.i)对于$f\in\mathfrak{L}_p(X, \mathscr{M}, \mu)$仍然是成立的.

我们所要介绍的Fubini定理的最后一个应用，是用其证明一个著名定理，这一定理归功于英国数学家G.H.Hardy(1877-1947)和J.E.Littlewood(1885—).

(21.74) **记号和定义** 在(21.74)—(21.83)中，我们要一直采用以下记号和定义. 首先，f是R上一个非负、广义实值、Lebesgue可测函数，并且对于所有紧集F，都有$\int_F fd\lambda<\infty$. 按以下规则定义函数$f^{\Delta(r)}$，$f^{\Delta(l)}$及f^{Δ}：

---

①J.Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitzungsberichte Akad. Wissenschaften Wien 122, 1295-1438(1913).

②也称为Lebesgue-Radon积分.——译者注

$$f^{\Delta, r}(x)=\sup\left\{\frac{1}{u-x}\int_x^u f d\lambda : u\in\left]x,\infty\right[\right\};$$

$$f^{\Delta, l}(x)=\sup\left\{\frac{1}{x-u}\int_u^x f d\lambda : u\in\left]-\infty, x\right[\right\};$$

$$f^{\Delta}(x)=\max\{f^{\Delta, r}(x), f^{\Delta, l}(x)\}.$$

对于每个$t>0$，命

$$G_t=\{x: f(x)>t\};$$

$$M_t^{(j)}=\{x: f^{\Delta, j}(x)>t\} \quad (j=l, r);$$

$$M_t=\{x: f^{\Delta}(x)>t\}.$$

(21.75) **引理** 对于任意$t>0$，成立等式

(i) $\lambda(M_t^{(j)})=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{M_t^{(j)}} f d\lambda \quad (j=r, l)$

和不等式

(ii) $\lambda(M_t)\leqslant\dfrac{2}{t}\displaystyle\int_{M_t} f d\lambda.$

证 我们只就$j=r$的情况证明(i)，至于$j=l$的情况几乎完全一样. 不难看出，$M_t^{(r)}$是开集，这是因为在$\left]x,\infty\right[$内函数

$$s\to\frac{1}{s-x}\int_x^s f d\lambda$$

是连续的. 设$\{\left]\beta_k,\gamma_k\right[\}_{k=1}^{\infty}$是适合条件

$$M_t^{(r)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left]\beta_k, \gamma_k\right[$$

的两两不相交区间所成的唯一的区间族(6.59). 考虑一个区间$\left]\beta_k,\gamma_k\right[$(它当然可以是无界的). 对于每个$x\in\left]\beta_k,\gamma_k\right[$，开集

$$N_x=\left\{s: \int_x^s f d\lambda>t(s-x), \ s\in\left]x, \gamma_k\right]\cap R\right\}$$

非空. 当$\gamma_k=\infty$时，这是显然的. 当$\gamma_k<\infty$时，倘若对于某个

$x \in]\beta_k, \gamma_k[$，N_x是空集，那么必定有$w < \gamma_k$，使

$$\int_x^w f d\lambda > t(w-x).$$

于是得到

$$\int_{\gamma_k}^w f d\lambda = \int_x^w f d\lambda - \int_x^{\gamma_k} f d\lambda > t(w-x) - t(\gamma_k - x)$$

$$= t(w-\gamma_k).$$

这一不等式蕴涵$\gamma_k \in M_t''$，引出矛盾．命$s_x = \sup N_x$．我们要证$s_x = \gamma_k$．倘若$s_x < \gamma_k$，便成立等式

$$\int_x^{s_x} f d\lambda = t(s_x - x);$$

通过简单的连续性论证就可证实这一点．因为集N_{s_x}非空，所以存在一个实数$y \in]s_x, \gamma_k]$，使得

$$\int_{s_x}^y f d\lambda > t(y - s_x).$$

由此可见

$$\int_x^y f d\lambda > t(y-x),$$

既然$y > s_x$，这就出现矛盾．所以对于一切$x \in]\beta_k, \gamma_k[$，都有$s_x = \gamma_k$，从而不等式

$$\int_x^{\gamma_k} f d\lambda \geqslant t(\gamma_k - x)$$

成立．命$x \to \beta_k$，则得到

$$\int_{\beta_k}^{\gamma_k} f d\lambda \geqslant t(\gamma_k - \beta_k).$$

如果$\beta_k = -\infty$或者$\gamma_k = \infty$，便推出等式(i)．如果$]\beta_k, \gamma_k[$有界，便有

$$\int_{\beta_k}^{\gamma_k} f d\lambda \leqslant t(\gamma_k - \beta_k),$$

这是因为β_k并不属于$M_t^{(r)}$. 因此在所有情况下都有

$$\int_{\beta_k}^{\gamma_k} f d\lambda = t(\gamma_k - \beta_k).$$

等式(i)得证.

为了证明(ii), 我们注意到$M_t = M_t^{(r)} \cup M_t^{(l)}$. 由此得到

$$\begin{aligned} \lambda(M_t) &\leqslant \lambda(M_t^{(r)}) + \lambda(M_t^{(l)}) \\ &= \frac{1}{t}\left[\int_{M_t^{(r)}} f d\lambda + \int_{M_t^{(l)}} f d\lambda\right] \\ &\leqslant \frac{2}{t}\int_{M_t} f d\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

(21.76) 关于$\mathfrak{L}_p(p>1)$的Hardy-Littlewood极大定理 设p是一个实数, $p>1$. 记号如(21.74)所设. 则

(i) $\left[\int_R (f^{\Delta(j)})^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1}\left[\int_R f^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} (j=r, l)$,

(ii) $\left[\int_R (f^{\Delta})^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{2p}{p-1}\left[\int_R f^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}}$.

证 (依次)利用(21.72), (21.75.i), Fubini定理(21.12)以及Hölder不等式(13.4), 计算如下:

$$\begin{aligned} \int_R (f^{\Delta(j)}(x))^p dx &= \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda(M_t^{(j)}) dt \\ &= p\int_0^\infty t^{p-2}\int_{M_t^{(j)}} f(x) dx dt \\ &= p\int_R \int_0^\infty \xi_{M_t^{(j)}}(x) f(x) t^{p-2} dt dx \end{aligned}$$

$$= p\int_R \int_0^\infty \xi_{]0,f^{\Delta(j)}(x)[}(t)t^{p-2}f(x)\,dt\,dx$$

$$= p\int_R f(x)\frac{[f^{\Delta(j)}(x)]^{p-1}}{p-1}dx$$

$$\leqslant \frac{p}{p-1}\left[\int_R f(x)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

$$\left[\int_R (f^{\Delta(j)}(x))^{p(p-1)}dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

$$= \frac{p}{p-1}\left[\int_R f(x)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_R (f^{\Delta(j)}(x))^p dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

由于$1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$，那么当$f^{\Delta(j)}\in\mathfrak{L}_p$时，可推出不等式(i). 为了验明这一点，利用(21.79.i)〔它仅依赖于(21.75)〕可写出

$$\int_R (f^{\Delta(j)}(x))^p dx \leqslant \frac{p}{1-k}\int_0^\infty t^{p-2}\int_{G_{kt}} f(x)\,dx\,dt.$$

然后作如上论证，便得到

$$\int_R (f^{\Delta(j)}(x))^p dx \leqslant \frac{pk^{1-p}}{(p-1)(1-k)}\int_R (f(x))^p dx.$$

可以利用Fubini定理的原因是，集$]a,\infty]$在映射$(x,t)\to\xi_{M_t(j)}(x)$下的逆象，当$a\geqslant 1$时为$\varnothing$，当$a<0$时为$R\times[0,\infty[$，而当$0\leqslant a<1$时则为$\{(x,t):f^{\Delta(j)}(x)>t\}$. 上述每个集都是乘积可测的.

以(21.75.ii)为基础，经过同样计算可证明(ii). □

叙述以上定理时，通常以区间代替R，而$f^{\Delta(r)}$，$f^{\Delta(l)}$和f^{Δ}则为较小的函数. 下述推论就包括了这种情况.

(21.77) **推论** f如(21.74)所设，此外还假定E是一个Lebesgue可测集，并且$f(E')=\{0\}$. 设$p>1$，则成立

(i) $\int_E (f^{\Delta(j)}(x))^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_E f(x)^p dx \quad (j=r,\ l)$;

(ii) $\int_E f^{\Delta}(x)^p dx \leqslant \left(\frac{2p}{p-1}\right)^p \int_E f(x)^p dx.$

证 既然对于非负的g，总成立$\int_E g d\lambda \leqslant \int_R g d\lambda$. 本结果便是(21.76)的直接推论. □

(21.78) **评注** 假如(21.77)的集E含在某个区间$[\alpha,\ \beta]$中，则当$\alpha < x \leqslant \beta$时，显然有

$$f^{\Delta(r)}(x) = \sup\left\{\frac{1}{t-x}\int_x^t f d\lambda : x < t \leqslant \beta\right\}.$$

这是区间情况下$f^{\Delta(r)}$的通常定义；$f^{\Delta(l)}$和f^{Δ}完全类似.

关于$\mathfrak{L}_1$中的函数，Hardy-Littlewood极大定理还有一种变型. 正如常见的情况那样（有点难以理解），$\mathfrak{L}_p^+$（$p>1$）情形下正确，但$\mathfrak{L}_1$情形下却不对. 我们需要以下引理.

(21.79) **引理** 记号如(21.74)所设. 对于任意$k \in]0,\ 1[$和任意$t>0$，有

(i) $\lambda(M_t^{(j)}) \leqslant \frac{1}{(1-k)t}\int_{G_{kt}} f d\lambda \quad (j=r,\ l)$,

(ii) $\lambda(M_t) \leqslant \frac{2}{(1-k)t}\int_{G_{kt}} f d\lambda.$

证 在R上函数g规定为

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > kt, \\ 0, & \text{其余}. \end{cases}$$

则得到

$$f^{\Delta(r)}(x) = \sup\left\{\frac{1}{\gamma-x}\int_x^\gamma g d\lambda\right.$$

$$+\frac{1}{y-x}\int_{]x,y[\cap G_{kt}} f d\lambda : y>x \Big\}$$

$$\leqslant g^{\Delta r}(x)+kt.$$

记$N_u=\{x:g^{\Delta(r)}(x)>u\}(u>0)$. 显然

$$M_t^r\subset N_{(1-k)t}.$$

把(21.75.i)应用于函数g，便得出

$$\lambda(M_t^r)\leqslant\frac{1}{(1-k)t}\int_{N_{(1-k)t}} g d\lambda. \qquad (1)$$

由于在$\{x:f(x)\leqslant kt\}$上，$g=0$，(1)式右边的积分便等于

$$\int_{N_{(1-k)t}\cap G_{kt}} f d\lambda;$$

由此可见

$$\lambda(M_t^r)\leqslant\frac{1}{(1-k)t}\int_{G_{kt}} f d\lambda.$$

这样，就$j=r$便证实了(i)；就$j=l$怎样得出(i)，以及怎样证明(ii)，这都是显而易见的. □

(21.80) 关于$\mathfrak{L}_1$的Hardy Littlewood极大定理 函数f如(21.74)所设，并设E是$\mathscr{M}_\lambda$中任意一个集. 对于适合$0<k<1$的每个k，成立

(i) $$\int_E f^{\Delta(j)} d\lambda\leqslant\frac{1}{k}\lambda(E)+\frac{1}{1-k}\int_R f(x)\log^+ f(x)dx\text{①}\quad (j=r,\ l),$$

(ii) $$\int_E f^{\Delta} d\lambda\leqslant\frac{1}{k}\lambda(E)+\frac{2}{1-k}\int_R f(x)\log^+ f(x)dx.$$

而当$0<p<1$时，则有

①请记住$\log^+t=\max\{\log t,\ 0\}$ $(0<t<\infty)$；参看(13.37).

(iii) $\int_E (f^{\Delta(j)})^p d\lambda \leqslant \frac{\lambda(E)^{1-p}}{1-p}\left(\int_R f d\lambda\right)^p (j=r,\ l)$,

(iv) $\int_E (f^{\Delta})^p d\lambda \leqslant 2^p \frac{\lambda(E)^{1-p}}{1-p}\left(\int_R f d\lambda\right)^p$.

证 为了证明(i)，我们利用(21.72)及(21.79)计算如下：

$$\int_E f^{\Delta(j)} d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda(\{y : \xi_E f^{\Delta(j)}(y) > t\}) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda(M_t^{(j)} \cap E) dt$$

$$= \int_0^{1/k} + \int_{1/k}^{\infty}$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\lambda(E) + \frac{1}{1-k}\int_{1/k}^{\infty} \frac{1}{t}\int_{G_{kt}} f(x) dx dt$$

$$= \frac{\lambda(E)}{k} + \frac{1}{1-k}\int_{1/k}^{\infty} \frac{1}{t}\int_R \xi_{G_{kt}}(x) f(x) dx dt$$

$$= \frac{\lambda(E)}{k} + \frac{1}{1-k}\int_R f(x)\left\{\int_{1/k}^{\infty} \xi_{G_{kt}}(x)\frac{1}{t} dt\right\} dx. \tag{1}$$

(1)式末一行中的积分{…}，当$f(x) > 1$时等于

$$\int_{1/k}^{f(x)/k} \frac{1}{t} dt = \log f(x),$$

而当$f(x) \leqslant 1$时则为零〔这里可用初等计算，你愿意就用(20.5)也行〕. 这样，(1)式末一行便等于

$$\frac{\lambda(E)}{k} + \frac{1}{1-k}\int_R f(x)\log^+ f(x) dx. \tag{2}$$

由(1)和(2)便直接得到(i). 为了证明(ii)，在(1)式中用

(21.79.ii)而不用(21.79.i).

证明(iii)时，需作略为不同的论证. 设α是任意正实数. 不妨假定$\lambda(E)>0$，$\int_R f d\lambda<\infty$. 那么，利用(21.72)，可写出

$$\int_E (f^{\Delta j})^p d\lambda = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(M_t^{(j)}\cap E)dt$$

$$= p\int_0^{\alpha/k} + p\int_{\alpha/k}^\infty$$

$$\leqslant \lambda(E)\frac{\alpha^p}{k^p} + \frac{p}{1-k}\int_{\alpha/k}^\infty t^{p-2}\int_{G_{kt}} f(x)dxdt$$

$$= \frac{\alpha^p}{k^p}\lambda(E)$$

$$+\frac{p}{1-k}\cdot\int_R f(x)\left\{\int_{\alpha/k}^\infty t^{p-2}\xi_{G_{kt}}(x)dt\right\}dx. \quad (3)$$

推论(20.5)表明

$$\int_{\alpha/k}^\infty t^{p-2}\xi_{G_{kt}}(x)dt = \left(\frac{1}{k}\right)^{p-1}\int_\alpha^\infty s^{p-2}\xi_{G_s}(x)ds,$$

不难验证

$$\int_\alpha^\infty s^{p-2}\xi_{G_s}(x)ds = \begin{cases} \frac{1}{p-1}((f(x))^{p-1}-\alpha^{p-1}), & f(x)>\alpha, \\ 0, & f(x)\leqslant\alpha. \end{cases}$$

既然p小于1，(3)式末一行便等于

$$\frac{\alpha^p}{k^p}\lambda(E) + \frac{p}{1-p}\frac{1}{k^{p-1}(1-k)}\int_R f(x)\max\{0,\alpha^{p-1}-f(x)^{p-1}\}dx, \quad (4)$$

而(4)又不超过

$$\frac{1}{k^p}\lambda(E)\alpha^p + \left(\frac{p}{(1-p)k^{p-1}(1-k)}\int_R f d\lambda\right)\alpha^{p-1}. \quad (5)$$

如果把(5)看作α的函数，可以看出它在$\alpha=\frac{k}{1-k}(\lambda(E))^{-1}\int_E f d\lambda$处刚好取极小值. 对于这个$\alpha$，(5)的值就等于

$$\frac{1}{(1-k)^p}\ \frac{\lambda(E)^{1-p}}{1-p}\left(\int_E f d\lambda\right)^p,$$

因此对于适合$0<k<1$的每个k，便有

$$\int_E (f^{\Delta j})^p d\lambda\leqslant\frac{1}{(1-k)^p}\ \frac{\lambda(E)^{1-p}}{1-p}\left(\int_E f d\lambda\right)^p.$$

命$k\to 0$，就得出(iii). 在上述论证中，利用(21.79.ii)，作显而易见的修改，便可推出(iv). □

(21.81) 习题 命

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(\log x)^2}, & x\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

试证：$f\in\mathfrak{L}_1(R)$，而$f^{\Delta(r)}\xi_{]0,\frac{1}{2}[}\notin\mathfrak{L}_1(R)$. [提示. 证明当$x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$时，$f^{\Delta(r)}(x)\leqslant\frac{1}{x|\log x|}$.]

(21.82) 习题(T.M.Flett) 对于函数$f\in\mathfrak{L}_p^+(R)$，$p>1$，命$A^f(p)$表示适合$\|f^{\Delta(r)}\|_p=A^f(p)\|f\|_p$的数. 在$\mathfrak{L}_p(R)$中定义一个序列如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}x^{(n^{-1}-1)p^{-1}}, & x\in]0,1[,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

试证$\lim\limits_{n\to\infty}A^{f_n}(p)=\frac{p}{p-1}$，由此证明了(21.76.i)中的常数$\frac{p}{1-p}$乃是最佳可能值.

(21.83) 习题(K.L.Phillips) f如(21.74)所设. 试证：

$$f^{\Delta}(x)=\sup\left\{\frac{1}{u-t}\int_t^u f d\lambda:-\infty<t\leqslant x\leqslant u<\infty,\ t\neq u\right\}.$$

§22 无穷多个测度空间的乘积

(22.1) 引言 如果有人往上抛硬币n次，就有2^n个可能的结果，每个结果是由0和1所成的n元数组：换句话说，结果数是$\{1,2,3,\cdots,n\}$到$\{0,1\}$内的函数的个数. 直观上很明显，假如这枚硬币均匀，这些函数中任意两个出现的机会很可能是相等的. 例如，所有n次上抛都出现正面的机会，与正面、反面、正面、反面、…交错出现的机会很可能正好是一样的. 直观上看来同样明白，“在大量实验中”（当n趋向∞），结果大概是这样的，即出现正面的次数约为抛掷总次数的一半. 我们可以把“大概是”这一词语理解为：对于$\{0,1\}^N$〔$=$序列$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots)$全体，其中对于所有$j$，$t_j$等于0或1〕上某个适当选定的测度$\mu$，我们有

$$\mu\left(\left\{\boldsymbol{t}:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}t_k\right)=\frac{1}{2}\right\}\right)=1.$$

可以设想，研究概率测度，例如这里所指出的测度，其最方便的途径是，考虑测度空间的无穷乘积，这一事实足以说明为什么要收入这一节. 除此之外，在整个分析学里，测度论中不少重要而又有实用价值的构造及其应用，也无不依赖于测度空间的无穷乘积上的测度. 由此看来，这一论题极为重要，不容忽视.

用于研究无穷乘积测度的一些概念毫无难理解之处，只是记号很复杂，大概有点令人望而生畏. 读者自始至终都要牢记住(22.2)中的记号才行.

(22.2) 定义和记号 整个这一节，对于含在某个指标集Γ中的每个γ，$(T_\gamma,\mathscr{M}_\gamma,\mu_\gamma)$将表示一个测度空间，其中$\overline{\overline{\Gamma}}\geqslant\operatorname{card}N$而且对于任意$\gamma\in\Gamma$，都有$\mu_\gamma(T_\gamma)=1$. 命

$$T=\bigtimes_{\gamma\in\Gamma}T_\gamma;$$

T的元素，通常记作$t=(t_\gamma)$，这里t_γ表示t在γ的值.

符号Ω（带下标或不带下标）将表示Γ的有限子集．余集Ω'将总是就Γ而言的：即$\Omega'=\Gamma\cap\Omega'$.

对于适合$\varnothing\neq\Delta\subset\Gamma$的任意集$\Delta$，命

$$T_\Delta=\bigtimes_{\gamma\in\Delta}T_\gamma$$

（比如特别说来，$T_\Gamma=T$）．应当注意，当$\Delta\subsetneqq\Gamma$时，T_Δ并非T的子集.

对于$\Omega=\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_m\}\subset\Gamma$（所有$\gamma_j$互异）．设$\mathscr{E}_\Omega$是集

$$A_{\gamma_1}\times A_{\gamma_2}\times\cdots\times A_{\gamma_m}(A_{\gamma_j}\in\mathscr{M}_{\gamma_j})$$

全体所成的集族．这是与关于两个空间的乘积的可测矩形相类似的一些概念．对于Γ的任何子集Δ，设$\mathscr{N}_\Delta$是含有一切集$A_\Omega\times T_{\Delta\cap\Omega'}$（其中$\Omega$取遍$\Delta$的一切有限子集，而$A_\Omega$则取遍$\mathscr{E}_\Omega$的所有集）的$T_\Delta$的子集所成的最小代数（不是$\sigma$代数）.①又设$\mathscr{M}_\Delta$是$\sigma$代数$\mathscr{S}(\mathscr{N}_\Delta)$．并把$\mathscr{N}_\Gamma$写成$\mathscr{N}$，$\mathscr{M}_\Gamma$则写成$\mathscr{M}$．应当指出，就有限的$\Omega$来说，$\sigma$代数$\mathscr{M}_\Omega$正好就是$\mathscr{S}(\mathscr{E}_\Omega)$.

(22.3) 讨论 我们的目的在于构造$\mathscr{M}$上一个（可数加性）测度μ，它满足下列条件：

(i) $\mu(T)=1$，

(ii) 当$A_{\gamma_j}\in\mathscr{M}_{\gamma_j}(j=1,\ 2,\cdots,n)$时，

$$\mu((A_{\gamma_1}\times\cdots\times A_{\gamma_n})\times T_{\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}'})$$
$$=\mu_{\gamma_1}(A_{\gamma_1})\mu_{\gamma_2}(A_{\gamma_2})\cdots\mu_{\gamma_n}(A_{\gamma_n}).$$

然后我们要就这一**乘积测度**，来证明与Fubini定理相类似的两个命题．以下先建立一个专门引理.

(22.4) 引理 设$\{\Delta_\rho\}_{\rho\in P}$是$\Gamma$的非空子集所成的一个两两

---

①记$A_\Omega\times T_{\Delta\cap\Omega'}$作为$T_\Delta$的子集，我们便犯了一点小错误，尽管所指的意思是很明白的．为了辩明这一点，请参看(22.4).

不相交集族，并且 $\bigcup_{\rho\in P}\Delta_\rho=\Gamma$. 则映射

(i) $(t_\gamma)\to((t_\gamma)_{\gamma\in\Delta_\rho})_{\rho\in P}=\Phi(t)$

是把T映满乘积空间

$$\bigtimes_{\rho\in P}T_{\Delta_\rho}=T^\dagger$$

的 1 － 1 映射. 而映射Φ则把$\mathscr{M}$映满含有一切集

$$\bigtimes_{\rho\in P}A_{\Delta_\rho}$$

的$T^\dagger$的子集所成的最小σ代数$\mathscr{M}^\dagger$，这里对于任意$\rho\in P$，$A_{\Delta_\rho}\in\mathscr{M}_{\Delta_\rho}$，并且仅有限个集$A_{\Delta_\rho}$与$T_{\Delta_\rho}$不同.

证 引理的第一个断言是一目了然的：映射Φ无非是"重新组合"了$(t_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$中的各项$t_\gamma$. 为了证明第二个断言，先考察集

$$A=\bigtimes_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\subset T,\tag{1}$$

其中对于任意γ，$A_\gamma\in\mathscr{M}_\gamma$，而且集$\Omega=\{\gamma\in\Gamma:A_\gamma\neq T_\gamma\}$是有限的. 显而易见，$\Phi(A)$就是集

$$B=\Phi(A)=\bigtimes_{\rho\in P}\left(\bigtimes_{\gamma\in\Delta_\rho}A_\gamma\right).\tag{2}$$

既然集Ω有限，那么除有限个集之外，$\bigtimes_{\gamma\in\Delta_\rho}A_\gamma$都等于$T_{\Delta_\rho}$，而且很明显，每个$\bigtimes_{\gamma\in\Delta_\rho}A_\gamma$都在$\mathscr{N}_{\Delta_\rho}\subset\mathscr{M}_{\Delta_\rho}$中. 因而$\Phi(A)$便在$\mathscr{M}^\dagger$中. 显然，$\mathscr{M}$乃是含有形如(1)的所有集$A$的$T$的子集所成的最小$\sigma$代数. 由于$\Phi$是1-1的，它便保持所有Boole运算不变，因此

$$\Phi(\mathscr{M})\subset\mathscr{M}^\dagger.$$

不难看出，集族$\mathscr{M}^\dagger$乃是含有形如(2)的所有集B的$T^\dagger$的子集所成的最小σ代数. 因为$\Phi^{-1}(B)$具有A的形状，所以有

$$\Phi^{-1}(\mathscr{M}^\dagger)\subset\mathscr{M},$$

从而又有

$$\mathscr{M}^{\dagger}\subset\Phi(\mathscr{M}).\qquad\square$$

在T上构造测度μ过程的第一步，是要证明：就有限乘积而言，μ是由(22.3)中的条件所唯一确定的.

(22.5) **引理** 设$\Omega=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$是$\Gamma$的任意一个有限非空子集. 则$\mathscr{M}_{\Omega}$上存在唯一的一个测度$\mu_{\Omega}$，使对于所有$\bigtimes_{j=1}^{m}A\gamma_j\in\mathscr{E}_{\Omega}$，都成立

(i) $$\mu_{\Omega}\left(\bigtimes_{j=1}^{m}A\gamma_j\right)=\prod_{j=1}^{m}\mu_{\gamma_j}(A_{\gamma_j}).$$

证 (Ⅰ)先假定$\Omega=\{\gamma_1, \gamma_2\}$. 设$\mu_{\Omega}$是(21.9)所规定的$\mathscr{M}_{\Omega}=\mathscr{M}\gamma_1\times\mathscr{M}\gamma_2$上的乘积测度$\mu\gamma_1\times\mu\gamma_2$. 由(21.11)知道$\mu_{\Omega}$是唯一的.

(Ⅱ)我们通过施归纳于Ω中的元素个数来完成证明. 假设对于具有n个元素的Γ的一切子集，结论成立. 并假定

$$\Omega=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \gamma_{n+1}\}.$$

设μ'是满足归纳假设的$\mathscr{M}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$上的唯一测度，又设$\mu$是$\mathscr{M}\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}\times\mathscr{M}\gamma_{n+1}$上适合以下条件的唯一测度：对于所有$B\in\mathscr{M}\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$和所有$A\gamma_{n+1}\in\mathscr{M}\gamma_{n+1}$，都成立

$$\mu(B\times A\gamma_{n+1})=\mu'(B)\cdot\mu\gamma_{n+1}(A\gamma_{n+1}).$$

(Ⅰ)已保证了μ的存在和唯一性. 引理(22.4)指出：可以认为$\mathscr{M}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}\times\mathscr{M}\gamma_{n+1}$和$\mathscr{M}_{\Omega}$是等同的. 因而在$\mathscr{M}_{\Omega}$上可规定测度$\mu$. 为此，对于$\mathscr{M}\gamma_j$中的集$A\gamma_j$，得到

$$\begin{aligned}&\mu(A\gamma_1\times A\gamma_2\times\cdots\times A\gamma_n\times A\gamma_{n+1})\\&\quad=\mu((A\gamma_1\times A\gamma_2\times\cdots A\gamma_n)\times A\gamma_{n+1})\\&\quad=\mu'(A\gamma_1\times\cdots\times A\gamma_n)\cdot\mu\gamma_{n+1}(A\gamma_{n+1})\\&\quad=\mu\gamma_1(A\gamma_1)\cdot\mu\gamma_2(A\gamma_2)\cdots\mu\gamma_n(A\gamma_n)\cdot\mu\gamma_{n+1}(A\gamma_{n+1}).\end{aligned}$$

把刚才所构造的测度μ就当作定理陈述中的μ_{Ω}. 为了证实μ_{Ω}的唯一性，注意到满足(i)的$\mathscr{M}_{\Omega}$上的任意一个测度$\tilde{\mu}$自然定义了$\mathscr{M}\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$上的一个测度. 鉴于$\mu'$的唯一性，这一测度就等于$\mu'$. 就$\Omega=\{\gamma_1, \gamma_2\}$的情况来说，根据$\mu_{\Omega}$的唯一性可知

$$\tilde{\mu}=\mu_{\Omega}. \quad \square$$

以下结果也是很有用处的一项技术性细节.

(22.6) **引理** 如果$\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$，$B_{\Omega_j}\in\mathscr{M}_{\Omega_j}(j=1,\ 2)$，则

(i) $\mu_{\Omega_1\cup\Omega_2}(B_{\Omega_1}\times B_{\Omega_2})=\mu_{\Omega_1}(B_{\Omega_1})\cdot\mu_{\Omega_2}(B_{\Omega_2})$.

证 利用引理(22.4)，把$\mathscr{M}_{\Omega_1\cup\Omega_2}$和$\mathscr{M}_{\Omega_1}\times\mathscr{M}_{\Omega_2}$看作是等同的. 如果$B_{\Omega_j}$在$\mathscr{E}_{\Omega_j}$中（$j=1,\ 2$），那么$B_{\Omega_1}\times B_{\Omega_2}$便在$\mathscr{E}_{\Omega_1\cup\Omega_2}$中，并且显而易见

$\mu_{\Omega_1\cup\Omega_2}(B_{\Omega_1}\times B_{\Omega_2})=\mu_{\Omega_1}(B_{\Omega_1})\cdot\mu_{\Omega_2}(B_{\Omega_2})$:

这一等式两端是同一乘积$\Pi\mu_{\gamma_j}(A_{\gamma_j})$. 这样，$\mu_{\Omega_1\cup\Omega_2}$和$\mu_{\Omega_1}\times\mu_{\Omega_2}$便是$\mathscr{M}_{\Omega_1\cup\Omega_2}$上的两个测度，而且对于$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$满足(22.5.i). 根据(22.5)，它们乃是同一测度. □

我们现在研究完全的①无穷乘积$T=\underset{\gamma\in\Gamma}{\times}T_\gamma$，先证明一项预备事实.

(22.7) **定理** 在集代数$\mathscr{N}$上存在唯一的一个有限加性测度μ，使对于所有Ω及所有$A_\Omega\in\mathscr{M}_\Omega$，都成立

(i) $\mu(A_\Omega\times T_{\Omega'})=\mu_\Omega(A_\Omega)$.

证 设(i)式定义了μ. 先说明这一定义是非二义性的. 为此，假定

$$A_{\Omega_1}\times T_{\Omega_1'}=A_{\Omega_2}\times T_{\Omega_2'}.\ ② \tag{1}$$

记$\Omega_3=\Omega_1\cup\Omega_2$. 那么(1)可以改写成

$$A_{\Omega_1}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_1'}\times T_{\Omega_3'}=A_{\Omega_2}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_2'}\times T_{\Omega_3'}. \tag{2}$$

集$A_{\Omega_1}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_1'}$和$A_{\Omega_2}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_2'}$都在$\mathscr{M}_{\Omega_3}$中，(2)式说明二者是相等的. 引理(22.6)则表明

$\mu_{\Omega_3}(A_{\Omega_1}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_1'})=\mu_{\Omega_1}(A_{\Omega_1})\cdot 1=\mu_{\Omega_1}(A_{\Omega_1})$,

$\mu_{\Omega_3}(A_{\Omega_2}\times T_{\Omega_3\cap\Omega_2'})=\mu_{\Omega_2}(A_{\Omega_2})\cdot 1=\mu_{\Omega_2}(A_{\Omega_2})$.

---

①原文为full，也可译为“丰满”“全”等等. ——译者注

②记$A_{\Omega_1}\times T_{\Omega_1'}=A_{\Omega_2}\times T_{\Omega_2'}$，我们又写得不够妥当，因为这两个集的元素确乎是不同的实体. 还是引理(22.4)纠正了这一失误.

因此(i)式完全确定了μ.

对于任意集$A\in\mathscr{N}$，不难看出，存在Ω和集$A_\Omega\in\mathscr{N}_\Omega$，适合

$$A=A_\Omega\times T_{\Omega'}; \tag{3}$$

这一简单事实的证明从略. 当A_1，A_2是$\mathscr{N}$中不相交的两个集时，同(3)式一样，可记

$$A_j=A_{\Omega_j}\times T_{\Omega_j'}\quad (j=1,\ 2);$$

又记$\Omega_3=\Omega_1\cup\Omega_2$；然后记

$$A_j=A_{\Omega_3}^{(j)}\times T_{\Omega_3'}\quad (j=1,\ 2); \tag{4}$$

显而易见，这是办得到的，而且$A_{\Omega_3}^{(j)}\in\mathscr{N}_{\Omega_3}$. 此外，$A_{\Omega_3}^{(1)}\cap A_{\Omega_3}^{(2)}=\varnothing$也是很明白的，因此，利用(i)及$\mu_{\Omega_3}$的加性(22.5)，便有

$$\begin{aligned}\mu(A_1\cup A_2)&=\mu_{\Omega_3}(A_{\Omega_3}^{(1)}\cup A_{\Omega_3}^{(2)})\\&=\mu_{\Omega_3}(A_{\Omega_3}^{(1)})+\mu_{\Omega_3}(A_{\Omega_3}^{(2)})\\&=\mu(A_1)+\mu(A_2).\end{aligned}$$

这就是说，μ在$\mathscr{N}$上是有限加性的. □

既然每个μ_Ω是可数加性的，是不是可以利用(22.7)的办法来证明μ其实是可数加性的呢？这是令人感兴趣的问题. 但是这个方法肯定不能成功，因为未必能得到Γ的一个有限子集Ω，使得所论及的可数多个集中每一个都成为T_Ω的子集. 此外，也不能应用(10.36)，原因在于可能存在一些两两不相交族$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{N}$，使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\in\mathscr{N}.$$

但是$\mathscr{M}_\Omega$却不含有满足条件

$$C_n=A_{\Omega_n}\times T_{\Omega_n'}$$

的集$A_{\Omega_n}\in\mathscr{M}_{\Omega_n}$全体. 例如，命

$$\Gamma=N,\ T=[0,1]^N,$$

$$B_n=\left\{\boldsymbol{t}\in T: 0<t_k<\frac{1}{n},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{n}\right\}.$$

然后记

$$C_1=B_1', \quad C_n=B_n'\cap(B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}) \quad (n>1).$$

显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n=T$，并且对于 $A_n\in\mathscr{M}\{1,\cdots,n\}$，有

$$C_n=A_n\times T\{1,\cdots,n\}',$$

而对于任意 $D_{n-1}\in\mathscr{M}\{1, \cdots, n-1\}$，$C_n$ 并不具有

$$D_{n-1}\times T\{1,\cdots,n-1\}'$$

的形状.

我们来证明定理本身. 这一证明或许感到很复杂，不过其基本想法却是非常简单的.

(22.8) 定理 $\mathscr{N}$ 上的有限加性测度 μ 能有 $\mathscr{M}$ 上的唯一的一个开拓，这一开拓是可数加性的.

证 μ 在 $\mathscr{M}$ 上的开拓（假如它确实存在的话），其唯一性显然可以应用(21.6)而得到证实. 为了证明 μ 在 $\mathscr{M}$ 上具有某个可数加性开拓，只须证实：对于适合

$$F_n\in\mathscr{N}, F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\varnothing$$

的每个序列 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0. \qquad (1)$$

这样，由(10.37)便可推出可数加性开拓的存在性. ①

这一段，我们作某些变形. 旨在简化随后的记号. 每个 F_n 都具有 $A_{\Omega_n}\times T_{\Omega_n'}$，这里 $A_{\Omega_n}\in\mathscr{N}_{\Omega_n}$. 命

$$\Delta=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n.$$

---

①读者想必记得(10.37)是一道习题，必须加以证明才行. 扼要读过全书的读者，初读§10时如略去了(10.37)的证明. 我们相信现在可以不难证明它.

根据(22.7)，在$\mathscr{N}_{\Delta}$上有一个有限加性测度μ_{Δ}，使对于一切$\Omega\subset\Delta$和一切$A_{\Omega}\in\mathscr{M}_{\Omega}$，都成立

$$\mu_{\Delta}(A_{\Omega}\times T_{\Delta\cap\Omega'})=\mu_{\Omega}(A_{\Omega}).$$

对于每个n，命

$$F_n^{\Delta}=A_{\Omega_n}\times T_{\Delta\cap\Omega_n'}\subset T_{\Delta}.$$

那么显然有：

每个F_n^{Δ}都属于$\mathscr{N}_{\Delta}$；

$\mu_{\Delta}(F_n^{\Delta})=\mu(F_n)$；

$F_1^{\Delta}\supset F_2^{\Delta}\supset\cdots\supset F_n^{\Delta}\supset\cdots$；

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n^{\Delta}=\varnothing.$$

显然只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{\Delta}(F_n^{\Delta})=0$就行了．换句话说，不失一般性，假设$\Gamma$是可数无限的，并假定$\Gamma=N=\{1,2,\cdots\}$，这只不过是记号问题而已．命$k_n=\max\Omega_n$．不失一般性不妨假定$\Omega_n=\{1,2,\cdots,k_n\}$，而且$k_1<k_2<k_3<\cdots$．按以下规则定义集序列$(E_m)_{m=1}^{\infty}$：

$$E_m=\begin{cases}T, & 1\leqslant m<k_1\\ F_n, & k_n\leqslant m<k_{n+1}.\end{cases}$$

则得到

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\varnothing,$$

$$\lim_{m\to\infty}\mu(E_m)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n).$$

须证$\lim\limits_{m\to\infty}\mu(E_m)=0$，对于每个$m$，命

$$\Theta_m=\{1,2,\cdots,m\}.$$

注意，每个E_m都具有$A_m\times T_{\Theta'_m}$的形状，这里$A_m\in\mathscr{N}_{\Theta_m}$.

正如(22.5)证明中所指出的，对于任意m，都有

$$\mu_{\Theta_{m+1}}=\mu_{\Theta_m}\times\mu_{m+1}.$$

不难看出，$\mathscr{N}_{\Theta_{m+1}}$中的一个集是$\mathscr{M}_{\Theta_m}\times\mathscr{M}_{m+1}$可测的．现在应用

(22.7)和(21.12.v)，可写出

$$\mu(E_m)=\mu_{\Theta_m}(A_m)=\int_{T_{\Theta_m}}\xi_{A_m}(\boldsymbol{t})d\mu_{\Theta_m}(\boldsymbol{t})$$

$$=\int_{T_{\Theta_{m-1}}}\int_{T_m}\xi_{A_m}(\boldsymbol{t}^*,\ t_m)d\mu_m(t_m)d\mu_{\Theta_{m-1}}(\boldsymbol{t}^*),\tag{2}$$

式中$\boldsymbol{t}^*$表示$T_{\Theta_{m-1}}$的一般元素．根据(21.12.iii)，(2)式中的内积分是$\mathscr{M}_{\Theta_{m-1}}$可测的，从而可以再应用(22.5)和(21.12.v)，如此连续进行$m-1$次，便得出等式

$$\mu(E_m)=\int_{T_1}\int_{T_2}\cdots\int_{T_m}\xi_{A_m}(t_1,t_2,\cdots,t_m)d\mu_m(t_m)\cdots d\mu_2(t_2)d\mu_1(t_1).\tag{3}$$

假设$\mu(E_m)$并不趋于零．对于$s_1\in T_1$，命

$$f_{1,m}(s_1)=\int_{T_2}\cdots\int_{T_m}\xi_{A_m}(s_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m)d\mu_m(t_m)\cdots d\mu_2(t_2)$$

$$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

这就是说，在(3)式中除了最外层积分运算之外，作其余积分运算，留下了不作积分运算的第一个变量．显然

$$\mu(E_m)=\int_{T_1}f_{1,m}(t_1)d\mu_1(t_1)$$

而且$f_{1,m}(T_1)\subset[0,\ 1]$．假如在$T_1$上处处成立

$$\lim_{m\to\infty}f_{1,m}(a_1)=0,\tag{4}$$

那么Lebesgue控制收敛定理(12.24)便蕴涵

$$\lim_{m\to\infty}\mu(E_m)=0;$$

可见情况并非如此．所以必有一点$a_1\in T_1$，使当$m\to\infty$时，$f_{1,m}(a_1)$并不趋于零．其次规定$f_{2,m}$为

$$f_{2,m}(s_2)=\int_{T_3}\cdots\int_{T_m}\xi_{A_m}(a_1,s_2,t_3,\cdots,t_m)d\mu_m(t_m)\cdots d\mu_3(t_3).$$

假如是这样的情况，即对于一切$s_2 \in T_2$，都有

$$\lim_{m\to\infty} f_{2,m}(s_2)=0,$$

那么根据(12.24)，又会得出

$$\lim_{m\to\infty}\int_{T2} f_{2,m}(t_2)d\mu_2(t_2)=0;$$

即得到

$$\lim_{m\to\infty} f_{1,m}(a_1)=0.$$

所以必有一点$a_2 \in T_2$，使当$m\to\infty$时，$f_{2,m}(a_2)$并不趋于零.

按照上述方法，我们构造了T中一个点序列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)=\boldsymbol{a},$$

它具有以下性质：就任意$n\in N$而言，对于$m>n$有定义的数列

$$\int_{T_{n+1}}\int_{T_{n+2}}\cdots\int_{T_m} \xi_{A_m}(a_1,\cdots,a_n,t_{n+1},\cdots,t_m)d\mu_m(t_m)\cdots d\mu_{n+1}(t_{n+1}), \tag{5}$$

当$m\to\infty$时，没有极限零. 于是(5)式中的被积函数对于一切很大的m，不可能恒等于零，从而对于适当选定的$s_j\in T_j$，以及充分大的m①，便有

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, s_{n+1}, \cdots, s_m)\in A_m. \tag{6}$$

既然$E_m=A_m\times T\Theta'_m$，便可选取一点$\boldsymbol{s}^{m,n}\in T\Theta'_m$，使得

$$(a_1, a_1, \cdots, a_n)\times \boldsymbol{s}^{m,n}\in E_m.$$

由于$E_m\subset E_n$，也就有

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\times \boldsymbol{s}^{(m,n)}\in E_n. \tag{7}$$

既然$E_n=A_n\times T\Theta'_n$，(7)式便蕴涵

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\times T\Theta'_n\subset E_n.$$

特别说来，$\boldsymbol{a}\in E_n$. n既然是任意正整数，我们就得出结论

①原文为"任意大的m"．——译者注

$$\boldsymbol{a}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n.$$

这与等式 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$ 相矛盾，于是完成了证明. □

这样一来，我们得到了T的一些子集所成的σ代数上的一个可数加性测度μ，其作用象乘积测度一样. 第一个应用很简单，它是针对古典概率问题的.

(22.9) **例** 命$\Gamma=\{1,2,3,\cdots\}$，而对于每个$n\in\Gamma$，命$T_n=\{0,1\}$. 那么

$$T=\{\boldsymbol{t}:\boldsymbol{t}=(t_n),\ t_n=1\text{或}t_n=0\}.$$

在每个T_n上规定测度μ_n为

$$\mu_n(\{0\})=\mu_n(\{1\})=\frac{1}{2},$$

并设$\mathscr{M}_n$为$\{0,1\}$的四个子集全体. 对于Γ的有限子集$\{k_1,\cdots,k_n\}$（所有k互异）以及0和1所成的任意序列$(a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n})$，把集

$$\{\boldsymbol{t}\in T:t_{k_1}=a_{k_1},\ t_{k_2}=a_{k_2},\ \cdots,\ t_{k_n}=a_{k_n}\}$$

写成$E(a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n})$. 由(22.3.ii)和(22.7)所给出的$\mu$的定义立即看出

$$\mu(E(a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}))=2^{-n}.$$

对于$n\in N$，在T上规定f_n为$f_n(\boldsymbol{t})=t_n-\frac{1}{2}$，并设$h_n=\frac{1}{n}(f_1+\cdots+f_n)$. 要证

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n\|_2=0. \tag{2}$$

显而易见，$f_j=\xi_{E(1_j)}-\frac{1}{2}$，又

$$f_jf_k=\xi_{E(1_j,1_k)}-\frac{1}{2}\xi_{E(1_j)}-\frac{1}{2}\xi_{E(1_k)}+\frac{1}{4}\quad(j\neq k),$$

而$f_j^2=\frac{1}{4}$. 因此

$$\|h_n\|_2^2=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_T f_jf_kd\mu=\frac{1}{4n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{jk}$$

$$=\frac{1}{4n}.$$

这便证明了(1). 由(1)和(13.33)推知，依测度$h_n\to 0$. 于是对于任意$\varepsilon>0$，成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\{t\in T:\left|\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right\}\right)=0. \quad (2)$$

如果设0和1分别对应于上抛硬币时所得到正面和反面的结果，那么

$$\frac{t_1+t_2+\cdots t_n}{n}$$

便是n次上抛得到反面的频率①. 等式(2)则断言：对于任意$\varepsilon>0$，反面频率离$\frac{1}{2}$的距离大于ε的概率，当n(上抛次数)趋向于无穷大时，递减地趋向于零. 假如硬币均匀$\left[\mu_n(\{0\})=\mu_n(\{1\})=\frac{1}{2}\right]$，这正是我们所期望的结果.

等式(2)乃是**弱大数定律**的形式之一.〔还请参看下文(22.32.b).〕

(22.10) **习题** 考虑(22.9)的一种推广如下. 设Γ是任意的(但自然是无限的). 对于每个γ，设A_γ是$\mathscr{M}_\gamma$中任意一个集，并设f_γ是T上的函数，它满足

---

①原文为“比率(proportion)”，译文改为“频率(frequency)”.——译者注

$$f_\gamma(t)=\xi_{A_\gamma}(t_\gamma)-\mu_\gamma(A_\gamma).$$

对于$\Omega=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}\subset\Gamma$，设$w(\Omega)$是一个正数，并设

$$h_\Omega=w(\Omega)\sum_{\gamma\in\Omega}f_\gamma.$$

（a）试证 $\int_T|h_\Omega|^2d\mu=w(\Omega)^2\sum_{\gamma\in\Omega}[\mu_\gamma(A_\gamma)-(\mu_\gamma(A_\gamma))^2]$.

(b)推广依测度收敛的概念：如果对于任意$\delta>0$和任意$\varepsilon>0$，总存在$\Omega_0\subset\Gamma$，使对于一切$\Omega\supset\Omega_0$，都有

$$\mu(\{t\in T: |h_\Omega(t)|\geqslant\delta\})<\varepsilon,$$

则依测度$h_\Omega\to 0$. 为使h_Ω依测度收敛于0，试求$w(\Omega)$应满足的适当条件. 试问：当所有$\mu_\gamma(A_\gamma)$都相等时，可以把$w(\Omega)$表述成怎样的简单形式？$\mu_\gamma(A_\gamma)=0$时怎样？$\mu_\gamma(A_\gamma)=1$时呢？

就无穷乘积而言，Fubini定理具有几个十分不同的类似命题，而就有限乘积而言，这些命题显然便统一起来了. 产生这些不同说法的原因是，用有限个坐标范围内的积分逼近$\int_T fd\mu$和f时，可以有多种多样不同的方式. 我们的第一个Fubini式定理论述$\mathfrak{L}_p$收敛性，而且颇具一般性. 先要建立三个引理.

(22.11) 引理 设$(T_j, \mathscr{M}_j, \mu_j)$ $(j=1, 2)$是两个测度空间，并且$\mu_j(T_j)=1$；命

$$(T, \mathscr{M}, \mu)=(T_1\times T_2, \mathscr{M}_1\times\mathscr{M}_2, \mu_1\times\mu_2);$$

又设p为一实数，$p\geqslant 1$. 对于$f\in\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$，设$Sf$是$T$上的函数，满足：对于任意$s_2\in T_2$，都有

$$Sf(s_1, s_2)=\int_{T_2}f(s_1, t_2)d\mu_2(t_2).$$

则Sf必属于$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$，而且

$$\|Sf\|_p\leqslant\|f\|_p,$$

因此S乃是$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$到其本身内的一个范数非增线性变换.

证 由于$\mu(T)=1$，便有$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)\subset\mathfrak{L}_1(T, \mathscr{M}, \mu)$. 于是$f$便属于$\mathfrak{L}_1(T, \mathscr{M}, \mu)$. 根据(21.13.iv)知道，函数

$$s_1\to\int_{T_2}f(s_1, t_2)d\mu_2(t_2)$$

属于$\mathfrak{L}_1(T_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$. 特别说来，这个函数是$\mathscr{M}_1$可测的，又因为函数

$$(s_1, s_2)\to\int_{T_2}f(s_1, t_2)d\mu_2(t_2)$$

并不依赖于s_2，所以它显然是$\mathscr{M}$可测的. 利用(12.28.ii)，(13.17)及(21.12)，得到

$$\begin{aligned}
\|Sf\|_p^p&=\int_{T_1\times T_2}\left|\int_{T_2}f(s_1, t_2)d\mu_2(t_2)\right|^p d(\mu_1\times\mu_2)(s_1,s_2)\\
&\leqslant\int_{T_1\times T_2}\left[\int_{T_2}|f(s_1, t_2)|\, d\mu_2(t_2)\right]^p d(\mu_1\times\mu_2)(s_1, s_2)\\
&\leqslant\int_{T_1\times T_2}\int_{T_2}|f(s_1, t_2)|^p d\mu_2(t_2)d(\mu_1\times\mu_2)(s_1, s_2)\\
&=\int_{T_2}\left(\int_{T_1}\int_{T_2}|f(s_1,t_2)|^p d\mu_2(t_2)d\mu_1(s_1)\right)d\mu_2(s_2)\\
&=\int_{T_2}\left[\int_{T_1\times T_2}|f(s_1,t_2)|^p d(\mu_1\times\mu_2)(s_1,t_2)\right]d\mu_2(s_2)\\
&=\int_{T_2}\|f\|_p^p d\mu_2(s_2)=\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

由此Sf属于$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$，而且$\|Sf\|_p\leqslant\|f\|_p$. □

(22.12) **引理** 设Γ是一个任意的无限指标集，并假定$\varnothing\subsetneqq\Delta\subsetneqq\Gamma$. 又设$\mu_\Delta$和$\mu_{\Delta'}$是(22.7)和(22.8)所构造的$\sigma$代数$\mathscr{M}_\Delta$和$\mathscr{M}_{\Delta'}$上的测度. 如果把$\mathscr{M}$和$\mathscr{M}_\Delta\times\mathscr{M}_{\Delta'}$看作是等同的〔考虑到(22.4)的映射$\Phi$，这么看问题是可以的〕，则有

$$\mu=\mu_\Delta\times\mu_{\Delta'}.$$

证 因为测度μ和$\mu_\Delta\times\mu_{\Delta'}$在形如$A_\Omega\times T_{\Omega'}$的集上是一致的，其中$\Omega$是$\Gamma$的一个有限子集，所以根据$\mu$的唯一性〔(22.7)和(22.8)〕，它们在整个$\mathscr{M}$上也是一致的. □

以下引理是一项必需的技术性细节.

(22.13) **引理** 对于任意$B\in\mathscr{M}$和任意$\varepsilon>0$，总存在一个集$A\in\mathscr{N}$，使得

$$\|\xi_A-\xi_B\|_1=\mu(A\triangle B)<\varepsilon.$$

证 规定集族$\mathscr{P}$为$\{B\in\mathscr{M}$: 对于任意$\varepsilon>0$，总存在$A\in\mathscr{N}$，使得$\mu(A\triangle B)<\varepsilon\}$. 显然$\mathscr{P}\supset\mathscr{N}$；为了证明$\mathscr{P}=\mathscr{M}$，只要证明$\mathscr{P}$是$\sigma$代数就行了. 我们借助于(21.16)来证明这件事.

设(B_n)是$\mathscr{P}$中一个单调序列（递增的或递减的都可以），并记$B=\lim B_n$. 给定$\varepsilon>0$，利用(10.13)或(10.15)，可取$m\in N$，使

$$\mu(B\triangle B_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$B_m\in\mathscr{P}$，便存在一个集$A_m\in\mathscr{N}$，使

$$\mu(A_m\triangle B_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}A_m\triangle B&=(A_m\cap B')\cup(B\cap A_m')\\&\subset(A_m\cap B_m')\cup(B\triangle B_m)\cup(B_m\cap A_m')\\&=(A_m\triangle B_m)\cup(B\triangle B_m),\end{aligned}$$

从而

$$\mu(A_m \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

由此$B \in \mathscr{P}$. 这样$\mathscr{P}$便是单调族. 既然$\mathscr{P}$包含代数$\mathscr{N}$, 由(21.6)知道, $\mathscr{P}$也包含$\mathscr{S}(\mathscr{N})$, 从而有

$$\mathscr{M} \supset \mathscr{P} \supset \mathscr{S}(\mathscr{N}) = \mathscr{M}^{①}. \qquad \square$$

我们现在可以叙述并证明Fubini定理的一种平均收敛说法，这一结果归功于B.Jessen.

(22.14) **定理** 设Γ是一个任意的无限指标集. 对于Γ的每个有限子集Ω, 把$(T, \mathscr{M}, \mu)$看成$(T_\Omega \times T_{\Omega'}, \mathscr{M}_\Omega \times \mathscr{M}_{\Omega'}, \mu_\Omega \times \mu_{\Omega'})$〔利用(22.12)〕. 对于$1 \leqslant p < \infty$, $f \in \mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$, 在$T$上规定$f_{\Omega'}$为

$$f_{\Omega'}(\boldsymbol{t}_\Omega, \boldsymbol{t}_{\Omega'}) = \int_{T_\Omega} f(\boldsymbol{u}_\Omega, \boldsymbol{t}_{\Omega'}) d\mu_\Omega(\boldsymbol{u}_\Omega)$$

也就是说，$f_{\Omega'}$是如同(22.11)一样具有Sf的形状的一个函数. 则$f_{\Omega'}$属于$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$, 而且

$$\text{(i)} \lim_\Omega \left\| f_{\Omega'} - \int_T f d\mu \right\|_p = 0. ②$$

此外，命

$$f_\Omega(\boldsymbol{t}_\Omega, \boldsymbol{t}_{\Omega'}) = \int_{T_{\Omega'}} f(\boldsymbol{t}_\Omega, \boldsymbol{u}_{\Omega'}) d\mu_{\Omega'}(\boldsymbol{u}_{\Omega'}).$$

则f_Ω也属于$\mathfrak{L}_p(T, \mathscr{M}, \mu)$, 而且

(ii) $\lim_\Omega \| f_\Omega - f \|_p = 0.$

证 (Ⅰ)先考虑一类很特别的函数f: 即假定$f = \xi_{A_{\Omega_0} \times T_{\Omega_0'}}$, 这里$A_{\Omega_0} \in \mathscr{M}_{\Omega_0}$. 设$\Omega \supset \Omega_0$, 则有

①注意，引理(22.13)对于任意有限测度空间$(T, \mathscr{M}, \mu)$以及适合$\mathscr{S}(\mathscr{N}) = \mathscr{M}$的任意代数$\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$都是成立的.

②这个极限的涵义是：对于任意$\varepsilon > 0$, 总有一个$\Omega_0 \subset \Gamma$, 使当$\Omega \supset \Omega_0$时，便有$\| f_{\Omega'} - \int_T f d\mu \|_p < \varepsilon$. (ii)中的极限有类似的定义.

$$f_{\Omega'}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})=\int_{T\Omega}\xi_{A\Omega_0\times T\Omega_0'}(\boldsymbol{u}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})d\mu_{\Omega}(\boldsymbol{u}_{\Omega})$$

$$=\int_{T\Omega}\xi_{A\Omega_0\times T\Omega\cap\Omega_0'\times T\Omega'}(\boldsymbol{u}_{\Omega},\boldsymbol{t}_{\Omega'})d\mu_{\Omega}(\boldsymbol{u}_{\Omega})①.$$

(1)

作为T_{Ω}上的函数，$\xi_{A\Omega_0}\times T_{\Omega\cap\Omega_0'}\times T_{\Omega'}$无非是集$A\Omega_0\times T_{\Omega\cap\Omega_0'}$的特征函数，因此(1)式中的积分都等于

$$\mu_{\Omega}(A_{\Omega_0}\times T\Omega\cap\Omega_{0'})=\mu_{\Omega_0}(A\Omega_0)=\mu(A\Omega_0\times T\Omega_0')$$

$$=\int_T fd\mu;$$

即

$$f_{\Omega'}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})=\int_T fd\mu.$$

这样，对于上述很特别的函数f便证实了(i). 为了对于f证实(ii)，仍设$\Omega\supset\Omega_0$，并注意到

$$f_{\Omega}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})$$

$$=\int_{T_{\Omega'}}\xi_{A\Omega_0'\times T_{\Omega\cap\Omega_0'}\times T_{\Omega'}}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{u}_{\Omega'})d\mu_{\Omega'}(\boldsymbol{u}_{\Omega'}),$$

当$\boldsymbol{t}_{\Omega}|_{\Omega_0'}\in A_{\Omega_0}$时，对于所有$\boldsymbol{u}_{\Omega'}$，上式中的被积函数都等于1；因而这时$f_{\Omega}=f=1$. 当$\boldsymbol{t}_{\Omega}|_{\Omega_0}\notin A_{\Omega_0}$时，上式中的被积函数等于零，从而$f_{\Omega}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})=0$. 这样一来便得出

$$f_{\Omega}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'})=\xi_{A\Omega_0\times T\Omega_0'}(\boldsymbol{t}_{\Omega},\ \boldsymbol{t}_{\Omega'}),$$

这就证实了(ii).

(Ⅱ)现在对于所有$f\in\mathfrak{L}_p(T,\ \mathscr{M},\ \mu)$来证实(i)和(ii). 为此，设$\mathfrak{S}$是$\mathfrak{L}_p$的这样的子集，即对于$\mathfrak{S}$，(i)和(ii)都是正确的. 先证$\mathfrak{S}$乃是$\mathfrak{L}_p$的一个闭线性子空间. $\mathfrak{S}$是线性子空间是不言自明

①原书最后一个积分中ξ的下标为$A\Omega_0\times T\Omega\cap\Omega_0\times T\Omega'$. ——译者注

的，因此仅须证它是闭的.

假定

$$\lim_{n\to\infty}\|f^{(n)}-f\|_p=0,$$

其中$f^{n}\in\mathfrak{S}$（$n=1$，2，3，…）. 对于任意$\varepsilon>0$，总存在一个集Ω_n，满足：

$$\|f^{(n)}{}_{\Omega'_n}-\int_T f^{(n)}d\mu\|_p<\varepsilon\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

还满足以下条件：即用任意一个更大的有限集代替Ω_n时，同一不等式仍然成立. 根据(22.11)，对于任意$\delta>0$和任意Ω，由不等式

$$\|f^{(n)}-f\|_p<\delta$$

可推出以下两个不等式

$$\|f^{(n)}{}_{\Omega'_0}-f_{\Omega'}\|_p<\delta,$$

$$\|f^{(n)}{}_{\Omega'}-f_{\Omega'}\|_p<\delta$$

其中$n=1$，2，3，…. 选取n如此之大，使

$$\|f^{(n)}-f\|_p<\varepsilon,$$

并设$\Omega\supset\Omega_n$，则得到

$$\begin{aligned}\|f_{\Omega'}-\int_T fd\mu\|_p&\leqslant\|f_{\Omega'}-f^{(n)}_{\Omega'}\|_p+\|f^{(n)}_{\Omega'}-\int_T f^{(n)}d\mu\|_p\\&\quad+\|\int_T f^{(n)}d\mu-\int_T fd\mu\|_p\\&<\varepsilon+\varepsilon+\left|\int_T f^{(n)}d\mu-\int_T fd\mu\right|\\&\leqslant 2\varepsilon+\int_T|f^{(n)}-f|\,d\mu\\&\leqslant 2\varepsilon+\|f^{(n)}-f\|_p<3\varepsilon.\end{aligned}$$

这里利用了(13.17)以及对于任意常数C，$\|C\|_p=|C|$这一事实. 这样一来，包含关系$\Omega\supset\Omega_n$便蕴涵

$$\| f_{\Omega'} - \int_T f d\mu \|_p < 3\varepsilon,$$

既然ε是任意的，对于函数f便推出了(i). 同理可证对于f也成立关系式(ii)，所以$\mathfrak{I}$是闭的.

根据第(Ⅰ)步，$\mathfrak{I}$含有形如ξ_A ($A \in \mathscr{N}$)的一切函数，既然$\mathfrak{I}$是闭的，那么引理(22.13)以及显而易见的恒等式$\| \xi_E \|_p = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$便证明了：$\mathfrak{I}$含有一切$\xi_B$ ($B \in \mathscr{M}$). 于是$\mathfrak{I}$含有一切$\mathscr{M}$可测简单函数，而由于这些函数在$\mathfrak{L}_p$中稠密(13.20)，这就完成了证明. □

(22.15) **注意** 关于$\bigtimes_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$的部分乘积上积分的平均收敛问题，我们所希望了解的，定理(22.14)——自然是两个定理——都告诉我们了. 定理分两种情况：或是针对积分的(22.14.i)，或是针对被积函数的(22.14.ii). 要注意，就有限乘积而言，(22.14.i)变成了很平凡的事实，而(22.14.ii)则仅当我们约定对于一个空坐标集的积分，其结果就等于零时才有意义(而且直接看出也是平凡的事实).

就Γ是可数无限的情况来说，则可以用μ几乎处处点态收敛来代替(22.14)的平均收敛. 正如我们现在要说明的，不难由(20.56)和(20.59)推出这些结果.

(22.16) **记号** 在(22.16)—(22.23)各段，将始终采用以下记号. 集Γ指$\{1, 2, 3, \cdots\}$，集Ω_n指$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ($n \in N$)，而f是$\mathfrak{L}_1(T, \mathscr{M}, \mu)$中一个任意函数. 函数$f_n$为(22.14)的函数$f_{\Omega_n}$，即

(i) $f_n(t) = f_n(t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots)$

$$= \int_{T_{\Omega_n'}} f(t_1, \cdots, t_n, u_{n+1}, \cdots) d\mu_{\Omega_n'}(u_{n+1}, \cdots).$$

函数f_n'则为(22.14)的函数$f_{\Omega_n'}$，即

(ii) $f_n'(t) = f_n'(t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots)$

$$= \int_{T_{\Omega_n}} f(u_1, \cdots, u_n, t_{n+1}, \cdots) d\mu_{\Omega_n}(u_1, \cdots, u_n)$$

(22.17) **定理**（Jessen） 关系式

（i） $$\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t})$$

对于μ几乎所有$\boldsymbol{t} \in T$成立.

证 我们想应用极限定理(20.56). 为此，考虑如(22.2)所定义的$T_1 \times \cdots \times T_n$的子集所成的$\sigma$代数$\mathscr{M}_{\Omega_n}$，并设$\mathscr{M}^{n)}$是具有$A_{\Omega_n} \times T_{\Omega'_n}$形状的$T$的子集全体所成的集族，这里$A_{\Omega_n} \in \mathscr{M}_{\Omega_n}$. 显然:

（a） $\mathscr{M}^1 \subset \mathscr{M}^2 \subset \cdots \subset \mathscr{M}^n \subset \cdots$,

（b） 每个$\mathscr{M}^n$是σ代数，

（c） $\mathscr{M}$是含有$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{M}^n$的最小$\sigma$代数.

这样，(20.56)的题设都满足了，其中(20.56)的$\mathscr{M}_n$就是现在所论及的$\mathscr{M}^n$. σ代数$\mathscr{M}_\infty$则为现在所论及的$\mathscr{M}$. 把这里的乘积测度μ看作(20.56)的测度μ，并规定(20.56)的测度η为：对于任意$A \in \mathscr{M}$,

$$\eta(A) = \int_A f d\mu.$$

〔为了满足η是广义测度的题设，必须先考虑$f \in \mathfrak{L}_1^r(T, \mathscr{M}, \mu)$. 复值情况显然可立即推出. 〕$|\eta| \ll \mu$乃是平凡的事实.

现在看一下f_n的定义（22.16.i)，并利用引理(22.12)以及（21.12.iv). 这些断言表明，f_n是$\mathscr{M}^{(n)}$可测的. 须证f_n是η^n关于$\mu^{n)}$的Lebesgue-Radon-Nikodým导数〔如同(20.55)一样，η^n和μ^n限制在$\mathscr{M}^n$上〕，就是说，须证对于任意$A \in \mathscr{M}^n$，成立

$$\eta(A) = \int_A f_n d\mu. \qquad (1)$$

记$A = A_{\Omega_n} \times T_{\Omega'_n}$，其中$A_{\Omega_n} \in \mathscr{M}_{\Omega_n}$. 应用(22,12)和(21.13)，可

写出

$$\eta(A)=\int_T \xi_A(t)f(t)d\mu(t)$$

$$=\int_{T\Omega_n\times T\Omega'_n} \xi_{A\Omega_n\times T\Omega'_n}(t_{\Omega_n},t_{\Omega'_n})f(t_{\Omega_n},t_{\Omega'_n})d(\mu_{\Omega_n}\times\mu_{\Omega'_n})(t_{\Omega_n},t_{\Omega'_n})$$

$$=\int_{T\Omega_n}\int_{T\Omega'_n} \xi_{A\Omega_n\times T\Omega_n}(t_{\Omega_n},t_{\Omega'_n})f(t_{\Omega_n},t_{\Omega'_n})d\mu_{\Omega'_n}(t_{\Omega'_n})d\mu_{\Omega_n}(t_{\Omega_n}). \quad (2)$$

由于$\xi_{A\Omega_n\times T\Omega'_n}(t_{\Omega_n},\ t_{\Omega'_n})=\xi_{A\Omega_n}(t_{\Omega_n})$，（2）式中最后一个积分便等于

$$\int_{T\Omega_n}\xi_{A\Omega_n}(t_{\Omega_n})\int_{T\Omega'_n}f(t_{\Omega_n},\ t_{\Omega'_n})d\mu_{\Omega'_n}(t_{\Omega'_n})d\mu_{\Omega_n}(t_{\Omega_n})$$

$$=\int_{T\Omega_n}\xi_{A\Omega_n}(t_{\Omega_n})f_n(t_{\Omega_n})d\mu_{\Omega_n}(t_{\Omega_n}). \quad (3)$$

利用(22.12)和(21.13)，通过类似的但简单一些的计算，便知道（3）式右端其实等于

$$\int_T\xi_A(t)f_n(t)d\mu(t)$$

于是（1）式成立．因为f显然是σ代数$\mathscr{M}$上η关于μ的 Lebesgue-Radon-Nikodým导数，所以应用(20.56)便得出结论：在T上μ-a.e.成立$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$．此即(i)． □

(22.18) **习题** 假定η是T上一个σ有限测度，并且$\eta\ll\mu$．试把$\frac{d\eta}{d\mu}$表成一些函数的累次极限，这些函数的每一个都具有

(22.16.i)的形状.〔提示.根据(19.24),在T上存在一个非负、实值、$\mathscr{M}$可测函数f,使对于任意$A\in\mathscr{M}$,

$$\int_A f d\mu=\eta(A).$$

对于任意$k\in N$,命

$$f^{(k)}=\min\{f,\ k\}.$$

如同(22.16.i)一样,就$f^{(k)}$规定$f^{(k)}_n$.则(22.17)表明

$$\lim_{n\to\infty} f^{(k)}_n=f^{(k)}\quad \mu-\text{a.e.}$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} f^{(k)}_n\right]=f\quad \mu-\text{a.e.}\,\rbrack$$

(22.19) 习题 T,μ_n如(22.9)所设.

(a) 设L是N的无限子集,a是T的一个固定元素,命$B=\{t\in T$:对于任意$n\in L$,$t_n=a_n\}$.试证$\mu(B)=0$.

(b) 按照(22.9)的记号,我们有

$E(0_1,\ 0_3,\ \cdots,\ 0_{2n-1})=\{t\in T: t_1=t_3=\cdots=t_{2n-1}=0\}$.

把这个集记作S_n.试证:对于μ几乎所有$t\in T$,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \xi_{S_n}(t)=0.$$

〔提示.设η是T上的乘积测度,它由每个$\{0,1\}_n$上的测度η_n按以下规则定义:当n是偶数时,$\eta_n(\{0\})=\eta_n(\{1\})=\frac{1}{2}$.当$n$是奇数时,$\eta_n(\{0\})=1$,而$\eta_n(\{1\})=0$.证明$\eta$和$\mu$是互相奇异的.设$\mathscr{M}^{(n)}$的定义和(22.16)一样.证明$\mathscr{M}^{(n)}$上的$\eta$关于$\mathscr{M}^{(n)}$上的$\mu$是绝对连续的,而且$2^n\xi_{S_n}$为其Lebesgue-Radon-Nikodým导数.然后应用(20.56).〕

(c)试求η测度为1,μ测度为0的一个集D,使得在D上η几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \xi_{S_n}(t)=\infty.$$

注意,这与(20.53.iv)是一致的.

我们现在介绍定理(22.17)的一个重要推论.

(22.20) **定义** 设$\boldsymbol{t}=(t_n)_{n=1}^{\infty}$和$\boldsymbol{u}=(u_n)_{n=1}^{\infty}$是$T$中的两点. 如果存在某个$n_0\in N$，使对于一切$n\geqslant n_0$，都有$t_n=u_n$，就说$\boldsymbol{t}$和$\boldsymbol{u}$是**终归相等的**.

(22.21) **定理：零一律** 设U是$\mathscr{M}$中一个集，它满足：对于所有$\boldsymbol{t}\in T$，$\boldsymbol{t}$在U中的充要条件是，与$\boldsymbol{t}$终归相等的所有点$\boldsymbol{u}$也在U中. 则$\mu(U)$或是0或是1.

证 试考察函数$f=\xi_U$，并如同(22.16.i)一样作出函数f_n. 对于所有n以及对于$T\Omega_n$中所有$(t_1,\cdots,t_n)$和$(t_1',\cdots,t_n')$，因为点$(t_1,\cdots,t_n,u_{n+1},u_{n+2},\cdots)$和点$(t_1',\cdots,t_n',u_{n+1},u_{n+2},\cdots)$是终归相等的，所以$\xi_U$在这两个点处便具有同一值. 定义(22.16.i)说明，$f_n(\boldsymbol{t})$在整个T上其实是一个常数，从而$\xi_U(\boldsymbol{t})$——根据(22.17.i)，它μ几乎处处是$f_n(\boldsymbol{t})$的极限——必定μ几乎处处是一个常数. 既然ξ_U只能取0和1两个值，因此得到

$$\mu(U)=0\text{ 或 }\mu(U)=1.\square$$

借助于定理(22.21)和(20.59)，可以证明另一个点态极限定理.

(22.22) **定理**(Jessen) 记号如(22.16)所设. 则关系式

(i) $$\lim_{n\to\infty}f_n'(\boldsymbol{t})=\int_T fd\mu$$

对于μ几乎所有$\boldsymbol{t}\in T$成立.

证 我们想应用极限定理(20.59). 为此，考虑$T\Omega_n'$的子集所成的σ代数$\mathscr{M}_{\Omega_n'}$，并设$\mathscr{M}^{(n)}$是对于$A\Omega_n'\in\mathscr{M}_{\Omega_n'}$具有$T\Omega_n\times A\Omega_n'$形式的$T$的子集全体所成的集族. 显然

(a) $\mathscr{M}\supset\mathscr{M}^{(1)}\supset\mathscr{M}^{(2)}\supset\cdots\supset\mathscr{M}^{(n)}\supset\cdots$,

(b) 每个$\mathscr{M}^{(n)}$是T的子集所成的一个σ代数.

$\mathscr{M}_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}^{(n)}$中的集$U$分明满足(22.21)的题设，因而它具有$\mu$测度0或1. 在$\mathscr{M}$上规定测度$\eta$为

$$\eta(A)=\int_A f d\mu.$$

把用于证明(22.17)的计算作显而易见的修改，便可以看出f_n'乃是$\mathscr{M}^n$可测的，而且对于任意$A\in\mathscr{M}^{(n)}$，成立

$$\eta(A)=\int_A f_n'(t)d\mu(t).$$

这样一来，就$\mathscr{M}^n$而言，f_n'便是η关于μ的Lebesgue-Radon-Nikodým导数，于是由(20.59)推知，在$\mathscr{M}_0$上

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t)=f_0(t)$$

是存在的，而且是η关于μ的Lebesgue-Radon-Nikodým导数.

因为f_0是$\mathscr{M}_0$可测的，而μ在$\mathscr{M}_0$上又只能取0和1两个值，所以不难看出，必有一个数α，使对于μ测度为1的集中所有t，都成立

$$f_0(t)=\alpha.$$

由此得到

$$\eta(T)=\int_T f d\mu=\int_T f_0 d\mu=\alpha,$$

从而(i)得证. □

(22.23) 习题 设f是$\mathscr{M}$可测的复值函数，并满足：对于任意正整数n以及任意选取的$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$，都有

(i) $f(u_1, u_2, \cdots, u_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \cdots)=f(v_1, v_2, \cdots, v_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \cdots)$.

试证f μ-a.e.是一个常数.〔提示．利用(22.21)的论证．〕

(22.24) 评注 对于某些函数，如果它们是依赖于单一坐标的函数的乘积，定理(22.14)，(22.17)及(22.22)则取特别简单的形式．但我们不去费力地作详尽论述，仅举几个例子.

(a) 设Γ是任意的无限指标集，Ω是Γ的非空有限子集，对于每

个$\gamma\in\Omega$，设f_γ是$\mathfrak{L}_1(T_\gamma, \mathscr{M}_\gamma, \mu_\gamma)$中一个函数．又设$g$是$T$上的函数$t\to\prod_{\gamma\in\Omega} f_\gamma(t_\gamma)$．则有

$$\text{(i)} \qquad \int_T g d\mu = \prod_{\gamma\in\Omega}\int_{T_\gamma} f_\gamma d\mu_\gamma.$$

这可以由(22.14)和(21.13)直接得出．

(b) 命$\Gamma=N=\{1, 2, 3, \cdots\}$，又对于每个$n\in N$，设$f_n$是$\mathfrak{L}_1(T_n, \mathscr{M}_n, \mu_n)$中一个函数，并假定对于$\mu$几乎所有$(t_n)\in T$，

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k} f_n(t_n)=\prod_{n=1}^{\infty} f_n(t_n)$$

存在且有限．由

$$t\longrightarrow\prod_{n=1}^{\infty} f_n(t_n)$$

所定义的函数g无疑是$\mathscr{M}$可测的．假设$g\in\mathfrak{L}_1(T, \mathscr{M}, \mu)$．则有

$$\text{(ii)} \qquad \int_T g d\mu=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\int_{T_n} f_n d\mu_n.$$

这也可以由(22.14)立即得出．应用(12.22)，读者不难把(ii)推广到下述情况，即$f_n\in\mathfrak{L}_1^+(T_n, \mathscr{M}_n, \mu_n)$，$f_n\geqslant 1$，这里不对$g$作假定．

(c) (ii)的特例即等式

$$\text{(iii)} \qquad \mu\left(\mathop{\times}_{n\in N} A_n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_n),$$

这一等式对于适合$A_n\in\mathscr{M}_n$（n为任意的）的所有集序列(A_n)，都是成立的．

(d) 就不可数乘积而言，情况完全不同，这时（iii）并不成立，即使我们考虑完全化的测度空间（T，$\mathscr{M}$，$\bar{\mu}$）也是如此. 比如说，假设$\overline{\overline{\Gamma}}>\text{card}N$，对于任意$\gamma\in\Gamma$，$T_\gamma=[0, 1]$. 对于每个$\gamma$，设$E_\gamma$是$\lambda$可测的，$E_\gamma\subsetneq[0, 1]$，$\lambda(E_\gamma)=1$. 这时在每个坐标都具有Lebesgue测度的乘积空间中，$\bigtimes_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$并**不是**可测的. 关于这一颇为微妙的事实，其证明请参看Hewitt和Ross①.

此外，就一般的（T_γ，$\mathscr{M}_\gamma$，μ_γ）而言，假如$\overline{\overline{\Gamma}}>\text{card}N$，$A_\gamma\in\mathscr{M}_\gamma$，而且对于不可数个$\gamma$，有$\mu_\gamma(A_\gamma)<1$，那么

$$\bar{\mu}(\bigtimes_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)=0.$$

证明这一事实很简单，论证从略.

接下来，我们研究一个事实(22.26)，它与(22.21)有联系，但并不取决于(22.21)，须先介绍一个基本引理. 引理(22.26)本身是很有意义的，另外，(22.31)的证明也需要它.

(22.25) **引理** 假定对于任意$k\in N$，$\alpha_k\in[0, 1[$. 则当$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=\infty$时，有$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)=0$. 而当$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty$时，则有$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)>0$.

证 显而易见

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$$

是存在的. 对于$k=1, 2, \cdots$，我们有

$$(1-\alpha_k)(1+\alpha_k)=1-\alpha_k^2\leqslant 1,$$

从而

$$1+\alpha_k\leqslant\frac{1}{1-\alpha_k}.$$

①E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, Springer-Verlag Heidelberg, 1963, P.228.

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k) \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)},$$

由此可见，当$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) = 0.$$

反过来，假定$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$，那么对于适合$\alpha_k \leqslant \frac{1}{2}$的$k$，便有

$$1-\alpha_k \geqslant \frac{1}{1+2\alpha_k},$$

此外，对于任意k，还有$1+2\alpha_k \leqslant \exp(2\alpha_k)$．所以对于某个$m$及任意$n \geqslant m$，便有

$$\prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k) \geqslant \exp\left(-2\left(\sum_{k=m}^{n} \alpha_k\right)\right) \geqslant \exp\left(-2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right)\right).$$

由此显然推出$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k) > 0$．　□

(22.26) **Borel-Cantelli引理**　命$\Gamma = N = \{1, 2, 3, \cdots\}$．对于每个$n \in N$，设$E^{(n)}$是$\mathscr{M}_n$中一个集，并把集$E^{(n)} \times T_{\{n\}'}$记作$E_n$．又设$F$为集$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right)$．则有

$$\mu(F) = \begin{cases} 0, & \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E^{(n)}) < \infty, \\ 1, & \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E^{(n)}) = \infty. \end{cases}$$

证 集F分明满足(22.21)的题设，因而$\mu(F)$必定等于0或1．本引理也正是这样说的．显然，对于任意n成立

$$\mu(F)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\mu(E_k);$$

因此当$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E^{(n)})<\infty$时，$\mu(F)=0$ $\left[\text{就}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\right.$ 而言成立同样结果，这里A_k都是任意测度空间中的可测集．］

为了证明第二个结论，则需要上述特定集E_n．注意到

$$F'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k'\right),\quad E_k'=(E^{(k)'})\times T_{\{k\}'},$$

则得出

$$\begin{aligned}\mu(F')&=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k'\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left(\bigtimes_{k=n}^{\infty}(E^{(k)})'\right)\times T_1\times\cdots\times T_{n-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty}\mu_k((E^{(k)})')\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty}(1-\mu_k(E^{(k)})).\end{aligned}$$

当$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(E^{(k)})=\infty$时，由(22.25)知道

$$\prod_{k=n}^{\infty}(1-\mu_k(E^{(k)}))=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

因而$\mu(F')=0$；由此$\mu(F)=1$． □

定理(22.22)具有种种应用．例如，我们要用它来证明一个著名极限定理，它称为**强大数定律**．我们先介绍两个基本引理．

(22.27) **引理** 设$(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$是有极限的任意一个复数列；比如说$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta$. 则也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)=\beta.$$

证 给定$\varepsilon>0$，取n_0，使当$k>n_0$时

$$|\beta_k-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果$n>n_0$，那么

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k-\beta\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\beta_k-\beta|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|\beta_k-\beta|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|\beta_k-\beta|$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|\beta_k-\beta|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样，取n如此之大，使$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n_0}|\beta_k-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$，对于这样的$n$，便得到

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k-\beta\right|<\varepsilon.\quad\square$$

(22.28) **引理** 设(α_k)是一个复数列，并且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\alpha_k$收敛. 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=0.$$

证 命

$$s_0=0,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}a_k\quad (n\geqslant 1),$$

$$t_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\quad (n\geqslant 1).$$

按这一记法，则有

$$a_k=k(s_k-s_{k-1}),$$

因而

$$\begin{aligned}t_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n+1}k(s_k-s_{k-1})\\&=(n+1)s_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}ks_k-\sum_{k=2}^{n+1}ks_{k-1}\\&=(n+1)s_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}ks_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)s_k\\&=(n+1)s_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}s_k;\end{aligned}$$

即

$$t_{n+1}=(n+1)s_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}s_k\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

由此得到

$$\frac{1}{n+1}t_{n+1}=s_{n+1}-\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\right).$$

当n趋向于无穷大时，部分和s_{n+1}趋向于$\gamma\in K$，根据(22.27)，$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\right)$也趋向于$\gamma$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}t_{n+1}=0,$$

这就是所要证明的. □

(22.29) **定理：强大数定律** 命$\Gamma=N$. 对于每个$k\in N$，设g_k是$\mathfrak{L}_1(T_k, \mathscr{M}_k, \mu_k)$中的函数，而且

$$\int_{T_k} g_k d\mu_k = 0,$$

并假定

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \| g_k \|_2^2 < \infty$.

又设f_k是T上的函数，而且$f_k(t)=g_k(t_k)$. 则有

(ii) 对于几乎所有$t\in T$，$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right]=0$.

证 先证函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k}$$

在空间$\mathfrak{L}_2(T, \mathscr{M}, \mu)$中收敛. 如果$m<n$，则有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{k} \right\|_2^2 = \int_T \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f_k}{k} \right|^2 d\mu$$

$$= \sum_{j,k=m+1}^{n} \frac{1}{jk} \int_T f_j \bar{f}_k d\mu$$

$$= \sum_{j\neq k} \frac{1}{jk} \int_{T_j} g_j d\mu_j \int_{T_k} \bar{g}_k d\mu_k + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \int_{T_k} |g_k|^2 d\mu_k.$$

在写出最后等式时利用了(22.24.i). 根据题设，上面最后一个表达式的第一项为零，而根据(i)，当m和n趋向于∞时，第二项趋向于零. 由此得到

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{k} \right\|_2 = 0,$$

所以$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k}$的部分和组成$\mathfrak{L}_2(T, \mathscr{M}, \mu)$中一个Cauchy序列.

设h是$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k}$的$\mathfrak{L}_2$极限；那么$h$也属于$\mathfrak{L}_1$，定理(13.17)表明，$h$也是$\mathfrak{L}_1$和数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k}$，我们断言：

$$\int_T h d\mu = 0 .$$

为了证明这一断言，估值如下

$$\left|\int_T h d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_T \frac{1}{k} f_k d\mu + \int_T \left(h - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} f_k\right) d\mu\right|$$

$$\leqslant \left|\int_T \left(f_1 + \frac{1}{2} f_2 + \cdots + \frac{1}{n} f_n\right) d\mu\right|$$

$$+ \int_T \left| h - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} f_k \right| d\mu .$$

右端第一项等于零，当n趋向于∞时，第二项趋向于零．由此可见$\int_T h\, d\mu = 0$．现在利用定理(22.22)，对于几乎所有$t\in T$，可写出

$$0 = \int_T h d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{T_{\Omega_n'}} h d\mu_{\Omega_n} . \qquad (1)$$

〔要记住$\Omega_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，并注意到表达式$\int_{\Omega_n} h\, d\mu_{\Omega_n}$是$t$的函数，且不依赖于前$n$个坐标．〕我们有

$$\int_{T_{\Omega_n'}} h d\mu_{\Omega_n} = \int_{T_{\Omega_n'}} \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} f_k\right) d\mu_{\Omega_n}$$

$$+\int_{T_{\Omega_n}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k\right)d\mu_{\Omega}. \qquad (2)$$

右端第一个积分等于零，第二个积分中的被积函数不依赖于前n个坐标.〔注意到$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k$按照$\mathfrak{L}_1$度量收敛于$\mathfrak{L}_1$中的函数.〕积分

$$\int_{T_{\Omega_n}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k\right)d\mu_{\Omega}$$

显然等于函数$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k$；这样，（1）和（2）就表明，对于几乎所有$t\in T$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k(t)=0$$

这就是说，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k(t)$在$T$中a.e.收敛. 根据(22.28)，在$T$中a.e.成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f_1(t)+\cdots+f_n(t))=0.\square$$

(22.30) **例** T_n，μ_n和f_n就象(22.9)所设. 我们有$\|f_k\|_2^2=\frac{1}{4}$，因此满足了(22.29)的假设条件. 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1+\cdots+f_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(t_1-\frac{1}{2}\right)+\left(t_2-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(t_n-\frac{1}{2}\right)}{n}=0$$

a.e.成立：就是说

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}-\frac{1}{2}\right)=0$$

a.e.成立. 当上抛一个均匀硬币时，假如把得到正面或反面的事件分别看成0或1，那么上述结果说明了，在 n 次上抛中，对于几乎所有上抛序列所得到的正面（或反面）的频率，当 n 趋向于无穷大时趋向于 $\frac{1}{2}$. 这一结果要比(22.9)所获得的结果强得多.

以下是强大数定律的另一说法.

(22.31) **定理** 设 $\Gamma=N$，对于每个 $k\in N$，设 g_k 是 $\mathfrak{L}_1(T_k, \mathscr{M}_k, \mu_k)$ 中的函数. 记 $g_k=\varphi_k+i\psi_k$，其中 φ_k 和 ψ_k 都是实值的，并假定

(i) 对于任意实数 α，数 $\mu_k(\{t_k\in T_k: \varphi_k(t_k)>\alpha\})$ 和数 $\mu_k(\{t_k\in T_k: \psi_k(t_k)>\alpha\})$ 都与 k 无关.

又设 f_k 是 T 上的函数，而且 $f_k(\boldsymbol{t})=g_k(t_k)$. 则有

(ii) 对于几乎所有 $\boldsymbol{t}\in T$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k(\boldsymbol{t})\right]=\int_T f_1 d\mu.$$

证 一想便明白，不妨假定每个 g_k 皆为实函数，并且就这样假定. 对于每个 k，规定

$$f_k'(\boldsymbol{t})=\begin{cases} f_k(\boldsymbol{t}), & |f_k(\boldsymbol{t})|\leqslant k, \\ 0 & \text{其余}. \end{cases}$$

我们先证：对于几乎所有 $\boldsymbol{t}\in T$，存在一个（依赖于 $\boldsymbol{t}$ 的）正整数 m_0，使当 $m\geqslant m_0$ 时

$$f_m(\boldsymbol{t})=f_m'(\boldsymbol{t}). \tag{1}$$

在题设(i)下，对于每个 $\alpha\in R$，证明数值 $\mu_k(\{t_k\in T_k: |g_k(t_k)|>\alpha\})$ 不依赖于 k，这是一件很平凡的事情. 利用这一事实，则得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\boldsymbol{t} \in T : f_k(\boldsymbol{t}) \neq f'_k(\boldsymbol{t})\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\boldsymbol{t} \in T : |f_k(\boldsymbol{t})| > k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\{t_k \in T_k : |g_k(t_k)| > k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{n=k}^{\infty} \mu_1(\{t_1 \in T_1 : n < |g_1(t_1)| \leqslant n+1\}) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu_1(\{t_1 \in T_1 : k < |g_1(t_1)| \leqslant k+1\}) \\
&\leqslant \int_{T_1} |g_1| \, d\mu_1 < \infty. \qquad (2)
\end{aligned}$$

然后记

$$E^{(k)} = \{t_k \in T_k : |g_k(t_k)| > k\}, \quad E_k = E^{(k)} \times T_{\{k\}'}.$$

根据(2)式，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(E^{(k)})$ 必收敛，从而由Borel-Cantelli引理(22.26)推知

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E'_k\Big)\Big) = 1.$$

于是，几乎所有 $\boldsymbol{t} \in T$ 都具有这样的性质，即对于某个 n，$\boldsymbol{t} \in \bigcap_{k=n}^{\infty} E'_k$. 这正是断言(1).

由(1)便直接得出：对于几乎所有 $\boldsymbol{t} \in T$，成立

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(\boldsymbol{t}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f'_k(\boldsymbol{t}) \right] = 0. \qquad (3)$$

我们想把(22.29)应用于函数 $f'_k - \int_T f'_k d\mu$. 为了证实(22.29.

i)，只要证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left\|f_k'-\int_T f_k' d\mu\right\|_2^2<\infty \tag{4}$$

就可以了. 我们先写出

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left\|f_k'-\int_T f_k' d\mu\right\|_2^2 \\
&=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left[\int_T f_k'^2 d\mu-\left(\int_T f_k' d\mu\right)^2\right] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\int_T f_k'^2 d\mu.
\end{aligned} \tag{5}$$

然后对于每个$k\in N$，在T_1上规定函数h_k为

$$h_k(t_1)=\begin{cases} g_1(t_1), & |g_1(t_1)|\leqslant k, \\ 0 & \text{其余.} \end{cases}$$

由(i)和积分的原始定义(12.2)以及(12.21)，显然得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\int_T f_k'^2 d\mu=\int_{T_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}h_k^2\right)d\mu_1. \tag{6}$$

要证函数$w=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}h_k^2$属于$\mathfrak{L}_1(T_1)$. 试考虑适合$|g_1(t_1)|>0$的任意一点$t_1\in T$. 存在（唯一的）一个正整数$p$，满足

$$p-1<|g_1(t_1)|\leqslant p.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&h_1(t_1)=h_2(t_1)=\cdots=h_{p-1}(t_1)=0, \\
&h_p(t_1)=h_{p+1}(t_1)=\cdots=g_1(t_1),
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}h_k^2(t_1)$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} k^{-2} g_1^2(t_1) \leqslant |g_1(t_1)| \sum_{k=p}^{\infty} k^{-2} p。 \tag{7}$$

对于每个正整数 p，关系式

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} k^{-2} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+p)^2} = \frac{1}{p}$$

是显然成立的，由此得到

$$\sum_{k=p}^{\infty} k^{-2} p < \frac{1}{p} + 1 \leqslant 2. \tag{8}$$

结合(7)和(8)，可以看出

$$w \leqslant 2\,|g_1|.$$

既然根据题设$g_1 \in \mathfrak{L}_1(T_1)$，那么返回去看一下(5)和(6)这两步，便知道(4)确是成立的.

这样一来，函数$f'_k - \int_T f'_k d\mu$便满足了(22.29)的题设；结论(22.29.ii)在这里则取以下形式：对于几乎所有$t \in T$，

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f'_k(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_T f'_k d\mu \right] = 0。$$

鉴于(3)式，只要证明出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_T f'_k d\mu = \int_{T_1} f_1 d\mu_1, \text{①} \tag{9}$$

便完成了本定理的证明. 如果h_k如上所定义，则又有

$$\int_T f'_k d\mu = \int_{T_1} h_k d\mu_1, \tag{10}$$

①原文如此. 右端似应为$\int_T f_1 d\mu$. ——译者注

而(12.24)蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_1}h_k d\mu_1=\int_{T_1}g_1 d\mu_1=\int_T f_1 d\mu. \qquad (11)$$

由(10)，(11)及(22.27)便推出等式(9). □

(22.32) 习题 (a) 试证(22.29)的以下类似命题. 记号如(22.29)所设. 把条件(22.29.i)换成

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\|g_k\|_2^2<\infty,$$

其中$\alpha_k>0$，$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty$.，则无穷级数

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k f_k(t)$$

对于几乎所有$t\in T$收敛.

(b) 试证(22.29)的以下类似命题，它通常称为**弱大数定律**. 记号仍如(22.29)所设. 把(22.29.i)换成条件

$$\text{(iii)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_2^2\right]=0.$$

则对于任意$\varepsilon>0$，成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\{t\in T:\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k(t)\right|>\varepsilon\right\}\right)=0.$$

就是说，函数序列$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k\right)_{n=1}^{\infty}$依测度收敛于零.

(22.33) 习题 命

$$T_n=\{0,1,2,\cdots,r-1\},\ \mu_n(A)=\frac{1}{r}\overline{\overline{A}} \quad (n=1,2,\cdots).$$

对于固定的$l\in\{0,1,\cdots,r-1\}$以及乘积空间T中所有t，规

定

$$g_n(t)=\begin{cases}1, & t_n=l,\\ 0, & t_n\neq l.\end{cases}$$

试证：对于任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\{t\in T:\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g_k(t)-\frac{1}{r}\right|>\varepsilon\right\}\right)=0.$$

(22.34) **习题** 对于$x\in]0,1[$，某个固定的整数$r>1$，以及$l\in\{0,1,\cdots,r-1\}$，设$b_k(x)$是诸数$x_1,\cdots,x_k$中l的个数，这里

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}x_n,$$

$x_n\in\{0,1,\cdots,r-1\}$，而且对于无穷多个n，$x_n\neq 0$. 试证：对于（Lebesgue）几乎所有$x\in]0,1[$，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}b_k(x)=\frac{1}{r}.$$

〔这可由(22.31)推出.〕

(22.35) **说明和记号**① 我们现在介绍极限定理(20.56)的某个应用，它与以上所列举的多少有点不同. 和(22.16)及(22.17)一样，命$\Gamma=\{1,2,3,\cdots\}$，$\Omega_n=\{1,2,\cdots,n\}$，并设$\mathscr{M}^n$是集$A_{\Omega_n}\times T_{\Omega'_n}$全体所成的$\sigma$代数，其中$A_{\Omega_n}\in\mathscr{M}_{\Omega_n}$. 然后考虑$(T_n,\mathscr{M}_n)$上的两个测度$\mu_n$和$\eta_n$，它们满足

$$\mu_n(T_n)=\eta_n(T_n)=1,$$

并设μ和η分别是由测度μ_n和η_n产生的乘积测度.

以下基本结果涉及对于一切n都有$\eta_n\ll\mu_n$这一情况，建立了有关η和μ的一项值得注意的事实.

(22.36) **定理**（S.Kakutani） 记号如(22.35)所设.假定对

①小标题是译者加的. ——译者注

于一切n，$\eta_n \ll \mu_n$. 则或有

(i) $\eta \ll \mu$,

或有

(ii) $\eta \perp \mu$.

设f_n是$\mathfrak{L}_1^+(T_n, \mathscr{M}_n, \mu_n)$中的函数，并且对于一切$E_n \in \mathscr{M}_n$，都有

$$\text{(iii)} \qquad \int_{E_n} f_n d\mu_n = \eta_n(E_n),$$

也就是说，设f_n是(19.43)意义下的 Lebesgue-Radon-Nikodým 导数$\dfrac{d\eta_n}{d\mu_n}$. 则(i)成立的充要条件是

$$\text{(iv)} \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \left(\int_{T_k} f_k^{\frac{1}{2}} d\mu_k \right) > 0,$$

而(ii)成立的充要条件是

$$\text{(v)} \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \left(\int_{T_k} f_k^{\frac{1}{2}} d\mu_k \right) = 0.$$

证 正如(13.4)所说，我们首先看到

$$0 < \int_{T_k} f_k^{\frac{1}{2}} d\mu_k \leqslant \left[\int_{T_k} f_k d\mu_k \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{T_k} 1^2 d\mu_k \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \eta_k(T_k)^{\frac{1}{2}} \mu_k(T_k)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

所以(iv)和(v)中的无穷乘积肯定等于$[0,1]$中的某个数. 对于每个$n \in N$，试考虑有限乘积T_{Ω_n}以及$\mathscr{M}_{\Omega_n}$上的两个乘积测度$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$和$\eta_1 \times \cdots \times \eta_n$. 由(21.29)并施归纳于$n$，可推知

$$\eta_1 \times \cdots \times \eta_n \ll \mu_1 \times \cdots \times \mu_n,$$

而且函数

$$(t_1, t_2, \cdots, t_n) \rightarrow f_1(t_1) f_2(t_2) \cdots f_n(t_n) \qquad (1)$$

乃是$\eta_1\times\cdots\times\eta_n$关于$\mu_1\times\cdots\times\mu_n$的Lebesgue-Radon-Nikodým导数．其次考虑集$A_{\Omega_n}\times T_{\Omega_n'}$全体所成的$\sigma$代数$\mathscr{M}^{(n)}$，其中$A_{\Omega_n}\in\mathscr{M}_{\Omega_n}$．设$f^{(n)}$是$T$上的函数，它满足

$$f^{(n)}(\boldsymbol{t})=f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots f_n(t_n),$$

并设$\mu^{(n)}$和$\eta^{(n)}$分别是限制在σ代数$\mathscr{M}^{(n)}$上的测度μ和η．由（1）和(22.24.i)显然得出

$$\int_T f^{(n)}d\mu=\prod_{k=1}^{n}\int_{T_k}f_k d\mu_k=\prod_{k=1}^{n}\eta_k(T_k)=1 \qquad (2)$$

当$1\leqslant m<n$时，则有

$$f^{(n)}(\boldsymbol{t})f^{(m)}(\boldsymbol{t})=f_1^2(t_1)\cdots f_m^2(t_m)f_{m+1}(t_{m+1})\cdots f_n(t_n). \qquad (3)$$

由(21.29)容易明白$\eta^{(n)}\ll\mu^{(n)}$，而且$f^{(n)}$正是$\eta^{(n)}$关于$\mu^{(n)}$的Lebesgue-Radon-Nikodým导数．因而引用(20.56)可断定

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(\boldsymbol{t})=f(\boldsymbol{t}) \qquad (4)$$

对于μ几乎所有$\boldsymbol{t}\in T$是存在的，而且正是(20.53)意义下η关于μ的导数．

假定(v)成立，则应用(22.24.i)，(12.23)及(4)可写出

$$0=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{T_k}f_k^{\frac{1}{2}}d\mu_k\right)=\lim_{n\to\infty}\int_T(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}d\mu$$

$$\geqslant\int_T\lim_{n\to\infty}(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}d\mu=\int_T f^{\frac{1}{2}}d\mu. \qquad (5)$$

由(5)式推知$f=0$ μ-a.e.，从而(20.53)蕴涵$\eta\perp\mu$，这是因为η的μ绝对连续部分是由积分f所得到的．

不管$\prod_{k=1}^{\infty}\int_{T_k}f_k^{\frac{1}{2}}d\mu_k$的值如何，我们总可以计算如下．

当$m<n$时，利用(13.4)和(2)式可写出

$$\int_T\left|f^{(m)}-f^{(n)}\right|d\mu$$

$$=\int_T\left|(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}+(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}\right|\left|(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}-(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}\right|d\mu$$

$$\leqslant\left[\int_T\left|(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}+(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}\right|^2 d\mu\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left[\int_T\left|(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}-(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}\right|^2 d\mu\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[1+\int_T(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}d\mu\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left[1-\int_T(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}d\mu\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

又注意到(3)和(22.24.i)，则可写成

$$\int_T(f^{(m)})^{\frac{1}{2}}(f^{(n)})^{\frac{1}{2}}d\mu$$

$$=\int_{T_1}f_1 d\mu_1\times\cdots\times\int_{T_m}f_m d\mu_m\times\int_{T_{m+1}}f_{m+1}^{\frac{1}{2}}d\mu_{m+1}\times\cdots$$

$$\times\int_{T_n}f_n^{\frac{1}{2}}d\mu_n=\prod_{k=m+1}^{n}\int_{T_k}f_k^{\frac{1}{2}}d\mu_k. \tag{7}$$

结合(6)和(7)，便得到

$$\int_T|f^{(n)}-f^{(m)}|\,d\mu\leqslant 2\left[1-\left(\prod_{k=m+1}^{n}\int_{T_k}f_k^{\frac{1}{2}}d\mu_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

当(iv)成立时，显然有

$$\lim_{m,n\to\infty}\prod_{k=m+1}^{n}\left(\int_{T_k}f_k^{\frac{1}{2}}d\mu_k\right)=1.$$

因此(8)式说明$(f^{n})_{n=1}^{\infty}$乃是$\mathfrak{L}_1(T,\mathscr{M},\mu)$中的Cauchy序列，然后借助于(20.58)和(20.57)便得出结论

$$\eta \ll \mu.$$① □

(22.37) **评注** 记号如(22.35)所设. 假如并非所有η_n都关于μ_n绝对连续，那么η不会关于μ绝对连续，但是它仍然可能具有很大的绝对连续部分. 假定对于某个$l \in N$，我们有

(i) $\eta_l = \alpha_l \rho_l + (1 - \alpha_l)\sigma_l$,

其中ρ_l和σ_l是$(T_l, \mathscr{M}_l)$上两个测度，并且$\rho_l(T_l) = \sigma_l(T_l) = 1$，$\rho_l \ll \mu_l$，$\sigma_l \perp \mu_l$，而$0 \leqslant \alpha_l < 1$. 如果$\alpha_l = 0$，就是说如果$\eta_l \perp \mu_l$，那么(21.29)表明$\eta \perp \mu$. 否则，在空间$T\{l\}'$上设$\eta'$是所有$\eta_k$ $(k \neq l)$的乘积. 不难看出

$$\eta = \alpha_l(\rho_l \times \eta') + (1 - \alpha_l)(\sigma_l \times \eta').$$

当$(\sigma_l \times \eta') \perp \mu$时，$\eta$就不会关于$\mu$绝对连续，但是对于$\rho_l \times \eta'$来说，可能关于$\mu$是奇异的、关于$\mu$是绝对连续的或者是"混合的". 就任意$l \in N$而言，按照分解(i)，可以给出$\eta$的精确描述：我们把细节留给感兴趣的读者.

(22.38) **习题** 记号如(22.35)所设. 对于任意$n \in N$，命$T_n = \{0, 1\}$. 又设α是其值在$]0, 1[$中的一个序列$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$，$\mu_\alpha$是$(T, \mathscr{M})$上的测度，它是$\{0, 1\}$上诸测度$\mu_n$的乘积，这里规定$\mu_n(\{0\}) = \alpha_n$，$\mu_n(\{1\}) = 1 - \alpha_n$. 假定$\alpha$和$\beta$是任意两个这样的序列.

(a) 试证以下两个断言必居其一：

(i) $\mu_\alpha \ll \mu_\beta$及$\mu_\beta \ll \mu_\alpha$;

或

(ii) $\mu_\alpha \perp \mu_\beta$.

并证明(i)成立的充要条件是

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \alpha_n^{\frac{1}{2}} \beta_n^{\frac{1}{2}} - (1-\alpha_n)^{\frac{1}{2}}(1-\beta_n)^{\frac{1}{2}}\right) < \infty,$$

而(ii)成立的充要条件是

---

①请读者考虑必要性的证明. ——译者注

(iv) (iii)中的级数发散.

〔提示. 把(22.36)应用于测度μ_α和μ_β. 各个因子测度显然关于其他每一个都是绝对连续的，而且$f_n^{\frac{1}{2}}$在T_n上的积分等于

$$\alpha_n^{\frac{1}{2}}\beta_n^{\frac{1}{2}}+(1-\alpha_n)^{\frac{1}{2}}(1-\beta_n)^{\frac{1}{2}}.$$

然后应用(22.29). 不论把μ_α和μ_β中哪一个看作(22.35)中的μ都没有什么关系. 〕

(b) 假定对于某个$\delta>0$, 不等式$\delta\leqslant\alpha_n\leqslant 1-\delta$和$\delta\leqslant\beta_n\leqslant 1-\delta$对于任意$n\in N$都成立. 试证(iii)成立的充要条件是

(v) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)^2<\infty.$$

〔提示. 利用恒等式

(vi) $$1-\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}-(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left((1-\alpha)^{\frac{1}{2}}-(1-\beta)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

以及微分学中值定理. 〕

(c) 假定β_n为常数：对于某个$\beta\in]0,1[$, $\beta_n=\beta$. 试证明：(iii)成立的充要条件是(v)成立. 〔提示　当$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\beta$时，可以应用(b)小题. 否则，(vi)表明(iii)中级数的项并不具有极限0. 〕

(22.39) **习题** 试证存在$(R, \mathscr{B}(R))$上的测度所成的一个集$\boldsymbol{S}$，它具有以下性质：

(a) 对于任意$\sigma\in\boldsymbol{S}$, $\sigma(R)=1$;

(b) 每个$\sigma\in\boldsymbol{S}$是正则的；

(c) 每个$\sigma\in\boldsymbol{S}$是连续的；

(d) 每个σ具有支集，即区间$[0,1]$;

(e) 对于$\boldsymbol{S}$中不同的σ和σ', $\sigma\perp\sigma'$;

(f) $\overline{\overline{\boldsymbol{S}}}=\mathfrak{c}$.

〔提示. T如(22.38)所设，并设

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}t_k \qquad (t\in T).$$

映射φ把T映满〔0，1〕. 对于每个数$\gamma\in$〕0，1〔，设μ_γ是如同(22.38)一样，由常数序列(γ, γ, γ, …)所构造的T上的测度. 当$\gamma\neq\gamma'$时，μ_γ和$\mu_{\gamma'}$显然是互相奇异的. 对于$\gamma\in$〕0，1〔，设σ_γ是如同(12.45)和(12.46)一样由T上的测度μ_γ和连续映射φ所构造的〔0，1〕上的测度. 可以把$\{\sigma_\gamma:\ \gamma\in$〕0，1〔$\}$当作测度集$\boldsymbol{S}$，这是很容易验明的. 〕

(22.40) **习题** 可以不依靠Kakutani定理(22.36)来构造一个$\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$上的测度集$\boldsymbol{S}_1$，它具有$\boldsymbol{S}$的除支集是〔0，1〕以外的全部性质〔见(22.39)〕. 试补上以下构造梗概的细节. 命$T=\{0,1\}^N$，并考虑如同(22.39)一样的(T, $\mathscr{M}$)上的测度$\mu_{\frac{1}{2}}$. 对于每个$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots)\in T$，设$\varphi_{\boldsymbol{u}}$是把$T$映入〔0，1〕的映射，它由下式给出：

$$\varphi_{\boldsymbol{u}}(t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{3^{2k}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{3^{2k-1}}.$$

对于$A\in\mathscr{B}(R)$，命

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}(A)=\mu_{\frac{1}{2}}(\varphi_{\boldsymbol{u}}^{-1}(A\cap\varphi_{\boldsymbol{u}}(T))).$$

那么测度集$\boldsymbol{S}_1=\{\sigma_{\boldsymbol{u}}:\ \boldsymbol{u}\in T\}$便具有所断言的全部性质.

(22.41) **习题** 考虑如(22.39)所构造的测度$\sigma_{\frac{1}{2}}$. 试证$\sigma_{\frac{1}{2}}$是〔0，1〕上的Lebesgue测度.

(22.42) **习题** (a) 按以下方式改变(22.39)的结构. T和μ_γ如(22.38)和(22.39)所设，但规定把T映入$\boldsymbol{R}$的映射φ为

$$\varphi(t)=2\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}t_k.$$

对于$\gamma\in$〕0，1〔，如同(12.45)和(12.46)一样设τ_γ是μ_γ在φ下的象. 试证：每个τ_γ的支集是Cantor三分点集. 并证$\tau_{\frac{1}{2}}$是相当于Lebesgue奇异函数的Lebesgue-Stieltjes测度. 〔参看(8.28)〕.

(b) 试证 $\int_{[0,1]} x\,d\tau_\gamma(x)=1-\gamma$.〔提示. 下列各步是不难检验的:

$$\int_{[0,1]} x\,d\tau_\gamma(x)$$

$$=\int_T\left(2\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}t_k\right)d\mu_\gamma(t)=2\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}\int_T t_k\,d\mu_\gamma(t)$$

$$=2(1-\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}=1-\gamma.〕$$

(c) 试证

$$\int_{[0,1]} x^2\,d\tau_\gamma(x)=2^{-1}(1-\gamma)+2^{-1}(1-\gamma)^2.$$

〔提示. 可作如下计算:

$$\int_{[0,1]} x^2\,d\tau_\gamma(x)=4\int_T\left(\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}t_k\right)^2 d\mu_\gamma(t)$$

$$=4\Big[\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k}\int_T t_k\,d\mu_\gamma(t)+2\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=l+1}^{\infty}3^{-k-l}$$

$$\int_T t_k t_l\,d\mu_\gamma(t)\Big)\Big]$$

$$=4\left[(1-\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k}+2(1-\gamma)^2\sum_{l=1}^{\infty}3^{-2l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-\gamma)+\frac{1}{2}(1-\gamma)^2.〕$$

(d) 试证

$$\int_{[0,1]} x^3\,d\tau_\gamma(x)=\frac{8}{26}\left[(1-\gamma)+\frac{15}{8}(1-\gamma)^2+\frac{3}{8}(1-\gamma)^3\right].$$

(22.43) **习题** 记号如(22.42)所设.(a) 设α是任意一个复数. 试证

$$\int_{[0,1]}\exp(\alpha x)d\tau_\gamma(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\gamma+(1-\gamma)\exp(3^{-k}2\alpha)\right).$$

(b) 试证: 对于任意$p\in N$, 成立

(i) $$\int_{[0,1]}\exp(2\pi i3^p x)d\tau_\gamma(x)$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\gamma+(1-\gamma)\exp(4\pi i3^{-k})\right).$$

(c) 试证: 当$\gamma=\frac{1}{2}$时,(i)的值等于一正实数.试问: 如果γ取$]0, 1[$中的其他值会怎样呢?

(22.44) **习题** (a) 试按以下方式推广(22.42)的结果. 设a是区间$]-1, 1[$内任意一个数. 规定把T映入R内的映射φ为

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a^k t_k.$$

如同(12.45)一样, 设ω_γ是μ_γ在φ下的象. 这样, 对于R上每个连续的f, 便有

$$\int_R f d\omega_\gamma=\int_T f\circ\varphi d\mu_\gamma.$$

命$\Delta_n=\int_R x^n d\omega_\gamma(x)$ ($n=0,1,2,\cdots$).试证$\Delta_0=1$,并且

(i) $$\Delta_n=\frac{a^n(1-\gamma)}{1-a^n}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\Delta_{n-j}\right).$$①

[提示. 对于$n\in N$, 我们有

$$(\varphi(t))^n=a^n\left(t_1+\sum_{k=2}^{\infty}a^{k-1}t_k\right)^n$$

---

①承蒙R.M.Blumenthal教授惠赠了这一递推公式.

$$=a^n\left[\left(\sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}t_k\right)^n+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}t_1\left(\sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}t_k\right)^{n-j}\right],$$

这是因为$t_1^2=t_1$. 在T上积分，便得到

$$\Delta_n=a^n\left[\int_T\left(\sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}t_k\right)^n d\mu_\gamma(\boldsymbol{t})\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\int_T t_1\left(\sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}t_k\right)^{n-j} d\mu_\gamma(\boldsymbol{t})\right]$$

$$=a^n\left[\Delta_n+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(1-\gamma)\Delta_{n-j}\right].$$

由此便直接得出(i). 〕

(b) 就 $a=\gamma=\dfrac{1}{2}$的情况，(22.41)表明在〔0， 1〕上成立

$$\omega_{\frac{1}{2}}=\sigma_{\frac{1}{2}}=\lambda.$$

这时，试直接计算Δ_n，并验证公式(i).

(c) τ_γ如(22.42)所设，并记

$$\Delta'_n=\int_{[0,1]}x^n d\tau_\gamma(x)\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

试证$\Delta'_0=1$，并且

(ii) $$\Delta'_n=\frac{1-\gamma}{3^n-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}2^j\Delta'_{n-j}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

(22.45) 习题 (H.S.Zuckerman). 记号如(22.44)所设. 为了简便起见，把$\dfrac{a^n(1-\gamma)}{1-a^n}$写成$b_n$.

(a) 试证：当$n\geqslant1$时

(i) $$\Delta_n=b_n\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}{}'\frac{n!}{(n-i_1)!(i_1-i_2)!\cdots(i_{k-1}-i_k)!i_k!}\right.$$

$$\cdot b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k} \Big\},$$

式中和数Σ'是遍及适合$n > i_1 > i_2 > \cdots > i_k > 0$的一切$k$元正整数组$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$来取的.

〔提示. 把(22.44.i)改写成以下形式

$$\varDelta_n = b_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \varDelta_j,$$

并注意到

$$\frac{n!}{(n-i_1)!(i_1-i_2)!(i_2-i_3)!\cdots(i_{k-1}-i_k)!i_k!}$$

$$= \binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2}\cdots\binom{i_{k-1}}{i_k},$$

然后施归纳于n. 〕

(b) 试证：当$n \geqslant 1$时,

(ii) $$\varDelta_n = \sum_{k=1}^{n} \sum{}'' \frac{n!}{j_1! j_2! \cdots j_k!} b_{j_1+j_2+\cdots+j_k}$$

$$\cdot b_{j_2+j_3+\cdots+j_k} b_{j_3+j_4+\cdots+j_k} \cdots b_{j_k},$$

这里和数Σ''是遍及适合$j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$的一切$k$元正整数组$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$来取的. 〔提示. 改写(i). 〕

记号索引

（本索引中的数字表示正文中的节段号．如(4,2)指第四节第二段）

$\mathscr{A}_B$ (11.22)
arg, Arg (5.51)
card$N$ (4.2)
ω_1 (4.50)
$a \cdot f$ (18.47)

$\mathscr{B}(X)$ 〔Borel集〕(10.19)
$\mathfrak{B}(X)$ (7.3)
$\mathfrak{B}(H)$ (16.40)
$B_\varepsilon(x)$ 〔ε邻域〕(6.14)
$\mathfrak{B}(A, B)$ (14.4)

$\mathfrak{c}$ (4.2)
$c_0(D)$ (14.25)
$\mathfrak{C}(X)$ (7.8)
$\mathfrak{C}_0(X)$, $\mathfrak{C}_{00}(X)$ (7.12)

D_1, D_2 (17.36)
D_n 〔Dirichlet核〕(18.27)
D^+, D_+, D^-, D_- (17.2)
$\mathscr{D}([a, b])$ (8.2)
diam (6.51)
dist (7.44)
domf 〔定义域〕(2.3)
δ_{xy} 〔Kronecker δ 记号〕(2.20)
Δ 〔对称差〕(1.10)

E_a 〔$E_a(f)=f(a)$〕(9.2)
$\mathscr{E}_\Omega$ (22.2)
exp 〔指数函数〕(5.56)
ε_a 〔$\varepsilon_a(A)=\xi_A(a)$〕(9.19), (9.20)
η_a, η_s (20.53)

F_σ (6.55)
$\mathbf{F}(X, \mathscr{A}, \mu)$ (20.27)

G_δ (6.55)

I 〔$\mathfrak{C}_{00}$上的非负线性泛函〕(9.1)
$\bar{I}$ (9.8)
$\bar{\bar{I}}$ (9.15)
I_m 〔虚部〕(5.42)
inf (5.32), (6.57), (7.1)
ι 〔$\iota(A)=\bar{\bar{I}}(\xi_A)$〕(9.19)

ι_a, ι_s (19.61)

ι_c, ι_d (19.57)

K 〔复数〕 (1.2)

K^* (3.3)

K_n 〔Fejér核〕(18.27)

L 〔Lebesgue积分〕 (12.2)

l_p, $l_p(D)$ (13.13)

$l_\infty(D)$ (14.26)

$\mathfrak{L}_1$ (12.26)

$\mathfrak{L}_1'$ (12.18)

$\mathfrak{L}_p$ (13.1)

$\mathfrak{L}_\infty$ (20.14)

$\mathfrak{L}_\Phi$ (13.36)

$\mathfrak{L}\log^+\mathfrak{L}$ (13.37)

$L(f, \alpha, \Delta)$ 〔Darboux和〕 (8.3)

$\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ (6.83), (17.1)

$\mathfrak{Lip}_\alpha$ (17.31)

λ 〔Lebesgue测度〕 (9.19)

λ_α (9.19)

$\mathscr{M}_\Delta$, $\mathscr{M}$ (22.2)

$\mathscr{M}_\iota$, 〔ι可测集〕 (10.6)

$\mathscr{M}_\lambda$ 〔Lebesgue可测集〕 (10.6)

$\mathscr{M}_\mu$ 〔μ可测集〕 (10.5)

$m(D)$ (14.26)

$\mathfrak{M}(X)$ (7.20)

$\boldsymbol{M}(X)$ (20.41)

$\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$ (2.7)

$\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ (7.1)

μ_E (11.37)

N 〔正整数〕 (1.2)

$\mathscr{N}_\Delta$, $\mathscr{N}$ (22.2)

$\mathfrak{N}(X)$ (7.20)

ord A (4.40)

ω (4.41)

Ω (4.49)

Ω 〔$\subset\Gamma$〕 (22.2)

p' $\left[=\dfrac{p}{p-1}\right]$(13.3)前

$\mathscr{P}(A)$ 〔A的子集全体〕 (1.4)

Q 〔有理数〕 (1.2)

R 〔实数〕 (1.2)

R^n (3.3)

R^* 〔广义实数〕 (6.1)

R_d 〔离散实数〕 (6.5)

Re 〔实部〕 (5.42)

$\text{rng} f$ 〔值域〕(2.3)

$\mathfrak{S}$ 〔简单函数〕(12.1)前
$\mathscr{S}(\mathscr{E})$ (10.19)
$S(f)$ 〔Riemann积分〕(8.15)
$S(f;[a,b])$ (8.6)
$S_a(f)$ (8.12)
$S_a(f;[a,b])$ (8.6)
sgn 〔正负号函数〕(5.56)
$s_n f$ (18.27)
$\sigma_n f$ (18.27)
sup (5.32), (6.57), (7.1)

T_Δ, T (22.2)

$U(f,a,\Delta)$ 〔Darboux和〕(8.3)

V_a^b 〔全变差〕(17.14)

X_δ, R_δ (6.5)
ξ_B 〔特征函数〕(2.20)

Z 〔整数〕(1.2)

$\varnothing$ 〔空集〕(1.2)

$g \circ f$ (2.4)

$f * g$ (21.31)-(21.33), (21.56)
$A \sim B$ (4.1)
$A \approx B$ (4.40)
$f \leqslant g$ (7.1)
$\nu \ll \mu$ (19.19)
$\nu \perp \mu$ (19.39)
$x \perp y$, $E \perp F$, $x \perp F$ (16.9)
$x + A$ 〔$= \{x + y : y \in A\}$〕(10.26)
$A + B$ 〔$= \{x + y : x \in A, y \in B\}$〕(10.26)
$A - B$ 〔$= \{x - y : x \in A, y \in B\}$〕(10.26)
$\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ (21.2)
$X \times Y$ 〔Cartesian乘积〕(2.1)
$\mu \times \nu$ (21.9)

$\|x\|$ (7.5)
$\|x\|$ $\left[= \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\right]$ (13.16), (16.3)
$\|f\|_u$ (7.3)
$\|f\|_p$ (13.1)
$\|g\|_\infty$ (20.11)
$\|f\|_\Phi$ (13.36)
$\|x + M\|$ 〔E/M上的范数〕(14.38)
$\|T\|$ (14.1)
$\|\mu\|$ (20.43)
$\|\tau\|$ (20.27)

$|\nu|$ 〔全变差〕 (19.7), (19.11)

$\langle x,y\rangle$ (13.16), (16.1)

$\langle f,g\rangle$ (13.15)

$\overline{A}$ 〔基数〕(4.1)

$\overline{f}$ (7.1)

$\hat{f}$ (21.38)

$\hat{f}(n)$ (16.15)

$\tilde{f}$ 〔$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$〕 (21.51)

$M^{\perp}$ (16.42)

T^* 〔伴随算子〕(14.34), (16.40)

E^*, E^{**} 〔共轭空间〕(14.6)

f^+ 〔$=\max\{f, 0\}$〕 (12.2)

f^- 〔$=-\min\{f, 0\}$〕 (12.2)

$f^{\bigstar}$ 〔$f^{\bigstar}(x)=f(-x)$〕 (8.14)

f', f'_+, f'_- (17.4)

$f^{[y]}$ 〔$f^{[y]}(x)=f(x, y)$〕 (21.2)

$f^{\Delta}, f^{\Delta(r)}, f^{\Delta(l)}$ (21.74)

$\mathfrak{F}^r$ 〔$\mathfrak{F}$中的实值函数〕 (7.1)

$\mathfrak{F}^+$ 〔$\mathfrak{F}$中的非负实函数〕 (7.1)

E^y (21.2)

A° 〔内部〕 (6.6)

A' 〔A的余集〕 (1.8)

A^- 〔闭包〕 (6.6)

A^n (3.3)

A^I (3.3)

ν^+, ν^- (19.7)

f_t 〔$f_t(x)=f(x+t)$〕 (8.14)

$f_{[x]}$ 〔$f_{[x]}(y)=f(x,y)$〕 (9.41), (21.2)

E_x (21.2)

$(X,\mathscr{A})$ (11.1)

$(X, \mathscr{A},\mu)$ (10.3)

$-A$ 〔$=\{-x : x\in A\}$〕 (10.26)

$f(a+)$, $f(b-)$ (8.18)

$\binom{\alpha}{n}$ 〔二项式系数〕 (7.25)

∞, $-\infty$ (6.1)

(x_n) 〔序列〕 (2.18)

$\times_{\iota\in I} A_\iota$ 〔Cartesian乘积〕 (3.1)

$d\nu=f_0 d\mu$, $\nu=f_0\mu$ (19.43)

$\frac{d\nu}{d\mu}$ (19.43)

$\int_X f(x)d\mu(x)$	$\left[=\int_X fd\mu=\int fd\mu\right]$ (12.18), (19.17)	$\int_E fd\mu$	$\left[=\int_X \xi_E fd\mu\right]$ (12.31)
	(20.29)	$\rightarrow$	(2.17)
$\int_a^b f(x)dx$	$\left[=\int_{[a,b]} fd\lambda\right]$ (12.18)	$[a, b]$, $]a, b[$ 等	(6.1)
		$\square$	[证毕] (1.6)

人名与术语索引

（本索引中的数字表示正文中的第段号．如(5.1)
指第五节第一段）

以外文字母起首的人名及复合词

Abel可和性(Abel summability)

Fourier级数的～(Abel summability of Fourier series) (18.47)

Abel核(Abel's kernel) (21.45)

Abel群(Abelian group) (5.1)

Abel, N. H.(5.1)

Alexander次基定理(Alexander's subbase theorem) (6.40)

Archimedes 有序域(Archimedean ordered field) (5.17)

完备～(complete Archimedean ordered field) (5.33)

非～(non-Archimedean ordered field) (5.39)

arg(幅角) (5.51)

𝔅′(R)

～上的不变平均(invariant mean on 𝔅′(R)) (20.40)

Baire范畴定理(Baire category theorem) (6.54) (6.91)

Baire函数(Baire functions) (11.46)

α型～(Baire functions of type α) (11.46)

Baire集(Baire sets) (11.46)

Banach-Steinhaus 定理(Banach-Steinhaus theorem) (14.24)

Banach不动点定理(Banach's fixed-point theorem) (6.88)

Banach代数(Banach algebra) (7.7)

Banach空间(Banach space) (7.7)

～的共轭(Conjugate of a Banach space) (14.6)

~的乘积(products of Banach spaces) (14.19), (14.36)
~的商空间(quotient spaces of Banach space) (14.38)
一致凸~(uniformly convex Banach space) (15.16)
一致圆~(uniformly rotund Banach space) (15.16)
自反~(reflexive Banach space) (14.15)
局部一致凸~(locally uniformly covex Banach space) (15.17)
Banach指标(Banach indicatrix)
函数的~(Banach indicatrix of a function) (17.34)
Banach, S. (6.101), (10.29), (14.16), (17.8), (17.11), (18.25)
Bernstein, F. (10.54)
Bessel不等式(Bessel's inequality) (16.17)
Birkhoff, G. (1.14)
Birnbaum-Orlicz空间(Birnbaum-Orlicz spaces) (13.36)
Bohnenblust, H. F. (14.12)
Bolzano (6.44)
Bolzano-Weierstrass性质(Bolzano-Weierstrass property) (6.30)
Boole, G.(1.14)
Boole代数(Boolean algebra) (1.14)
Boole环(Booleam ring) (1.14)
Borel, E. (6.44)
Borel-Cantelli引理(Borel-Cantelli lemma) (22.26)
Borel可测函数(Borel measurable function) (11.2), (12.63)
Borel测度(Borel measures) (19.45)前
R上的正则~(regular Borel measures on R) (19.45)前
复正则~(complex regular Borel measures) (20.41)
Borel集(Borel sets) (10.19)
乘积空间中的~(Borel sets in product spaces) (21.19), (21.20)

Bunyakovskiǐ不等式(Bunyakovskiǐ's inequality) (13.4)

$\mathfrak{C}_0(X)$
~的共轭空间(conjugate space of $\mathfrak{C}_0(X)$) (20.48)
~中的理想(ideals in $\mathfrak{C}_0(X)$)(20.52)
Cantor-Bendixson定理(Cantor-Bendixson theorem) (6.66)
Cantor 三分点集(Cantor ternary set) (3.4), (6.62)
Cantor型集(Cantor-like set) (6.62)
Cantor, G. (4.10), (6.52)
Carathéodory, C. (10.2), (10.5)
Cartesian乘积(Cartesian product)
两个集的~(Cartesian product of two sets) (2.1)
拓扑空间的~(Cartesian product of topological spaces) (6.41)
集族的~(Cartesian product of a family of sets) (3.1)
Cauchy-Bunyakovskiǐ-Schwarz不等式(Cauchy-Bunyakovskiǐ-Schwarz inequality) (16.2)
Cauchy不等式(Cauchy's inequality) (13.4)
Cauchy序列(Cauchy sequence) (5.19), (6.46)
Čech, E. (6.43)
Cesàro可和性(Cesàro summability)
Fourier级数的~(Cesàro summability for Fourier series) (18.28)
Clarkson, J. A. (15.13)
Clarkson 不等式(Clarkson's inequality)
$2\leqslant p<\infty$时的~(Clarkson's inequality for $2\leqslant p<\infty$) (15.5)
$1<p<2$时的~(Clarkson's inequality for $1<p<2$) (15.8)
Cohen, P. J. (3.2), (4.50)

Daniell, P. J. (9.1)前
Darboux和(Darboux sums) (8.3)

De Morgan律(De Morgan's laws) (1.9)
Dedekind, R. (4.13)
Dedekind分划(Dedekind cut)
  有序域中的～(Dedekind cut in an ordered field) (5.38)
δ(delta)
  Kronecker δ记号(Kronecker delta) (2.20)
Denjoy积分(Denjoy integral) (18.42)
Dini导数(Dini derivates) (17.2)
Dini定理(Dini's theorem) (13.40)
Dirac测度(Dirac measure) (9.19)
Dirichlet核(Dirichlet kernel) (18.27)
Doob, J. L.(20.60)
Dunford, N.(14.1)前

Egorov定理(Egorov's theorem) (11.32)
ε邻域(ε-neighborhood) (6.14)
Euclid度量(Euclidean metric) (6.13)
Euclid空间(Euclidean space)
  n维～(Euclidean n-space) (3.3)
exp(指数函数) (5.56)

F_σ集(F_σ set) (6.55)
f归纳族(f-inductive family) (3.12)
Fatou引理(Fatou's lemma) (9.39), (12.23)
Fejér, L.(18.27)
Fejér-Lebesgue定理(Fejér-Lebesgue theorem) (18.29)
Fejér核(Fejér's kernel) (18.27), (21.45)
Flett, T. M. (21.82)
Fourier级数(Fourier series) (16.26), (18.27)
  ～的Abel可和性(Abel summability of Fourier series) (18.47)

~的Cesàro可和性(Cesàro summability for Fourier series) (18.28)

~的一致可和性(uniform summability of Fourier series) (18.44)

~的算术平均(arithmetic means for a Fourier series) (18.27)

发散~(divergent Fourier series) (18.45)

Fourier系数(Fourier coefficients) (16.14), (16.33)

Fourier变换(Fourier transform) (16.33), (21.38)

$\mathfrak{L}_2$上的~(Fourier transform on $\mathfrak{L}_2$) (21.53)

~的反演(inversion of Fourier transform) (21.49)

~的唯一性定理(uniqueness theorem for the Fourier transform) (21.47)

Fourier积分的可和性(summability of Fourier integrals) (21.43)

Fréchet 紧空间(Fréchet compact space) (6.30)

Fubini, G. (17.18)

Fubini定理(Fubini's theorem) (21.12), (21.13)

G_δ集(G_δ-set) (6.55)

Gauss核(Gauss's kernel) (21.45)

Gram-Schmidt正规正交化方法 (Gram-Schmidt orthonormalization process) (16.22)

Hahn-Banach定理(Hahn-Banach theorem) (14.9)

Hahn分解(Hahn decomposition) (19.4)

Hahn分解定理(Hahn decomposition theorem) (19.6)

Halmos, P. (1.1)

Hamel基(Hamel basis) (3.18)

Hamilton, Sir W. R. (7.45)

Hardy-Littlewood极大定理(Hardy-Littlewood maximal theorem) (21.76), (21.77), (21.80)

Hardy, G. H.(17.7), (21.74)前
Hausdorff极大性原理(Hausdorff maximality principle) (3.9)
Hausdorff空间(Hausdorff space) (6.6)
Hausdorff测度(Hausdorff measure) (10.49)
Hausdorff维数(Hausdorff dimension) (10.49)
Heine-Borel-Bolzano-Weierstrass定理(Heine-Borel-Bolzano-Weierstrass theorem) (6.44)
Heine-Borel定理(Heine-Borel theorem) (6.44)
Hermite多项式(Hermite polynomials) (16.25)
Hermite函数(Hermite functions) (16.25)
～的完全性(completeness of the Hermite functions) (21.64)
正规化～(normalized Hermite functions) (16.25)
Hewitt, E. (10.29), (16.38), (21.1), (22.24)
Hewitt, M. (4.62)
Hilbert超平行体(Hilbert parallelotope) (16.49)
Hilbert空间(Hilbert space) (13.16)(16.7)
～上的有界线性泛函(bounded linear functional on a Hilbert space) (16.31), (16.55)-(16.58)
～中的射影(projections in a Hilbert space) (16.47)
～的正交维数(orthogonal dimension of a Hilbert space) (16.28)
准～(pre-Hilbert space) (13.16)
Hirschman JR., I. I. (16.38)
Hölder不等式(Hölder's inequality)
$1<p<\infty$时的～(Hölder's inequality for $1<p<\infty$) (13.4)
$0<p<1$时的～(Hölder's inequality for $0<p<1$) (13.6)
广义～(generalized Hölder's inequality) (13.26)
Holladay, J. C. (7.45)
Hopf开拓定理(Hopf's extension theorem) (10.36)

Huntington, E. V. (1.14)

Jensen不等式(Jensen's inequalities) (13.34)
Jessen, B. (20.60), (20.65), (22.14), (22.17), (22.22)
Jewett, R. I. (7.44)
Jordan分解(Jordan composition)
广义测度的～(Jordan composition of a signed measure) (19.8)
有限加性广义测度的～(Jordan composition of a finitely additive signed measure) (19.63)
复测度的～(Jordan composition of a complex measure) (19.13)
Jordan分解定理(Jordan composition theorem) (17.16)
Jordan容度(Jordan content) (9.25)
Jordan, C.(9.25)

Kakutani, S.(10.29), (22.36)
König定理 (König's theorem) (4.39)
KreÏn开拓定理(KreÏn's extension theorem) (14.27)
Kronecker δ记号(Kronecker'a delta) (2.20)

Leach, E. B. (15.14)
Lebesgue-Radon-Nikodým导数(Lebesgue-Radon-Nikodým derivative) (19.43)
Lebesgue-Radon-Nikodým定理(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem)(19.23), (19.24)
关于可分解测度的～(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for decomposable measures) (19 27)
关于正则测度的～(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for regular measures) (19.32)
关于复测度的～(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for

complex measures) (19.36)
有关～的例题(examples concerning Lebesgue-Radon-Nikodým theorem) (19.71)
Lebesgue-Stieltjes外测度(Lebesgue-Stieltjes outer measures) (9.19)
Lebesgue-Stieltjes测度(Lebesgue-Stieltjes measures) (19.47)
Lebesgue-Stieltjes积分(Lebesgue-Stieltjes integrals)
关于～的分部积分法(integration by parts for Lebesgue-Stieltjes integrals) (21.67)
Lebesgue
～分解定理(Lebesgue decomposition theorem) (19.42)
～奇异函数(Lebesgue singular function) (8.28)
～和(Lebesgue sums) (12.48)
～控制收敛定理(Lebesgue's dominated convergence theorem) (12.24), (12.30), (12.57)
～微分定理(Lebesgue differentiation theorem) (17.12)
可分解测度的～分解(Lebesgue decomposition for decomposable measures) (19.77)
函数的～点(Lebesgue points for a function) (18.6)
函数的～集(Lebesgue set for a function) (18.6)
测度的～定义(Lebesgue definition of measure) (9.25)
Lebesgue可测函数(Lebesgue measurable function) (11.2)
Lebesgue可测集(Lebesgue measurable sets)(10.6)
Lebesgue外测度(Lebesgue outer measure) (9.19)
Lebesgue测度(Lebesgue measure)
～的开拓(extensions of Lebesgue measure) (10.29)
～的不变开拓(invariant extension of Lebesgue measure) (20.40)
～的唯一性(uniqueness of Lebesgue measure) (12.56)
Lebesgue积分(Lebesgue integral) (12.2)
～的线性(linearity of the Lebesgue integral) (12.12)

关于～的微积分学基本定理(fundamental theorem of the integral calculus for Lebesgue integral) (18.16)
作为Riemann积分的开拓的～(Lebesgue integral as an extension of the Riemann integral) (12.51)
Lebesgue, Henri (8.28), (9.25), (11.31), (12.21), (17.12), (17.17), (18.4), (18.5), (18.29)
Levi, B.(12.22)
Levi定理(Levi's theorem)
广义～(generalized Levi theorem) (9.17)
Levi定理(Levi's theorem) (12.22)
Lipschitz条件(Lipschitz condition)
α次～(Lipschitz condition of order α) (17.31)
Littlewood, J. E. (21.74)前
$\mathfrak{L}_\infty$空间($\mathfrak{L}_\infty$spaces) (20.14)
～的共轭空间(conjugate space of $\mathfrak{L}_\infty$ spaces) (20.35)
$\mathfrak{L}_1$空间($\mathfrak{L}_1$spaces) (12.26)
$\mathfrak{L}_1$(R)
～上的积性线性泛函(multiplicative linear functionals on $\mathfrak{L}_1$(R)) (21.65)
～中的理想(ideals in $\mathfrak{L}_1$(R)) (21.65)
$\mathfrak{L}_p$
～中平移的连续性(continuity of translation in $\mathfrak{L}_p$) (13.24)
～中的弱收敛(weak convengence in $\mathfrak{L}_p$) (13.41)
～范数($\mathfrak{L}_p$ norm) (13.1)
～空间($\mathfrak{L}_p$ space) (12.26), (13.1)
～的共轭空间(conjugate space of $\mathfrak{L}_p$) (15.11), (15.12)
～的完备性(completeness of $\mathfrak{L}_p$)(13.11)
～的稠密子集(dense subsets of $\mathfrak{L}_p$) (13.20), (13.21)
$\mathfrak{L}_1$的共轭空间(conjugate space of $\mathfrak{L}_1$) (20.20), (20.21)
$\mathfrak{L}_2$上的Fourier变换(Fourier transform on $\mathfrak{L}_2$) (21.53)
～的正交维数(orthogonal dimension of $\mathfrak{L}_2$)(16.53)

Luzin, N. N. (11.36), (18.24)
Luzin定理(Luzin's theorem) (11.36)

Mayrhofer, K. (9.25)
McShane, E. J.(15.10)
Minkowski不等式(Minkowski's inequality) (13.7)

N函数(N-functions) (18.24), (18.48)
n维Euclid空间(Euclidean n-space) (3.3)
n维酉空间(unitary n-space) (3.3)

Orlicz空间(Orlicz spaces) (13.36)
Oxtoby, J. C. (10.29)

Parseval恒等式(Parseval's identity) (16.26), (16.37)
Peano, G.(2.8)
Phillips, K. L.(21.83)
Plancherel变换(Plancherel transform) (21.53)
plancherel定理(Plancherel's theorem) (21.53)
Poisson核(Poisson's kernel) (18.47)
Poretsky(1.16)
Pythagoras定理(Pythagorean theorem) (16.10)

Radon-Nikodým定理(Radon-Nikodým theorem)
[见Lebesgue-Radon-Nikodým定理]
Radon测度(Radon measure)(9.1)
Radon-Riesz定理(Radon-Riesz theorem) (15.17)
Radon, J.(21.73)
Riemann-Lebesgue引理(Riemann-Lebesgue lemma)
(16.35), (21.39)
Riemann-Stieltjes可积函数(Riemann-Stieltjes

integrable function)(8.3)
Riemann-Stieltjes积分(Riemann-Stieltjes integral) (8.6)
Riemann可积性(Riemann integrability) (8.3), (12.51)
Riemann积分(Riemann integral) (8.6)
作为～的开拓的Lebesgue积分(Lebesgue integral as an extension of the Riemann integral) (12.51)
Riesz-Fischer定理(Riesz-Fischer theorem) (16.39)
Riesz表示定理(Riesz representation theorem) (12.36), (20.48)
Riesz, F. (11.26), (15.11)
Ross, K. A.(10.29), (21.1), (22.24)
Rudin, W.(7.35), (21.66)
Ruziewicz, S.(18.40)
R
～上的正则Borel测度(regular Borel measures on R) (19.45)前
～上的加性函数(additive functions on R) (5.46)
～中开集的结构(structure of open sets in R) (6.59)
～中的开集(open set in R) (6.2)
～的特征标(characters of R) (18.46)
～的通常拓扑(usual topology for R) (6.5)
～的群代数(group algebra of R) (21.34)

Saks, S.(10.21), (18.40), (18.42), (19.42)
Schröder-Bernstein定理(Schröder-Bernstein theorem) (4.7)
Schwartz, J.(14.1)前, (20.21)
Schwartz不等式(Schwartz's inequality) (13.4), (16.2)
sgn(正负号函数) (5.56)
Sierpin'ski, W. (10.21), (10.55)
σ代数(σ-algebra) (1.13)
乘积～(product σ-algebra)(21.2)
族所生成的～(σ-algebra generated by a famity) (10.19)

σ有限(σ-finite)
~测度(σ-finite measure) (10.3)
~测度空间(σ-finite measure space) (10.3)
~集(σ-finite set) (10.30)
σ紧(σ-tompact)
~空间(σ-compact space) (9.42)
~集(σ-compact set) (10.30)
σ环(σ-ring) (1.13)
Sobczyk, A.(14.12)
Steinhaus定理(Steinhaus theorem) (10.43)
Steinhaus, H. (10.43)
Sparre Andersen, E. (20.60)
Stieltjes [见 Riemann-Stieltjes及Lebesgue-Stieltjes]
Stone-Weierstrass定理(Stone-Weierstrass theorem) (7.29), (7.30)
~的复变型(complex version of Stone-Weierstrass theorem (7.34)
~的其他变型(other version of Stone-Weierstrass theorem (7.37)
Stone, M. H.(1.14), (7.24)
Suhomlinov(14.12)
Suppes, P.(1.1)

Tarski, A.(4.13)
Tihonov, A.(6.43)
Tihonov定理(Tihonov's theorem) (6.43)
Tietze开拓定理(Tietze's extension theorem) (7.40)
Tukey引理(Tukey's lemma) (3.8)

Urysohn, P.(6.80)
Urysohn引理(Urysohn's lemma) (6.80)

Vitali覆盖(Vitali cover) (17.10)
Vitali收敛定理(Vitali's convergence theorem)(13.38)
Vitali覆盖定理(Vitali's covering theorem) (17.11)

Weierstrass, K.(6.44), (7.24), (17.7)
Weierstrass 逼近定理(Weierstrass approximation theorem) (7.31)

Young, W. H.(21.56)
Young不等式(Young's inequality) (13.2)

Zaanen, A.C.(13.36)
Zermelo, E. (3.1)前, (3.11)
Zorn引理(Zorn's lemma) (3.10)
Zuckerman, H. S.(22.45)
Zygmund, A.(13.37), (18.27), (18.41)

一 画

一对一关系(1-1关系)(one-to-one relation) (2.10)
一致可和性(uniform summability)
  Fourier级数的～(uniform summability of Fourier series) (18.44)
一致有界性原理(uniform boundedness principle) (14.23)
一致范数(uniform norm) (7.3)
一致空间(uniform spaces) (7.15)
一致可积函数序列(uniformly integrable sequences of functions) (13.39)
一致凸Banach空间(uniformly convex Banach spaces)(15.16)
一致连续函数(uniformly continuous function) (7.14)
一致圆Banach空间(uniformly rotund Banach spaces)(15.16)

二　　画

二项式系数(binomial coefficients) (7.25)

二项级数(binomial series) (7.25)

几乎处处(almost everywhere) (9.29), (11.19)

　局部～(locally almost everywhere) (9.29)

几何解释(geometric interpretation)

　复数域的～(geometric interpretation of the complex field) (5.50)

三　　画

三分点集(ternary set)

　Cantor～(Cantor ternary set) (3.4), (6.62)

三角多项式(trigonometric polynomials) (16.32)

下界(lowor bound)(3.5)

下确界(infimun)

　R^*中的～(infimun in R^*) (6.57)

　有序域中的～(infimum in an ordered field) (5.32)

下半连续函数(lower semicontinuous function) (7.20)

大数定律(law of large numbers)

　弱～(weak law of large numbers) (22.32)

　强～(strong law of large numbers) (22.29), (22.31)

上界(upper bound) (3.5)

上确界(supremum)

　R^*中的～(supremum in R^*) (6.57)

　有序域中的～(supremum in an ordered field) (5.32)

　本质～(essential supremum) (20.11)

上半连续函数(upper semicontinuous function) (7.20)

广义实数(extended real numbers) (6.1)

广义测度(signed measure) (19.1)

　～的Jordan分解(Jordan decomposition of a signed measure) (19.8)

～的正变差(positive variation of a signed measure) (19.7)
～的负变差(negative variation of a signed measure) (19.7)
～的全变差(total variation of a signed measure) (19.7)
～的导数(derivative of a signed measure) (20.53)
关于～的非正集(nonpositive set for a signed measure)(19.4)
关于～的非负集(nonnegative set for a signed measure)
(19.4)
有限加性～的Jordan分解(Jordan decomposition of a finitely additive signed measure) (19.63)
广义B.Levi定理(generalized B.Levi theorem)(9.17)
广义Hölder不等式(generalized Hölder's inequality) (13.23)
子集(subset)
集的～(subset of a set) (1.3)
集的真～(proper subset of a set) (1.3)
子序列(subsequence) (6.28)
子空间(subspace)
拓扑空间的～(subspace of a topological space) (6.18)
～的正交补(orthogonal complement of a subspace) (16.42)
子覆盖(subcover) (6.31)

四　画

支集(支柱)(support)
测度的～(support of a measure) (9.28)
支区间(构成区间)(component intervals) (6.59)
无关(independence)
线性～(linear independence) (3.18)
无限集(infinite set) (4.12)
可数～(countably infinite set) (4.14)
无穷乘积(infinite products)
测度空间的～(infinite products of measure spaces) (22.1)
(22.2)

无界区间(unbounded interval) (6.1)
无处稠密集(nowhere dense set) (6.53)
无穷乘积测度(infinite product measures) (22.7)
～的奇异性 (singularity of infinite product measures) (22.36)
～的绝对连续性 (absolute continuity of infinite product measures) (22.36)
～所导出的奇异测度 (singular measures induced by infinite product measures)(22.39), (22.40)
无穷乘积空间上的累次积分 (iterated integrals on infinite product spaces)(22.14)
开 (open)
～球(open ball)(6.14)
～区间(open interval)(6.1)
～覆盖(open cover)(6.31)
相对～(relatively open)(6.18)
开拓(extension)
Hahn-Banach～定理(Hahn-Banach extension theorem)(14.9)
Hopf～定理 (Hopf's extension theorem)(10.36)
Kreĭn～定理 (Kreĭn's extension theorem)(14.27)
Tietze～定理 (Tietze's extension theorem)(7.40)
关系的～(extension of a relation)(2.5)
测度的～ (extensions of measures)(10.36), (10.57), (10.58)
Lebesgue 测度的～(extensions of Lebesgue measure)(10.29), (20.40)
Lebesgue 测定的不变～(invariant extension of Lebesgue measure) (20.40)
作为Riemann积分的～的 Lebesgue积分 (Lebesgue integral as an extension of the Riemann integral) (12.51)
开集(open set) (6.4)

R中的～(open set in R)(6.2), (6.59)
开映射定理 (open mapping theorem) (14.16)
开拓一个测度 (extending a measure) (10.40)
不等式 (inequalities)
Clarkson～(Clarkson's inequalities) (15.5), (15.8)
Hölder～(Hölder's inequalities)(13.4), (13.6)
Jensen～(Jensen's inequalities)(13.34)
不等式 (inequality)
Bessel～(Bessel's inequality)(16.17)
Bunyakovskiĭ～(Bunyakovskiĭ's inequality (13.4)
Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz～ (Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz inequality)(16.2)
Cauchy～(Canchy's inequality)(13.4)
Minkowski～(Minkowski's inequality)(13.7)
Schwarz～(Schwarz's inequality) (13.4), (16.2)
Young～(Young's inequality)(13.2)
广义 Hölder～(generalized Hölder's inequality)(13.26)
不可测集 (nonmeasurable sets)(10.28), (10.54)
～上的测度 (measures on nonmeasurable sets)(11.39)
具有可测截口的～(nonmeasurable sets with measurable sections)(21.26), (21.27)
不可数集 (uncountable set) (4.14)
不定积分 (indefinite integral)
函数的～(indefinite integral of a function)(18.1)
～的导数 (derivative of an indefinite integral)(18.3)
不变开拓 (invariant extension)
Lebesgue测度的～(invariant extension of Lebesgue measure) (20.40)
不变平均 (invariant mean)
$\mathfrak{B}'$(R)上的～(invariant mean on $\mathfrak{B}'$(R))(20.40)
不相交集 (disjoint sets)(1.7)

不动点定理 (fixed-point theorem)

Banach～(Banach's fixed-point theorem)(6.88)

不连续点集 (set of discontinuities)

函数的～(set of discontinuities of a function)(6.90)

不连续测度(discontinuous measures)

纯～(purely discontinuous measures)(19.55)

不可分解测度空间(nondecomposable measure space)(20.17)

区间 (interval)

开～(open interval)(6.1)

闭～(closed interval)(6.1)

无界～(unbounded interval)(6.1)

有界～(bounded interval)(`.1)

～的细分 (subdivision of an interval)(8.2)

区间 (intervals)

支～(构成区间)(Component intervals)(6.59)

半开～(half-open intervals)(6.1)

中值定理 (mean value theorem)

积分第一～(first mean value theorem for integrals) (21.69)

积分第二～(second mean value theorem for integrals) (21.70)

内部(interior)

集的～(interior of a set)(6.6)

内积空间(inner product space)(13.16), (16.1)

划分(cut)

有序域中的Dedekind～(Dedekind cut in an ordered field)(5.38)

分解(decomposition)

复测度的Jordan～(Jordan decomposition of a complex measure)(19.13)

广义测度的Jordan～(Jordan decomposition of a signed measure)(19.8)

有限加性广义测度的Jordan ～ (Jordan decomposition of a finitely additive signed measure) (19.63)

测度空间的～(decomposition of a measure space)(19.25)
分解定理 (decomposition theorem)
Hahn～(Hahn decomposition theorem)(19.6)
Jordan～(Jordan decomposition theorem)(17.16)
Lebesgue～(Lebesgue decomposition theorem)(19.42)
分部积分法(integration by parts)(18.19), (18.20)
关于Lebesgue-Stieltjes积分的～(integration by parts for Lebesgue-Stieltjes integrals)(21.67)
分离函数族 (separating family of functions)(7.28)
反射(reflection)
函数的～(reflection of a function)(8.14)
反演(inversion)
Fourier 变换的～(inversion of Fourier transforms)(21.49)
公理(axiom)
选择～(axiom of choice)(3.2)
计数测度(counting measure)(10.4)

五　画

平移 (translate)
函数的～(translate of a function)(8.14)
集的～(translate of a set)(10.26)
平移(translation)
$\mathfrak{L}_p$中～的连续性(continuity of translation in $\mathfrak{L}_p$)(13.24)
平行四边形定律(parallelogram law)(16.6)
正交(orthogonal)(16.9)
～补(orthogonal complement)(16.42)
～向量(orthogonal vectors)(16.9)
Hilbert 空间的～维数(orthogonal dimension of a Hilbert space)(16.28)
$\mathfrak{L}_2$的～维数(orthogonal dimension of $\mathfrak{L}_2$)(16.53)
正核(positive kernal)(21.36)

正规数(normal numbers)(22.34)
正变差(positive variation)
广义测度的～(positive variation of a signed measure)(19.7)
正则测度(regular measure)(12.39), (12.55)
关于～的 Lebesgue-Radon-Nikodým定理 (Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for regular measure) (19.32)
正则外测度(regular outer measure)(10.40)
正则Borel测度(regular Borel measure)
复～(complex regular Borel measure)(20.41)
R上的～(regular Borel measure on R)(19.45)前
正则有限加性测度(regular finitely additive measure)(20.51)
正则性(regularity)
乘积测度的～(regularity of product measures)(21.18)
正负号函数(sgn, signum)(5.56)
正规正交集(orthonormal set)(16.9)
完全～(complete orthonormal set)(16.19), (16.23)
正规正交化方法(orthonormalization process)
Gram-Schmidt～(Gram-Schmidt orthonormalization process)(16.22)
正规化Hermite函数(normalized Hermite functions)(16.25)
正规化非减函数(normalized nondecreasing function) (8.20), (19.46)
正常差集(proper differences of sets)(10.57)
本质上确界(essential supremum)(20.11)
本质有界函数(essentially bounded functions)(20.11)
左导数(left derivative)(17.4)
左极限(left hand limit)(8.18)
左连续(left continuous)(8.18)
右导数(right derivative)(17.4)
右极限(right hand limit)(8.18)
右连续(right continuous)(8.18)

可测(measurable)
～集(measurable set)(10.5)
～函数(measurable function)(11.2), (11.15)
～矩形(measurable rectangle)(21.2)
～剖分(measurable dissection)(12.1)
Borel～函数(Borel measurable function)(11.2), (12.63)
Lebesgue～函数(Lebesgue measurable function)(11.2)
具有～截口的不可测集(nonmeasurable sets with measurable sections)(21.26), (21.27)
可列集(denumerable set)(4.14)
可和性(summability)
Fourier积分的～(summability of Fourier integrals)(21.43)
Fourier级数的Abel～(Abel summability of Fourier series)(18.47)
Fourier级数的 Cesàro～ (Cesàro summability of Fourier series)(18.28)
Fourier级数的一致～(uniform summability of Fourier series)(18.44)
可测集(measurable sets)(10.31)
Lebesgue～(Lebesgue measurable sets)(10.6)
～的映射(mappings of measurable sets)(11.6), (17.25)—(17.27), (18.25)(18.39)
可积性(integrability)
Riemann～(Riemann integrability)(8.3), (12.51)
可微性(differentiability)
单调函数的～(differentiability of monotone functions)(17.12)
可数基(countable base)(6.20)
可数集(countable set)(4.14)
可分空间(separable space)(6.20)
可和函数(summable function)(12.26)
可测子集(measurable subsets)

～上的测度(measures on measurable subsets)(11.37)
可测空间(measurable space)(11.1)
可积函数(integrable function)(12.26)
局部～(locally integrable function)(12.62)
Riemann-Stieltjes～(Riemann-Stieltjes integrable function)(8.3)
可微函数(differentiable function)(17.4)
可分解测度(decomposable measures)(19.25)
～的Lebesgue分解(Lebesgue decomposition for decomposable measures)(19.77)
关于～的 Lebesgue-Radon-Nikodým定理 (Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for decomposable measures)(19.27)
可数无穷集(countably infinite set)(4.14)
可数加性测度(countably additive measure)(10.3)
归纳(induction)
超限～(法)(transfinite induction)(3.14)
四元数(quaternions)(7.45)
凸集(convex set)(16.43)
凸锥(convex cone)(14.27)
凸函数(convex functions)(13.34), (17.37)
～的积分表示(integral representation of convex functions)(18.43)
代数(algebra)
Banach～(Banach algebra)(7.7)
集～(algebra of sets)(1.11)
线性～(linear algebra)(7.2)
赋范～(normed algebra)(7.5)
算子～(algebra of operators)(16.40)
R的群～(group algebra of R)(21.34)
域上的～(algebra over a field)(7.2)

代数(algebras)
Boole～(Boolean algebras)(1.14)
代数维数(algebraic dimension)
向量空间的～(algebraic dimension of a vector space)(4.59)
外测度(outer measure)(10.2)
Lebesgue～(Lebesgue outer measure)(9.19)
Lebesgue-Stieltjes～(Lebesgue-Stieltjes outer measure)(9.19)
正则～(regular outer measure)(10.40)
度量～(metric outer measure)(10.48)
非负线性泛函所导出的～(outer measure induced by a nonnegative linear functional) (9.19)
生成(generated)
族所～的σ代数(σ-algebra generated by a family)(10.19)
处处不可微的连续函数 (continuous nowhere differentiable functions)(17.7)
半序集(partially ordered set)(2.7)
半开区间(half-open intervals)(6.1)
半序关系(partial ordering)(2.7)
半连续函数(semicontinuous function)
下～(lower semicontinuous function)(7.20)
上～(upper semicontinuous function)(7.20)
加性函数(additive functions)
R上的～(additive functions on R)(5.46)
边界(boundary)(6.6)
发散Fourier级数 (divergent Fourier series)(18.45)
对角集(diagonal)(2.20)
对称差(symmetric difference)
两集的～(symmetric difference of two sets)(1.10)
对称导数(symmetric derivative)
函数的～(symmetric derivative of a function)(17.36)
对偶空间(dual space)(14.6)

六　画

共轭(conjugate)

　复～(complex conjugate)(5.42)

　Banach空间的～(conjugate of a Banach space)(14.6)

共轭空间(conjugate space)(14.6)

　$\mathfrak{C}_0(X)$的～(conjugate space of $\mathfrak{C}_0(X)$(20.48)

　$\mathfrak{L}_\infty$的～(conjugate space of $\mathfrak{L}_\infty$)(20.35)

　$\mathfrak{L}_p$的～(conjugate space of $\mathfrak{L}_p$(15.11), (15.12)

　$\mathfrak{L}_1$的～(conjugate space of $\mathfrak{L}_1$)(20.20), (20.21)

　第二～(second conjugate space)(14.6)

列紧空间(sequentially compact space)(6.29)

压缩映射(contraction mapping)(6.88)

有限集(finite set)(4.12)

有限交性(质)(finite intersection property)(6.33)

有限变差函数(function of finite variation)(17.14)

有限测度(finite measure)(10.3)

有限特征(finite character)

　具有～的族(family of finite character)(3.6)

有限子覆盖(finite subcover)(6.32)

有限加性测度(finitely additive measures)(10.3), (20.27)

　正则～(regular finitely additive measures)(20.51)

　关于～的积分(integral for finitely additive measures)(20.29)

有限测度空间(finite measure space)(10.3)

有限加性广义测度(finitely additive signed measure)

　～的Jordan分解(Jordan composition of a finitely additive signed measure)(19.63)

有序域(ordered field)(5.7)

　Archimedes～(Archimedean ordered field)(5.17)

　完备Archimedes～(complete Archimedean ordered field)(5.33)

　非Archimedes～(non-Archimedean ordered field)(5.39)

～中的Dedekind分划(Dedekind cut in a ordered field)(5.38

～中的下确界(infimum in an ordered field)(5.32)

～中的上确界(supremum in an ordered field)(5.32)

～中的最大下界(greatest lower bound in an ordered field)(5.32)

～中的最小上界(least upper bound in an ordered field) (5.32)

有序集(ordered set)

半序集(partially ordered set) (2.7)

良序集(well ordered set) (2.7)

线性～(linearly ordered set) (2.7)

有界集(bounded set)

度量空间中的～(bounded set in a metric space)(6.44

有界区间(bounded interval)(6.1)

有界序列(bounded sequence)(5.19)

有界函数(bounded functions)(7.3

本质～(essentially bounded functions)(20.11)

有界变差函数(function of bounded variation)(17.14)

有界线性泛函(bounded linear functionals)

Hilbert空间上的～(bounded linear functionals on Hilbert spaces)(16.31)(16.55)—(16.58)

有界线性变换(bounded linear transformation)(14.1)

网(net)(20.61)

对于～的微分(differentiation on a net)(20.61)

同构(isomorphism)(5.4)

序～(order isomorphism)(4.40)

同构环(isomorphic rings)(5.4)

自同构(automorphism)(5.4)

实数域的～(automorphisms of the real field)(5.45)

自由滤子(free filter)(20.38)

自反Banach空间(reflexive Banach space)(14.15)

自然映射(natural mapping)(14.7)

向量空间(vector space)(3.15), (4.59)

～的基(basis for a vector space)(3.18)
～的代数维数(algebraic dimension of a vector space)(4.59)
～的线性维数(linear dimension of a vector space)(4.59)
全变差(total variation)
函数的～(total variation of a function) (17.14), (17.33), (17.34)(18.1)
复测度的～(total variation of a complex measure)(19.11)
广义测度的～(total variation of a signed measure(19.7)
全变差范数(total variation norm)(17.35)
合成(composition)
关系的～(composition of relations)(2.4)
绝对连续函数的～(composition of absolutely continuous functions)(18.37)
多项式(polynomials)
Hermite～(Hermite polynomials)(16.25)
三角～(trigonometric polynomials)(16.32)
负变差(negative variation)
广义测度的～(negative variation of a signed measure)(19.7)
交(intersections)
集的～(intersections of sets)(1.4)
交换环(commutative ring)(5.3)
闭包(closure)
集的～(closure of a set)(6.6)
闭集(closed set)(6.6)
闭区间(closed interval)(6.1)
闭图象定理(closed graph theorem)(14.21)
次基(subbase)
拓扑的～(subbase for a topology)(6.10)
次基定理(subbase theorem)
Alexander～(Alexander's subbase theorem)(6.40)
次序关系(ordering)

半序关系(partial ordering)(2.7)
良序关系(well ordering)(2.7)
线性~(linear ordering)(2.7)
次线性泛函(sublinear functional)(14.8)
字(word)(1.22)
并(unions)
集的~(unions of sets)(1.4)
关系(relation)(2.2)
1-1~(one-to-one relation)(2.10)
单值~(single valued relation)(2.10)
等价~(equivalence relation)(2.6)
~的逆(inverse of a relation)(2.3)
~的开拓(extension of a relation)(2.5)
~的合成(composition of relations)(2.4)
~的限制(restriction of a relation)(2.5)
~的值域(range of a relation)(2.3)
~的定义域(domain of a relation)(2.3)
点态运算与点态~(pointwise operations and relations(7.1)
导数(derivates)
Dini~(Dini derivates)(17.2)
导数(derivative)(17.4)
左~(left derivative)(17.4)
右~(right derivative)(17.4)
对称~(symmetric derivative)(17.36)
不定积分的~(derivative of a indefinite integral)(18.3)
广义测度的~(derivative of a signed measure)(20.53)
绝对连续测度的~(derivative of an absolutely continuous measure)(19.43)
Lebesgue-Radon - Nikodým~ (Lebesgue-Radon- Nikodým derivative)(19.43)
阶梯函数(step function)(13.22)

收敛(convergence)
弱～(weak covergence)(15.17)
依测度～(convergence in measure)(11.25)
依概率～(convergence in probability)(11.25)
殆一致～(almost uniform convergence)(11.32)
$\mathfrak{L}_p$中的弱～(weak convergence in $\mathfrak{L}_p$)(13.41)
依测度～的度量(metric of convergence in measure)(12.47)
收敛序列(convergent sequence)(6.24)
收敛定理(convergence theorem)
Lebesgue控制～ (Lebesgue's dominated convergence theorem)(12.24), (12.30), (12.57)
Vitali～(Vitali's convergence theorem)(13.38)
单调～(monotone convergence theorem)(12.22)
级数(series)
二项～(binomial series)(7.25)
Fourier～(Fourier series)(16.26), (18.27)
Fourier～的Abel可和性(Abel summability of Fourier series)(18.47)
Fourier～的Cesàro可和性(Cesàro summability for Fourier series)(18.28)
Fourier～的算术平均(arithmetic mean for a Fourier series)(18.27)
Fourier～的一致可和性 (uniform summability of Fourier series)(18.44)
发散Fourier～(divergent Fourier series)(18.45)

七 画

极限(limit)
下～(limit inferior)(6.83)
左～(left hand limit) (8.18)
右～(right hand limit) (8.18)
上～(limit superior) (6.83)

～点(limit point) (6.6)
序列的～(limit of a sequence) (6.24)
连续函数的点态～(pointwise limits of continuous functions) (6.92)
测度的集态～(setwise limit of measures) (19.68), (19.69)
极大元素(maximal element) (3.5)
极大定理(maximal theorem)
Hardy-Littlewood～(Hardy-Littlewood maximal theorem) (21.76), (21.77), (21.80)
极小元素(minimal element) (3.5)
极大性原理(maximality principle)
Hausdorff～(Hausdorff maximality principle)(3.9)
极化恒等式(polar identity) (16.5)
严格递减函数(strictly decreasing function) (8.1)
严格递增函数(strictly increasing function) (8.1)
酉空间(Unitary space)
n维～(Unitary n-space) (3.3)
连续(continuous)
左～(left continuous) (8.18)
右～(right continuous) (8.18)
连续性(continuity)
在一点的～(continuity at a point)(6.68)
$\mathfrak{L}_p$中平移的～(continuity of translation in $\mathfrak{L}_p$) (13.24)
连续统(continuum) (4.2)
连续象(continuous images)
测度的～(continuous images of measures) (12.45)
连通空间(connected space) (6.8)
连续函数(continuous function) (6.68)
一致～(uniformly continuous function) (7.14)
下半～(lower semicontinuous function) (7.20)

上半～(upper semicontinuous function) (7.20)
绝对～(absolutely continuous functions) (18.10)
～的点态极限(pointwise limits of continuous functions) (6.92)
具有紧支柱的～(continuous functions with compact support) (7.12), (7.13)
处处不可微的～(continuous nowhere differentiable functions) (17.7)
在无穷大处等于零的～(continuous functions that vanish at infinity) (7.12)
在无穷大的一邻域内等于零的～ (continuous functions that vanish in a neighborhood of infinity) (7.12)
连续测度(continuous measures) (19.55)
连续统假设(continuum hypothesis) (4.50)
伴随(adjoint)
线性算子的～(adjoint of a linear operator) (14.34), (16.40)
伴随空间(adjoint space) (14.6)
近似单位元(approximate unit) (21.36)
邻域(neighborhood) (6.6), (6.14)
余集(补)(complement)
集的～(complement of a set) (1.8)
子空间的正交补(orthogonal complement of a subspace) (16.42)
坐标(coordinate) (3.1)
坐标空间(coordinate space)
到～上的射影(projection onto a coordinate space) (6.41)
系数(coefficients)
二项式～(binomial coefficients) (7.25)
Fourier～(Fourier coefficients) (16.14), (16.33)
条件(condition)
～N(condition N)(18.24)

α次Lipschitz～(Lipschitz condition of order α)(17.31)
序列(sequence)(2.18)
Cauchy～(Cauchy sequence) (5.19), (6.46)
零～(null sequence) (5.19)
有界～(bounded sequence) (5.19)
收敛～(convergent sequence) (6.24)
单调～(monotone sequence) (6.81)
～的极限(limit of a sequence) (6.24)
～的项(term of a sequence) (2.18)
终归相等的～(ultimately equal sequences)(22.20)
一致可积函数～(uniformly integrable sequences of functions) (13.39)
序型(order type) (4.40)
序数(ordinal number) (4.40)
序关系(order relation)
基数的～(order relation for cardinal numbers) (4.5)
序同构(order isomorphism) (4.40)
序拓扑(order topology) (6.96)
泛函(functional)
线性～(linear functional) (14.6)
赋值～(evaluation functional) (9.2)
次线性～(sublinear functional) (14.8)
非负线性～(nonnegative linear functional)(9.1), (14.27)
积性线性～(multiplicative linear functional) (9.2), (20.52)
Hilbert空间上的有界线性～(bounded linear functionals on Hilbert spaces) (16.31), (16.55)-(16.58)
$\mathfrak{L}_1(R)$上的积性线性～(multiplicative linear functionals on $\mathfrak{L}_1(R)$) (21.65)
完全(complete)
～测度(complete measure) (11.20)
～测度空间(complete measure space)(11.20)

～正规正交集(complete orthonormal set) (16.19), (16.23)
完备(complete)
～Archimedes有序域(complete Archimedean ordered field) (5.33)
～度量空间(complete metric space) (6.46)
完全化(completion)
测度空间的～(completion of a measure space)(11.21)
测度空间的～上的积分(integrals on the completion of a measure space) (12.63)
完全性(completeness)
Hermite函数的～(completeness of the Hermite functions) (21.64)
三角函数的～(completeness of the trigonometric functions) (16.32)
完全集(perfect set) (6.61)
～的不可数性(uncountability of perfect sets) (6.65)
完备化(completion)
度量空间的～(completion of a metric space) (6.85)
赋范线性空间的～(completion of a normed linear space) (14.35)
完备性(completeness)
$\mathfrak{L}_p$的～(completeness of $\mathfrak{L}_p$) (13.11)
初始段(initial segment) (4.42)
良序集的～(initial segment of a well-ordered set) (3.13)
良序集(well-ordered set) (2.7)
～的初始段(initial segment of a well-ordered set) (3.13)
良序定理(well-ordering theorem) (3.11)
张成(span) (3.26)
线性～(linear span) (3.26)
局部零集(locally null set) (9.29), (20.11)
局部紧空间(locally compact space) (6.77)

局部零函数(locally null function) (9.29)
局部几乎处处(locally almost everywhere) (9.29)
局部可积函数(locally integrable function) (12.62)
局部一致凸Banach空间(locally uniformly convex Banach spaces) (15.17)
纯量乘法(scalar multiplication) (3.15)
纯不连续测度(purely discontinuous measure) (19.55)

八 画

环(ring) (5.3)
Boole～(Boolean ring) (1.14)
集～(ring of sets) (1.11)
交换～(commutative ring) (5.3)
集所成的σ～(σ-ring of sets) (1.13)
表示(representation)
凸函数的积分～(integral representation of convex functions) (18.43)
F. Riesz～定理(F.Riesz's representation theorem) (12.36), (20.48)
枚举(enumeration)
集的～(enumeration of a set) (4.14)
直径(diameter)
集的～(diameter of a set) (6.51)
范畴(category)
第一～(first categorg) (6.53)
第二～(second category) (6.53)
范畴定理(category theorem)
Baire～(Baire category theorem) (6.54), (6.91)
范数(norm) (7.5)
$\mathfrak{L}_p$～($\mathfrak{L}_p$ norm) (13.1)
$\mathfrak{L}_\infty$～($\mathfrak{L}_\infty$ norm) (20.11)

一致～(uniform norm) (7.3)
算子～(operator norm) (14.1)
全变差～(total variation norm) (17.35)
奇异性(singularity)
无穷乘积测度的～(singularity of infinite product measures) (22.36)
奇异函数(singular function) (18.8)
Lebesgue～(Lebesgue's singular function) (8.28)
奇异测度(singular measures) (19.39)
无穷乘积测度所导出的～(singular measures induced by infinite product measures) (22.39), (22.40)
拓扑(topology) (6.4)
$R^{\#}$的通常～(usual topology for $R^{\#}$) (6.5)
R^n或K^n的通常～(usual topology for R^n or K^n) (6.17)
R的通常～(usual topology for R) (6.5)
序～(order topology) (6.96)
积～(product topology) (6.41)
相对～(relative topology) (6.18)
度量～(metric topology) (6.15)
离散～(discrete topology) (6.5)
密着～(indiscrete topology) (6.5)
～的基(base for a topology) (6.10)
～的次基(subbase for a topology) (6.10)
拓扑空间(topological space) (6.4)
～的子空间(subspace of a topological space) (6.18)
～的稠密子集(dense subset of a topological space) (6.20)
～的稠密性指标(density character of a topological space) (14.26)
拓扑空间的Cartesian乘积(Cartesian product of topological spaces) (6.41)
到…上的函数(映满函数)(onto function) (2.17)

构成区间(支区间)(component intervals)(6.59)
非正集(nonpositive set)
关于广义测度的～(nonpositive set for a signed measure)
(19.4)
非负集(nonnegative set)
关于广义测度的～(nonnegative set for a signed measure)
(19.4)
非减函数(nondecreasing function)(8.1)
正规化～(normalized nondecreasing function)(8.20),
(19.46)
非增函数(nonincreasing function)(8.1)
非正则测度(irregular measure)(12.58)
非负线性泛函(nonnegative linear functional)(9.1),(14.27)
～所导出的外测度(outer measure induced by a nonnegative
linear functional)(9.19)
非Archimedes有序域(non-Archimedean ordered field)(5.39)
固定滤子(fixed filter)(20.38)
和(sums)
Darboux～(Darboux sums)(8.3)
Lebesgue～(Lebesgue sums)(12.48)
依测度收敛(convergence in measure)(11.25)
依概率收敛(convergence in probability)(11.25)
变差(variation)[见全变差]
广义测度的正～(positive variation of a signed measure)
(19.7)
广义测度的全～(total variative of a signed measure)(19.7)
广义测度的负～(negative variation of a signed measure)
(19.7)
变换(transform)
Fourier～(Fourièr transform)(16.33),(21.38)
Plancherel～(Plancherel transform)(21.53)

变换(transformation) (2.11)
线性～(linear transformation) (14.1)
有界线性～(bounded linear transformation) (14.1)
变量的替换(change of variable)
积分中～(change of variable in integrals) (20.2), (20.3)
单位元(unit)
环的～(unit of ring) (5.3)
近似～(approximate unit) (21.36)
单调族(monotone family) (21.6)
单元素集(singleton set) (1.2)
单值关系(single valued relation)(2.10)
单调序列(monotone sequence)
R^*中的～(monotone sequence in R^*) (6.81)
单调函数(monotone function) (8.1)
～的可微性(differentiability of monotone function) (17.12)
单位点式质量(unit point mass) (9.19)
单调收敛定理(monotone convergence theorem) (12.22)
～的推广(generalization of monotone convergence theorem) (9.17)
定义域(domain)
关系的～(domain of a relation) (2.3)
定理(theorem)
Alexander次基～(Alexander's subbase theorem) (6.40)
B. Levi～(B.Levi's theorem) (12.22)
Baire范畴～(Baire category theorem) (6.54), (6.91)
Banach-Steinhaus～(Banach-Steinhaus theorem) (14.24)
Banach不动点～(Banach fixed-point theorem)(6.88)
Cantor-Bendixson～(Cantor-Bendixson theorem) (6.66)
Dini～(Dini'theorem) (13.40)
Egorov～(Egorov's theorem) (11.32)
Fejér-Lebesgue～(Fejér-Lebesgue theorem) (18.29)

Fubini～(Fubini's theorem) (21.12), (21.13)
Hahn-Banach～(Hahn-Banach theorem) (14.9)
Hahn分解～(Hahn decomposition theorem)(19.6)
Hardy-Littlewood极大～(Hardy-Littlewood maximal theorem) (21.76), (21.77), (21.80)
Heine-Borel～(Heine-Borel theorem)(6.44)
Hopf开拓～(Hopf's extension theorem) (10.36)
Jordan分解～(Jordan decomposition theorem) (17.16)
König～(König's theorem) (4.39)
Kreĭn开拓～(Kreĭn's extension theorem) (14.27)
Lebesgue-Radon-Nikodým～(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem) (19.23), (19.24), (19.27), (19.32), (19.36)
Lebesgue分解～(Lebesgue decomposition theorem)(19.42)
Lebesgue微分～(Lebesgue differentiation theorem) (17.12)
Lebesgue控制收敛～(Lebesgue's dominated convergence theorem) (12.24), (12.30), (12.57)
Luzin～(Luzin's theorem) (11.36)
Plancherel～(Plancherel's theorem) (21.53)
Radon-Riesz～(Radon-Riesz theorem) (15.17)
Riesz-Fischer～(Riesz-Fischer theorem) (16.39)
Riesz表示～(Riesz representation theorem) (12.36), (20.48)
Schröder-Bernstein～(Schröder-Bernstein theorem) (4.7)
Steinhaus～(Steinhaus theorem) (10.43)
Stone-Weierstrass～(Stone-Weierstrass theorem) (7.29), (7.30), (7.34), (7.37)
Tihonov～(Tihonov's theorem) (6.43)
Tietze开拓～(Tietze's extension theorem) (7.40)
Vitali收敛～(Vitali's convergence theorem) (13.38)
Vitali覆盖～(Vitali covering theorem) (17.11)
Weierstrass逼近～(Weierstrass approximation theorem) (7.31)

广义B.Levi～(generalized B.Levi theorem)(9.17)
开映射～(open mapping theorem) (14.16)
良序～(Well-ordering theorem) (3.11)
闭图象～(closed graph theorem) (14.21)
单调收敛～(monotone convergence theorem)(12.22)
实部(real part)
复数的～(real part of a complex number) (5.42)
实数(real numbers) (1.2)
广义～(extended real numbers)(6.1)
～的展开式(expansions of real numbers) (5.40)
实数域(real number field) (5.35)
～的自同构(automorphisms of the real number field) (5.45)
空间(space)
Banach～(Banach space) (7.7)
Banach～的共轭(conjugate of a Banach space) (14.6)
Euclid～(Euclidean space) (3.3)
Fréchet紧～(Fréchet compact space) (6.30)
Hausdorff～(Hausdorff space)(6.6)
Hilbert～(Hilbert space) (13.16), (16.7)
σ紧～(σ-compact space) (9.42)
σ有限测度～(σ-finite measure space) (10.3)
酉～(unitary space) (3.3)
紧～(compact space) (6.32)
内积～(inner product space) (13.16), (16.1)
可分～(separable space) (6.20)
可测～(measurable space) (11.1)
对偶～(dual space) (14.6)
共轭～(conjugate space) (14.6)
列紧～(sequentially compact space) (6.29)
向量～(vector space) (3.15), (4.59)
连通～(connected space) (6.8)

拓扑～(topological space)(6.4)
伴随～(adjoint space) (14.6)
线性～(linear space) (3.15)
度量～(metric space) (6.12)
测度～(measure space) (10.3)
局部紧～(locally compact space) (6.77)
完备度量～(complete metric space) (6.46)
第二共轭～(second conjugate space) (14.6)
赋范线性～(normed linear space) (7.5)
准Hilbert～(pre-Hilbert space) (13.16)
自反Banach～(reflexive Banach space) (14.15)
空间(spaces)
Birnbaum-Orlicz～(Birnbaum-Orlicz spaces) (13.36)
$\mathfrak{L}_\infty$～($\mathfrak{L}_\infty$ spaces) (20.14)
$\mathfrak{L}_1$～($\mathfrak{L}_1$ spaces) (12.26)
$\mathfrak{L}_p$～($\mathfrak{L}_p$ spaces) (12.26), (13.1)
一致～(uniform spaces) (7.15)
拓扑～的Cartesian乘积(Cartesian product of topological spaces) (6.41)
空集(void set) (1.2)
卷积(convolution)
函数的～(convolution of functions) (21.31)
限制(restriction)
关系的～(restriction of a relation) (2.5)
孤立点(isolated point) (6.61)
线性(linearity)
积分的～(linearity of the integral) (12.12),(12.20), (12.27)
线性基(linear basis) (3.18)
线性无关(linear independence)(3.18)
线性代数(linear algebra)(7.2)
线性泛函(linear functional) (14.6)

非负～(nonnegative linear functional) (9.1), (14.27)
非负～所导出的外测度(outer measure induced by a nonegative linear functional) (9.19)
积性～(multiplicative linear functional) (9.2), (20.52)
线性泛函(linear functionals)
Hilbert空间上的有界～(bounded linear functionals on Hilbert spaces) (16.31), (16.55)-(16.58)
$\mathfrak{L}_1(R)$上的积性～(multiplicative linear functionals on $\mathfrak{L}_1(R)$) (21.65)
线性张成(linear span) (3.26)
线性变换(linear transformation)(14.1)
有界～(bounded linear transfomation) (14.1)
线性空间(linear space) (3.5)
赋范(normed linear space) (7.5)
赋范～的完备化(completion of a normed linear space) (14.35)
线性维数(linear dimension)
向量空间的～(linear dimension of a vector space) (4.59)
线性算子(linear operator) (14.1)
～的伴随(adjoint of a linear operator) (14.34), (16.40)
线性有序集(linearly ordered set) (2.7)
线性序关系(linear ordering) (2.7)
细分(subdivision)
区间的～(subdivision of an interval) (8.2)
函数(function)
Baire～(Baire function) (11.46)
Borel可测～(Borel measurable function) (11.2), (12.63)
Lebesgue可测～(Lebesgue measurable function) (11.2)
Lebesgue奇异～(Lebesgue's singular function) (8.28)
Riemann-Stieltjes可积～(Riemann-Stieltjes integrable function)(8.3)

R上的加性～(additive function on R) (5.46)
凸～(convex function) (13.34), (17.37)
弱～(minorant) (7.2)
强～(majorant) (7.2)
零～(null function) (9.29)
可和～(summable function)(12.26)
可测～(measurable function) (11.2), (11.15)
可积～(integrable function) (12.26)
可微～(differentiable function) (17.4)
有界～(bounded function) (7.3)
阶梯～(step function) (13.22)
连续～(continuous function) (6.68)
非减～(nondecreasing function) (8.1)
非增～(nonincreasing function) (8.1)
单调～(monotone function) (8.1)
指数～(exponential function) (5.56)
选择～(choice function) (3.1)
映满～(onto function) (2.17)
振动～(oscillation function) (6.90)
振荡～(saltus function) (19.58)
特征～(characteristic function) (2.20)
常值～(constant function) (7.2)
距离～(distance function) (6.12)
简单～(simple function) (11.34)
局部零～(locally null function) (9.29)
一致连续～(uniformly continuous function) (7.14)
下半连续～(lower semicontinuous function) (7.20)
上半连续～(upper semicontinuous function) (7.20)
有限变差～(function of finite variation) (17.14)
有界变差～(function of bounded variation) (17.14)
严格递减～(strictly decreasing function) (8.1)

严格递增～(strictly increaing function) (8.1)
局部可积～(locally integrable function) (12.62)
绝对连续～(absolutely continuous function) (18.10)
正规化非减～(normalized nondecreasing function) (8.20), (19.46)
具有紧支柱的连续～(continuous function with compact support) (7.12), (7.13)
在无穷大处等于零的连续～(continuous function that vanishes at infinity) (7.12)
在无穷大的一邻域内等于零的连续～(continuous function that vanishes in a neighborhood of infinity) (7.12)
～值(value of a function) (2.13)
～的Banach指标(Banach indicatrix of a function) (17.34)
～的Lebesgue点(Lebesgue point for a function) (18.6)
～的Lebesgue集(Lebesgue set for a function) (18.6)
～的反射(reflection of a function) (8.14)
～的平移(translate of a function) (8.14)
～的截口(section of a function) (21.2)
～的全变差(tolal variation of function) (17.14), (17.33), (17.34), (18.1)
～的不定积分(indefinite integral of a function) (18.1)
～的对称导数(symmetric derivatives of a function) (17.36)
～的不连续点集(set of discontinuities of a function) (6.90)
函数(functions)
Hermite～(Hermite functions) (16.25)
N～(N-functions) (18.24), (18.48)
奇异～(singular functions) (18.8)
分离～族(separating family of functions) (7.28)
凸～的积分表示(integral representation of convex functions) (18.43)
正规化Hermite～(normalized Hermite functions) (16.25)

单调～的可微性(differentiability of monotone functions)
(17.12)
一致可积～序列(uniformly integrable sequences of functions)
(13.39)
连续～的点态极限(pointwise limits of continuous functions)
(6.92)
～格(lattice of functions) (7.2)
～的卷积(convolution of functions) (21.31)
终归相等序列(ultimately equal sequences) (22.20)

九 画

项(term)
序列的～(term of a sequence) (2.18)
相对开集(relatively open set) (6.18)
相对拓扑(relative topology) (6.18)
殆一致收敛(almost uniform convergence) (11.32)
面积(areas)
作为～的积分(integrals as areas)(21.23)
指标(indicatrix)
函数的Banach ～(Banach indicatrix of a function)(17.34)
指数函数(exponential function)(5.56)
点(point)
Lebesgue～(Lebesgue point)(18.6)
凝～(condensation point)(6.66)
极限～(limit point)(6.6)
孤立～(isolated point)(6.61)
集的密集～(point of density of a set) (18.2)
在一～的连续性(continuity at a point)(6.68)
点式质量(point mass)
单位～(unit point mass)(9.19)
点态极限(pointwise limits)

连续函数的～(pointwise limits of continuous functions)(6.92)
点态运算与点态关系(pointwise operations and relations)(7.1)
映射(mapping)(2.11)
压缩～(contraction mapping)(6.88)
自然～(natural mapping)(14.7)
可测集的～(mappings of measurable sets)(11.6), (17.25)—(17.27), (18.25), (18.39)
映满函数(到…上的函数)(onto function)(2.17)
界(bound)
下～(lower bound)(3.5)
上～(upper bound)(3.5)
有序域中的最大下～(greatest lower bound in an ordered field)(5.32)
有序域中的最小上～(least upper bound in an ordered field)(5.32)
复数(complex number)
～的实部(real part of a complex number)(5.42)
～的虚部(imaginary part of a complex number)(5.42)
复平面(complex plane)(5.50)
复共轭(complex conjugate)(5.42)
复测度(complex measure)(19.1)
～的Jordan分解(Jordan decomposition of a complex measure)(19.13)
～的全变差(total variation of a complex measure)(19.11)
关于～的积分(integral relative to a complex measure)(19.17)
关于～的Lebesgue-Radon-Nikodým定理(Lebesgue-Radon-Nikodým theorem for complex measures)(19.36)
复数域(complex field, complex number field)(5.42)
～的几何解释(geometric interpretation of the complex field)(5.50)

选择公理(axiom of choice)(3.2)
选择函数(choice function)(3.1)
律(law)
零一律(zero-one law)(22.21)
段(segment)[见初始段]
度量(metric)(6.12)
Euclid～(Euclidean metric)(6.13)
离散～(discrete metric)(6.13)
依测度收敛的～(metric of convergence in measure)(12.47)
～外测度(metric outer measure)(10.48)
度量拓扑(metric topology)(6.15)
度量空间(metric space)(6.12)
完备～(complete metric space)(6.46)
～的完备化(completion of a metric space)(6.85)
～中的有界集(bounded set in a metric space)(6.44)
恒等式(identity)
Parseval～(Parseval's identity)(16.26), (16.37)
极化～(polar identity)(16.5)
测度(measure)(10.3)
测度(measure)
Borel～(Borel measure)(19.45)前
Dirac～(Dirac measure)(9.19)
Hansdorff～(Hausdorff measure)(10.49)
Radon～(Radon measure)(9.1)
σ有限～(σ-finite measure)(10.3)
外～(outer measure)(10.2)
复～(complex measure)(19.1)
广义～(signed measure)(19.1)
计数～(counting measure)(10.4)
正则～(regular measure)(12.39). (12.55)
有限～(finite measure)(10.3)

完全～(complete measure)(11.20)
退化～(degenerate measure)(10.3), (12.61)
正则外～(regular outer measure)(10.40)
可分解～(decomposable measure)(19.25)
非正则～(irregular measure)(12.58)
开拓一个～(extending a measure)(10.40)
可数加性～(countably additive measure)(10.3)
有限加性～(finitely additive measure)(10.3)(20.27)
复正则Borel～(complex regular Borel measure)(20.41)
正则有限加性～(regular finitely additive measure)(20.51)
依～收敛(convergence in measure)(11.25)
复～的Jordan分解(Jordan decomposition of a complex measure)(19.13)
复～的全变差(total variation of a complex measure)(19.11)
Lebesgue～的开拓(extension of Lebesgue measure)(10.29)
Lebesgue～的唯一性(uniqueness of Lebesgue measure) (12.56)
广义～的导数(derivative of a signed measure)(20.53)
广义～的正变差(positive variation of a signed measure)(19.7)
广义～的负变差(negative variation of a signed measure)(19.7)
广义～的全变差(total variation of a signed measure)(19.7)
广义～的Jordan分解(Jordan decomposition of a signed measure)(19.8)
Lebesgue～的不变开拓(invariant extension of Lebesgue measure)(20.40)
关于复～的积分(integral relative to a complex measure) (19.17)
依～收敛的度量(metric of convergence in measure (12.47)
关于广义～的非正集(nonpositive set for a signed measure) (19.4)
关于广义～的非负集(nonnegative set for a signed measure) (19.4)

绝对连续～的导数(derivative of an absolutely continuous measure)(19.43)
有限加性广义～的Jordan分解(Jordan decomposition of a finitely additive signed measure)(19.63)
～的支集(support of a measure)(9.28)
～的Lebesgue定义(Lebesgue's definition of measure)(9.25)
测度(measures)
Lebesgue-Stieltjes～(Lebesgue-Stieltjes measures)(19.47)
连续～(continuous measures)(19.55)
奇异～(singular measures)(19.39)
零一～(zero-one measures)(20.37)
度量外～(metric outer measures)(10.48)
无穷乘积～(infinite product measures)(22.7)
有限加性～(finitely additive measures)(10.3), (20.27)
纯不连续～(purely discontinuous measures)(19.55)
绝对连续～(absolutely continuous measures)(19.19)
R上的正则Borel～(regular Borel measures on R)(19.45)前
象集上的～(measures on image sets)(11.38)
可测子集上的～(measures on measurable subsets)(11.37)
不可测子集上的～(measures on nonmeasurable subsets)(11.39)
两个～的乘积(product of two measures)(21.9)
乘积～的正则性(regularity of product measures)(21.18)
可分 解～的 Lebesgue分解(Lebesgue decomposition for decomposable measures)(19.77)
关于有限加性～的积分(integrals for finitely additive measures)(20.29)
～的开拓(extensions of measures)(10.36), (10.57), (10.58)
～的连续象(continuous images of measures)(12.45)
～的集态极限(setwise limits of measures)(19.68), (19.69)
测度空间(measure space)(10.3)

σ有限～(σ-finite measure space)(10.3)
有限～(finite measure space)(10.3)
完全～(complete measure space)(11.20)
可分解～(decomposable measure space)(19.25)
不可分解～(nondecomposable measure space)(20.17)
～的分解(decomposition of a measure space)(19.25)
～的完全化(completion of a measure spaces)(11.21)
～的完全化上的积分(integrals on the completion of a measure space)(12.63)
测度空间的无穷乘积(infinite products of measure spaces)(22.1),(22.2)
逆(inverse)
关系的逆(关系)(inverse of a relation)(2.3)
退化测度(degenerate measure)(10.3),(12.61)
绝对值(absolute value)(5.42)
绝对连续性(absolute continuity)
积分的～(absolute continuity of the integral)(12.34)
无穷乘积测度的～(absolute continuity of infinite product measures)(22.36)
绝对连续函数(absolute continuons functions)(18.10)
～的合成(composition of absolute continuous functions)(18.37)
绝对连续测度(absolutely continuous measure)(19.19)
～的导数(derivative of an absolutely continuous measure)(19.43)

十　画

格(lattice)
集～(lattice of sets)(10.57)
函数～(lattice of functions)(7.2)
核(kernel)

Abel～(Abel's kernel)(21.45)
Dirichlet～(Dirichlet's kernel)(18.27)
Fejér～(Fejér's kernel)(18.27), (21.45)
Gauss～(Gauss's kernel)(21.45)
Poisson～(Poisson's kernel)(18.47)
正～(positive kernel)(21.36)
真子集(proper subset)
集的～(proper subset of a set)(1.3)
原理(principle)
Hausdordorff极大性～(Hausdorff maximality principle)(3.9)
超限归纳～(principle of transfinite induction)(3.14)
逐项积分(term by term integration)(12.21), (12.33)
逐项微分(term by term differentiation)(17.18)
振幅(saltus)(19.58)
振动函数(oscillation function)(6.90)
振荡函数(saltus function)(19.58)
紧空间(compact space)(6.32)
Fréchet～(Fréchet compact space)(6.30)
σ～(σ-compact space)(9.42)
列～(sequentially compact space)(6.29)
局部～(locally compact space)(6.77)
紧支柱(compact support)
具有～的连续函数(continuous functions with compact support) (7.12), (7.13)
特征(characteristic)
域的～(characteristic of a field)(5.6)
特征(标)(character)
R的～(characters of R)(18.46)
具有有限～的族(family of finite character)(3.6)
特征函数(characteristic function)
集的～(characteristic function of a set)(2.20)

积分(integral)

Denjoy～(Denjoy integral)(18.42)

Lebesgue～(Lebesgue integral)(12.2)

Riemann～(Riemann integral)(8.6)

Riemann-Stieltjes～(Riemann-Stieltjes integral)(8.6)

累次～(iterated integral)(21.12)

函数的不定～(indefinite integral of a function)(18.1)

作为集函数的～(integral as a set function)(12.31)

关于复测度的～(integral relative to a complex measure)(19.17)

不定～的导数(derivative of an indefinite integral)(18.3)

作为Riemann～的开拓的Lebesgue积分(Lebesgue integral as an extension of the Riemann integral)(12.51)

～的线性(linearity of the integral)(12.12), (12.20), (12.27)

～的绝对连续性(absolute continuity of the integral)(12.34)

积分(integrals)

Fourier～的可和性(summability of Fourier integrals)(21.43)

作为面积的～(integrals as areas)(21.23)

关于有限加性测度的～(integrals for finitely additive measures)(20.29)

无穷乘积空间上的累次～(iterated integrals on infinite product spaces)(22.14)

测度空间的完全化上的～(integrals on the completion of a measure space)(12.63)

关于Lebesgue-Stieltjes～的分部积分法(integration by parts for Lebesgue-Stieltjes integrals)(21.67)

关于Lebesgue～的微积分学基本定理(fundamental theorem of the integral calculus for Lebesgue integrals)(18.16)

～的变量替换(change of variable in integrals)(20.2), (20.3)

～第一中值定理(first mean value theorem for integrals)(21.69)

～第二中值定理(second mean value theorem for integrals)

(21.70)
积分法(integration)
分部～(integration by parts)(18.19), (18.20)
换元～(integration by substitution)(20.2), (20.3)
逐项积分(法)(term by term integration)(12.21), (12.33)
关于Lebesgue-Stieltjes积分的分部～(integration by parts for Lebesgue-Stieltjes integrals)(21.67)
积分表示(integral representation)
凸函数的～(integral representation of convex functions) (18.43)
积拓扑(product topology)(6.41)
积性线性泛函(multiplicative linear functionals) (9.2), (20.52)
$\mathfrak{L}_1(R)$上的～(multiplicative linear functionals on $\mathfrak{L}_1(R)$)(21.65)
乘法(multiplication)
纯量～(scalar multiplication)(3.15)
乘积(product)
两个集的Cartesian～(Cartesian product of two sets)(2.1)
集族的Cartesian～(Cartesian product of a family of sets) (3.1)
拓扑空间的Cartesian～ (Cartesian product of topological spaces)(6.41)
乘积(products)
Banach空间的～(products of Banach spaces)(14.19), (14.36)
测度空间的有限～(finite products of measure spaces) (21.9), (21.10)
测度空间的无穷～(infinite products of measure spaces)(22.1) (22.2)
乘积σ代数(product σ-algebra)(21.2)
乘积测度(product measures)(21.9)
无穷～(infinite product measures)(22.6), (22.7)

无穷～的奇异性(singularity of infinite product measures)
(22.36)
无穷～的绝对连续性(absolute continuity of infinite product
measures)(22.36)
无穷～所导出的奇异测度(singular measures induced by infinite
product measures)(22.39)(22.40)
～的正则性(regularity of infinite product measures)(21.18)
值(value)
函数～(value of a function)(2.13)
值域(range)
关系的～(range of a relation)(2.3)
射影(projection)
Hilbert空间中的～(projection in a Hilbert space)(16.47)
到坐标空间上的～(projection onto a coordinate space)(6.41)
矩形(rectangle)
可测～(measurable rectangle)(21.2)
剖分(dissection)
可测～(measurable dissection)(12.1)
离散拓扑(discrete topology)(6.5)
离散度量(discrete metric)(6.13)
准Hilbert空间(pre-Hilbert space)(13.16)
容度(content)(9.25)
Jordan～(Jordan content)(9.25)
递减函数(decreasing function)
严格～(strictly decreasing function)(8.1)
递增函数(increasing function)
严格～(strictly increasing function)(8.1)
弱收敛(weak convergence)(15.17)
$\mathfrak{L}_p$中的～(weak convergence in $\mathfrak{L}_p$)(13.41)
弱函数(minorant)(7.2)
弱大数定律(weak law of large numbers)(22.32)

展开式(expansion)

实数的～(expansions of real numbers)(5.40)

通用集(universal set)(1.8)

通常拓扑(usual topology)

R的～(usual topology for R)(6.5)

$R^{\#}$的～(usual topology for $R^{\#}$)(6.5)

R^n或K^n的～(usual topology for R^n or K^n)(6.17)

十一画

球(ball)

开～(open ball)(6.14)

理想(ideal)

$\mathfrak{C}_0(X)$中的～(ideals in $\mathfrak{C}_0(X)$)(20.52)

$\mathfrak{L}_1(R)$中的～(ideals in $\mathfrak{L}_1(R)$)(21.65)

环中的～(ideals in a ring)(5.3)

域(field)(5.5)

有序～(ordered field)(5.7)

实数～(real number field)(5.35)

复数～(field of complex numbers)(5.42)、

Archimedes有序～(Archimedean ordered field)(5.17)

非Archimedes有序～(non-Archimedean ordered field)(5.39)

完备Archimedes有序～(complete Archimedean ordered field) (5.33)

实数～的自同构(automorphisms of the read field)(5.45)

～的特征(characteristic of a field)(5.6)

基(base)

拓扑的～(base for a topology)(6.10)

拓扑的次～(subbase for a topology)(6.10)

基(basis)

Hamel～(Hamel basis) (3.18)

线性～(linear basis)(3,18)

向量空间的～(basis for a vector space)(3.18)
基数(cardinal numbers)(4.1)
～的算术(arithmetic of cardinal numbers)(4.23)
～的序关系(order relation for cardinal numbers)(4.5)
没有最大的～(no largest cardinal number)(4.10)
基数性(cardinality)(4.1)
推广(generalization)
单调收敛定理的～(generalization of monotone convergence theorem)(9.17)
控制收敛定理(dominated convergence theorem)
Lebesgue～(Lebesgue's dominated convergence theorem)(12.24),(12.30),(12.57)
虚部(imaginary part)
复数的～(imaginary part of a complex number)(5.42)
常值函数(contant function)(7.2)
唯一性(uniqueness)
Lebesgue测度的～(uniqueness of Lebesgue measure)(12.56)
Fourier变换的～定理(uniqueness theorem for Fourier transforms)(21.47)
累次积分(iterated integral)(21.12)
无穷乘积空间上的～(iterated integrals on infinite product spaces)(22.14)
第一范畴(first category)(6.53)
第二范畴(second category)(6.53)
第一中值定理(first mean value theorem)
积分～(first mean value theorem for integrals)(21.69)
第二中值定理(second mean value theorem)
积分～(second mean value theorem for integrals)(21.70)
第二共轭空间(second conjugate space)(14.6)
族(family)
单调～(monotone family)(21.6)

分离函数～(separating family of functions)(7.28)
具有有限特征的～(family of finite character)(3.6)
商空间(quotient spaces)
Banach空间的～(quotient spaces of Banach spaces)(14.38)
密度(density)
集关于σ代数的～(density of a set with respect to a σ-algebra)(20.62)
密集点(point of density)
集的～(point of density of a set)(18.2)
密着拓扑(indiscrete topology)(6.5)
维数(dimension)
Hausdorff～(Hausdorff dimension)(10.49)
Hilbert空间的正交～(orthogonal dimension of a Hilbert space)(16.28)
$\mathfrak{L}_2$的正交～(orthogonal dimension of $\mathfrak{L}_2$)(16.53)
向量空间的代数～(algebraic dimension of a vector space)(4.59)
向量空间的线性～(linear dimension of a vector space)(4.59)

十二画

逼近(approximation)
Weierstrass～定理(Weierstrass approximation theorem)(7.31)
简单函数～(approximation by simple functions)(11.35)
超滤子(ultrafilter)(20.37)
超平行体(parallelotope)
Hilbert～(Hilbert parallelotope)(16.49)
超限归纳(法)(transfinite induction)(3.14)
换元积分法(integration by substitution)(20.2), (20.3)
赋范代数(normed algebra)(7.5)
赋值泛函(evaluation functional)(9.2)
赋范线性空间(normed linear space)(7.5)

～的完备化(completion of a normed linear space)(14.35)
距离(distance)
点到集的～(distance from a point to a set)(6.86)
两集之间的～(distance between two sets)(6.87)
距离函数(distance function)(6.12)
最大下界(greatest lower bound)
有序域中的～(greatest lower bound in a ordered field)(5.32)
最小上界(least upper bound)
有序域中的～(least upper bound in a ordered field)(5.32)
链(chain)(3.5)
链式法则(chain rule)(19.44)
等距(isometry)(6.85)
等价集(equivalent sets)(4.1)
等价关系(equivalence relation)(2.6)
集(set)(1.1)
Cantor～(Cantor set)(3.4), (6.62)
Cantor型～(Cantor-like set)(6.62)
F_σ～(F_σ set)(6.55)
G_δ～(G_δ set)(6.55)
σ紧～(σ-compact set)(10.30)
σ有限～(σ-finite set)(10.30)
开～(open set)(6.2), (6.4)
凸～(convex set)(16.43)
闭～(closed set)(6.6)
空～(void set)(1.2)
幂～(power set)(1.4)
零～(null set)(9.29)
无限～(infinite set)(4.12)
可列～(denumerable set)(4.14)
可测～(measurable set)(10.5)
可数～(countable set)(4.14)

半序～(partially ordered set)(2.7)
对角～(diagonal set)(2.20)
有限～(finite set)(4.12)
完全～(perfect set)(6.61)
良序～(well-ordered set)(2.7)
指标～(indexing set)(1.4)
通用～(universal set)(1.8)
三分点～(ternary set)(3.4), (6.62)
不可数～(uncountable set)(4.14)
局部零～(locally null set)(9.29),(20.11)
单元素～(singleton set)(1.2)
相对开～(relatively set)(6.18)
无处稠密～(nowhere dense set)(6.53)
正规正交～(orthonormal set)(16.9)
可数无限～(countably infinite set)(4.14)
线性有序～(linearly ordered set)(2.7)
完全正规正交～(complete orthonormal set)(16.19)(16.23)
点到～的距离(distance from a point to a set)(6.86)
～的子集(subset of a set)(1.3)
～的余集(complement of a set)(1.8)
～的枚举(enumeration of a set)(4.14)
～的直径(diameter of a set)(6.51)
～的截口(section of a set)(21.2)
～的内部(interior of a set)(6.6)
～的真子集(proper subset of a set)(1.3)
集(sets)
Baire～(Baire sets)(11.46)
Borel～(Borel sets)(10.19)
Lebesgue可测～(Lebesgue measurable sets)(10.6)
可测～(measurable sets)(10.31)
对等～(equivalent sets)(4.1)

解析～(analytic sets)(10.21)
不可测～(nonmeasurable sets)(10.28), (10.54)
不相交～(disjoint sets)(1.7)
～的Cartesian乘积(Cartesian product of sets)(2.1)(3.1)
～的交(intersections of sets)(1.4)
～的并(union of sets)(1.4)
～代数(algebra of sets)(1.11)
～环(ring of sets)(1.11)
～格(lattice of sets)(10.57)
～所成的σ环(σ-ring of sets)(1.13)
～所成的σ代数(σ-algebra of sets)(1.13)
两～的对称差(symmetric difference of two sets)(1.10)
两～之间的距离(distance between two sets)(6.87)
可测～的映射(mappings of measurable sets) (11.6), (17.25)
-(17.27), (18.25), (18.39)
集态极限(setwise limits)
测度的～(setwise limits of measures)(19.68), (19.69)
象(image)(2.13)
测度的连续～(continuous images of measures)(12.45)
象集(image set)
～上的测度(measures on image sets)(11.38)
幂集(power set)(1.4)
强函数(majorant)(7.2)
强大数定律(strong law of large numbers)(22.29), (22.31)

十三画

零集(null set)(9.29)
局部～(locally null set)(9.29), (20.11)
零一律(zero-one law)(22.21)
零序列(null sequence)(5.19)
零函数(null function)(9.29)

局部～(locally null function)(9.29),
零一测度(zero-one measures)(20.37)
置换(permutation)(4.56)
稠密子集(dense subset)
$\mathfrak{L}_p$的～(dense subset of $\mathfrak{L}_p$)(13.20),(13.21)
拓扑空间的～(dense subset of a topological space)(6.20)
稠密性特征标(density character)
拓扑空间的～(density character of a topological space)(14.26)
锥(cone)
凸～(convex cone)(14.27)
简单函数(simple functions)(11.34)
～逼近(approximation by simple functions)(11.35)
微分(differentiation)
逐项～(term by term differentiation)(17.18)
Lebesgue～定理(Lebesgue's differentiation theorem)(17.12)
对于一个网的～(differentiation on a net)(20.61)
微积分学基本定理 (fundamental theorem of the integral calculus)
关于Lebesgue积分的～(fundamental theorem of the integral calculus for Lebesgue integrals)(18.16)
解析集(analytic sets)(10.21)
滤子(filter)(20.37)
自由～(free filter)(20.38)
固定～(fixed filter)(20.38)
数(number)
序～(ordinal number)(4.40)
基～(cardinal number)(4.1)
数(numbers)
实～(real numbers)(1.2)
复～(complex numbers)(1.2)
正规～(normal numbers)(22.34)

有理~(rational numbers)(1.2)
广义实~(extended real numbers)(6.1)
复~域(field of complex numbers)(5.42)
实~的展开式(expansion of real numbers)(5.40)
基~的序关系(order relation for cardinal numbers)(4.5)
弱大~定律(weak law of large numbers)(22.32)
强大~定律(strong law of large numbers)(22.29), (22.31)
群(group)(5.1)
Abel~(Abelian group)(5.1)
群代数(group algebra)
R的~(group algebra of R)(21.34)

十四画

鞅(martingale)
广义~(martingale in the wide sense)(16.45)
鞅定理(martingale theorem)(20.56), (20.59), (20.66)
截口(section)
集的~(section of a set)(21.2)
函数的~(section of a function)(21.2)
算子(operator)
线性~(linear operator)(14.1)
算术(arithmetic)
基数的~(arithmetic of cardinal number)(4.23)
算子代数(algebra of operators)(16.40)
算子范数(operator norm)(14.1)
算术平均(arithmetic means)
Fourier级数的~(arithmetic means for a Fourier series)(18.27)
算子的伴随(adjoint of an operator)(14.34), (16.40)
端点(endpoint)(6.1)

十六画

整数(integers)(1.2)

正～(positive integers)(1.2)

凝点(condensation point)(6.66)

十八画

覆盖(cover)(6.31)

Vitali～(Vitali cover)(17.10)

开～(open cover)(6.31)

覆盖定理(cover theorem)

Vitali～(Vitali cover theorem)(17.11)